Tristano Manacorda

Sulla torsione di un cilindro circolare omogeneo e isotropo nella teoria delle deformazioni finite di solidi elastici incomprimibili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 177–189.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_177_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sulla torsione di un cilindro circolare omogeneo e isotropo nella teoria delle deformazioni finite di solidi elastici incomprimibili.

Nota di Tristano Manacorda (a Roma).

Sunto. - *Si tratta in modo completo il problema della torsione e trazione del cilindro nella Elasticità di secondo grado, non solo individuando le forze che devono intendersi distribuite sulle due basi in condizioni di equilibrio, ma anche arrivando a precisare che, in corrispondenza a un*

([6]) Per la proposizione geometrica che si può tradurre nella relazione algebrica $p = 0$, vedi ancora la mia ricerca in corso di stampa di cui a note precedenti.

ben determinato valore dell'angolo di torsione [o dell'allungamento del cilindro] per ciascuna base l'insieme di tali forze viene proprio a equivalere a una coppia.

§ 1. - Introduzione e posizione del problema.

1. **Introduzione.** - In una Memoria in corso di pubblicazione (¹) il prof. A. SIGNORINI ha dato, fra l'altro, anche un esempio di trattazione « completa » del problema della flessione di una piastra incomprimibile di spessore qualunque. Con ciò si vuol dire che, non solo vengono individuate le forze da intendersi distribuite sui bordi della piastra in condizioni di equilibrio, ma anche sono stabilite le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'insieme di tali forze proprio equivalga a una coppia per ciascuno dei quattro bordi.

Nella presente nota si prende in esame, in parallelo, il caso di un cilindro circolare isotropo omogeneo incomprimibile sottoposto insieme a torsione ed a trazione o compressione parallelamente al suo asse. Si tratta di un problema non nuovo (²), ma che viene di regola limitato alla sola determinazione delle forze superficiali che, agendo sulle basi del cilindro, sono atte a mantenere l'equilibrio. Qui, invece, il problema viene trattato in modo completo nel senso anzidetto.

In un primo momento — *problema preliminare* — vengono ancora determinate le forze superficiali atte a mantenere l'equilibrio, senza alcuna restrizione per la forma effettiva del potenziale isotermo W, con qualche maggiore generalità e ampiezza del consueto. Adottando poi per W la forma che ad esso compete nella più generale *Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili* (³), non solo viene precisata la distribuzione delle forze superficiali, ma si riesce anche a mostrare — *problema effettivo* — che in corrispondenza ad ogni prefissato valore dell'angolo di torsione [dell'allungamento del cilindro] è possibile determinare uno ed un sol

(¹) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. IIIª, *Solidi incomprimibili*, in corso di pubbl. su Ann. Mat. pura appl. (4), *39*, (1955).

(²) Cfr. ad es. A. E. GREEN - W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, (Oxford, Clarendon Press, 1954), Cap. III; e C. TRUESDELL, *The mechanical foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. of Rat. Mech. and An. *1*, (1952), pp. 125-300, p. 182 sg..

(³) Cfr. A. SIGNORINI, loc. cit. in (¹), Cap. III. Tale lavoro verrà in seguito brevemente indicato con: A. SIGNORINI, Mem. IIIª.

valore dell'allungamento del cilindro [dell'angolo di torsione] in corrispondenza al quale le forze superficiali per ciascuna base equivalgono a una coppia.

2. **Posizione del problema.** - Nella configurazione di riferimento C_* il solido S si presenti come un cilindro circolare retto di altezza l_* e raggio a_*. Indicherò le sue basi con $\Sigma_0{}^*$ e $\Sigma_1{}^*$, e assumerò come origine di una terna di riferimento trirettangola levogira $\mathcal{T} \equiv 0c_1c_2c_3$ il centro 0 di $\Sigma_0{}^*$, col versore $0c_3$ diretto parallelamente all'asse del cilindro, verso l'interno. Con le notazioni consuete indico con

$$R = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad \Theta = \operatorname{arctg} \frac{y_2}{y_1}, \quad y_3, \quad (-\pi \leq \Theta < \pi),$$

le coordinate cilindriche di un punto P_* di S nella configurazione C_*, e con

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad x_3, \quad (-\pi \leq \theta < \pi),$$

le coordinate del punto P di S corrispondente a P_* in un'altra configurazione C. Considero poi un qualunque spostamento regolare $C_* \rightarrow C$ pel quale lo spostamento inverso $C \rightarrow C_*$ resti definito da equazioni del tipo

$$R = F(r), \quad \Theta = \theta - g(x_3), \quad y_3 = h(x_3). \tag{1}$$

Senza perdere in generalità, si potrà anche intendere

$$F'(r) > 0, \quad g'(x_3) > 0, \quad h'(x_3) > 0 \tag{2}$$

in tutto C, ed inoltre

$$g(0) = 0, \quad h(0) = 0. \tag{3}$$

In conseguenza delle (1), in C il solido si presenta ancora come un cilindro circolare retto, di cui indicherò con a il raggio e l l'altezza. Pongo cioè

$$a_* = F(a), \quad l_* = h(l). \tag{4}$$

Nello stesso tempo può anche scriversi, insieme alle (3),

$$0 = F(0), \tag{3'}$$

rimanendo con ciò la semiretta $0c_3$ unita nella trasformazione. Converrà poi indicare con Σ_0 e Σ_1 le basi, con Σ_l la superficie laterale di S in C, e, riguardo al generico punto P di C, sarà anche utile introdurre la terna di riferimento $\mathcal{C}' \equiv Pu_1u_2u_3$ con Pu_1 normale a $0c_3$, nel semipiano per l'asse del cilindro che contiene P, e Pu_3 parallelo e concorde a c_3.

In un primo momento verrà completamente risolto il *problema preliminare* [cfr. n. 1] senza alcuna preventiva specificazione della forma effettiva del potenziale isotermo W. Sarà possibile mostrare che, per ogni scelta del valore di l/l_* e dell'*angolo di torsione* $\omega = (\theta - \Theta)_{x_3=l} = g(l)$ il problema preliminare ammette una ed una sola soluzione.

Scegliendo poi per W la forma che gli compete nella più generale *Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili*, verranno precisati i risultati precedentemente conseguiti, e di più, ammettendo per W tutte quelle restrizioni che sono suggerite dal suo significato fisico, sarà possibile mostrare che anche il *problema effettivo* [cfr. ancora n. 1] ammette una ed una sola soluzione in corrispondenza ad ogni scelta arbitraria di $\omega > 0$ o di $\dfrac{l}{l_*} > 1$. Non esistono invece soluzioni del problema effettivo per $\dfrac{l}{l_*} < 1$.

§ 2. - Risoluzione generale del problema preliminare.

3. **Intervento della condizione di incomprimibilità.** - Le (1) forniscono per l'elemento di lunghezza ds_* in C_*

(4)
$$ds^2_* = F'^2(r)dr^2 + F^2(r)d\vartheta^2 + \\ + [h'^2(x_3) + g'^2(x_3)F^2(r)]dx_3^2 - 2g'(x_3)F^2(r)d\theta dx_3 .$$

Con riferimento a $\mathcal{C}'$, i coefficienti della dilatazione $K\alpha^{-1}\alpha^{-1} = 1 + 2\varepsilon$ sono perciò

(5)
$$c_{11} = F'^2(r), \quad c_{22} = F^2(r)/r^2, \quad c_{33} = h'^2(x_3) + g'^2(x_3)F^2(r) \\ c_{12} = c_{13} = 0, \quad c_{23} = - g'(x_3)F^2(r)/r.$$

Queste mostrano innanzi tutto che, per ogni P_*, è direzione principale di deformazione quella corrispondente a Pu_1 nella trasformazione inversa $C \rightarrow C_*$. Per l'allungamento principale relativo si ha

(6)
$$1 + \Delta_1 = 1/F'(r).$$

La condizione di incomprimibilità si scrive poi

(7)
$$\frac{F^2(r)F'^2(r)}{r^2} h'^2(x_3) = 1,$$

con le immediate conseguenze

$$h'(x_3) = \lambda^2, \quad \frac{F(r)F'(r)}{r} = |\,\lambda^{-2}\,| \tag{8}$$

con λ costante. Le $(2)_3$ e $(3)_2$ precisano la prima di queste eguaglianze in

$$h(x_3) = \lambda^2 x_3, \quad \lambda^2 > 0. \tag{9}$$

La $(8)_2$ dà allora [cfr. la (3')]

$$R \equiv F(r) = r/\lambda. \tag{10}$$

Quest'ultima precisa il significato fisico di λ. Si ha infatti, per la (6), $\lambda = 1 + \Delta_1$, ed insieme [cfr. (4)]

$$\lambda = \frac{a}{a_*} = \sqrt{\frac{l_*}{l}} \tag{11}$$

Le (9) e (10) permettono già di precisare le (5) in

$$\begin{gathered} c_{11} = \lambda^{-2}, \quad c_{22} = \lambda^{-2}, \quad c_{33} = \lambda^4 + g'^2(x_3)r^2\lambda^{-2}, \\ c_{12} = c_{13} = 0, \quad c_{23} = -\, g'(x_3)r\lambda^{-2}. \end{gathered} \tag{5'}$$

Indichiamo allora con $\bar{\mathfrak{J}}_1$ e $\bar{\mathfrak{J}}_2$ gli invarianti primo e secondo della omografia $1 + 2\bar{\varepsilon}$ $[I_3(1 + 2\bar{\varepsilon}) = 1]$, legati, nel caso di solidi incomprimibili soggetti a trasformazioni isoterme, ai due invarianti $\mathfrak{J}_1$ e $\mathfrak{J}_2$ di $1 + 2\varepsilon$ da

$$\bar{\mathfrak{J}}_1 = \mathfrak{J}_2, \quad \bar{\mathfrak{J}}_2 = \mathfrak{J}_1 .$$

Nel caso attuale si ha

$$\bar{\mathfrak{J}}_1 = 2\lambda^{-2} + \lambda^4 + g'^2(x_3)r^2\lambda^{-2}, \quad \bar{\mathfrak{J}}_2 = 2\lambda^2 + \lambda^{-4} + g'^2(x_3)r^2\lambda^{-4}. \tag{12}$$

OSSERVAZIONE. - Ricordo [4] che nel caso dei solidi incomprimibili conviene sostituire ai tre allungamenti principali $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ [legati dalla condizione di incomprimibilità] i due parametri indipendenti [cfr. (11)]

$$\lambda = 1 + \Delta_1, \quad s = \Delta_2 - \Delta_3 .$$

Mediante λ e s, $\bar{\mathfrak{J}}_1$ e $\bar{\mathfrak{J}}_2$ si esprimono nella forma

$$\bar{\mathfrak{J}}_1 = \lambda^2 s^2 + \lambda^{-2} + 2\lambda, \quad \bar{\mathfrak{J}}_2 = s^2 + \lambda^2 + 2\lambda^{-1}.$$

[4] Cfr. A. SIGNORINI, Mem. III^a, Cap. II, n. 6.

Dalle (12) si può allora concordemente ricavare

$$s^2 \equiv (\Delta_2 - \Delta_3)^2 = \lambda^2 - 2\lambda^{-1} + \lambda^{-4}[1 + r^2 g'^2(x_3)]. \tag{13}$$

4. Intervento delle equazioni indefinite di *Cauchy*: precisazione della funzione $g(x_3)$. – Non penso per ora ad alcuna forma particolare di W. Pongo

$$\overline{W}_i = 2\frac{\partial W}{\partial \overline{\mathfrak{J}}_i} \qquad (i = 1,\ 2), \tag{14}$$

ed indico con $X_{rs}(r,\ s = 1,\ 2,\ 3)$ i coefficienti (euleriani) di tensione rispetto alla terna di riferimento $\mathcal{C}'$. Con ciò, in base a risultati generali ([5]) si ottiene

$$\begin{aligned} &X_{11} - \bar{p} = \overline{W}_1\lambda^{-2} - \overline{W}_2\lambda^2, \\ &X_{22} - \bar{p} = \overline{W}_1\lambda^{-2} - \overline{W}_2\lambda^2 - g'^2 r^2 \overline{W}_2\lambda^{-4}, \quad X_{23} = -[\overline{W}_1 + \overline{W}_2\lambda^{-2}]g'(x_3)r\lambda^{-2}, \\ &X_{33} - \bar{p} = \overline{W}_1\lambda^4 - \overline{W}_2\lambda^{-4} + g'^2 r^2 \overline{W}_1\lambda^{-2}, \quad X_{12} = X_{13} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Per la costanza di λ e l'omogeneità di S in C_*, le X_{rs} possono dipendere da θ solo per il tramite di $\bar{p}$. Le equazioni indefinite di Cauchy che si ottengono specializzando la loro forma generale in coordinate cilindriche ([6]), si riducono pertanto a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_{11}}{\partial r} + \frac{X_{11} - X_{22}}{r} = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{\partial X_{23}}{\partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial X_{33}}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \dots\ C_* \tag{16}$$

C'è poi la condizione che per ogni elemento di Σ_l sia nulla la forza superficiale esterna. Stante le ultime due delle (15), tale condizione resta completamente tradotta da

$$X_{11} = 0 \qquad \dots\ \Sigma_l$$

cioè [cfr. $(15)_1$] da

$$\bar{p} = -\overline{W}_1\lambda^{-2} + \overline{W}_2\lambda^2 \qquad \dots\ \Sigma_l. \tag{17}$$

([5]) A. Signorini, Mem. III^a, Cap. II, n. 4.

([6]) Cfr. ad es. A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, (4^a ed., Cambridge, 1927), p. 90.

Dalla $(16)_2$, se la $\frac{\partial X_{23}}{\partial x_3}$ non è identicamente nulla, si ottiene

$$\bar{p} = -r \frac{\partial X_{23}}{\partial x_3} \theta + p_0,$$

pur di intendere p_0 funzione soltanto di r e x_3. Ma tale espressione di $\bar{p}$ è evidentemente inammissibile, se si vuole che $\bar{p}$ sia funzione uniforme anche di θ. Deve quindi essere $\frac{\partial X_{23}}{\partial x_3} = 0$. D'altra parte, dalla $(15)_4$ si ha

$$\frac{\partial X_{23}}{\partial x_3} = -[\overline{W}_1 + \overline{W}_2\lambda^{-2}]r\lambda^{-2}g''(x_3) - \\ - 4r^2\lambda^{-2}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \mathfrak{J}_1^{\,2}} + 2\frac{\partial^2 W}{\partial \mathfrak{J}_1 \partial \mathfrak{J}_2}\lambda^{-2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathfrak{J}_2^{\,2}}\lambda^{-4}\right] g'(x_3)g''(x_3).$$

Dovendosi intendere indipendenti le variabili r e x_3, non può dunque essere altro che $g''(x_3) = 0$, cioè [cfr. $(2)_2$ e $(3)_1$]

$$g'(x_3) = K, \quad g(x_3) = Kx_3, \tag{18}$$

con K costante positiva, legata all'angolo di torsione dall'uguaglianza [cfr. (11)]

$$\omega = Kl = \frac{Kl_*}{\lambda^2}. \tag{18'}$$

Con ciò tutti i coefficienti di $1 + 2\varepsilon$ si riducono a funzioni della sola r, e lo stesso viene a verificarsi per i secondi membri di tutte le (15). La $(16)_3$ viene allora ad escludere che $\bar{p}$ possa dipendere da x_3, mentre le $(16)_1$ e (17) forniscono $\bar{p}$ come funzione della sola r. Si ha infatti [cfr. (15)]

$$X_{22} - X_{11} = -K^2\lambda^{-4}\overline{W}_2 r^2,$$

e quindi

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = -K^2\lambda^{-4}\overline{W}_2 r - \frac{d}{dr}(X_{11} - \bar{p}).$$

Di qui, tenendo conto della (17),

$$\bar{p} = K^2\lambda^{-4}\int_r^a \overline{W}_2 r\,dr - \overline{W}_1\lambda^{-2} + \overline{W}_2\lambda^2. \tag{19}$$

Dopo ciò, le $(15)_{3,4}$ risolvono completamente il problema preliminare subordinatamente ad una scelta della forma effettiva della funzione $W(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2)$. Basta osservare che, per il tramite delle (12) e (19) X_{33} e X_{23} risultano ben precise funzioni di r, λ e K per poter concludere che, *per ogni scelta delle costanti* λ *e* K [od anche di λ e ω, cfr. (18')] *il problema preliminare ammette una ed una sola soluzione in corrispondenza ad ogni forma effettiva della funzione* $\mathrm{W}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2)$.

§ 3. - Il problema preliminare nella Elasticità di secondo grado. Risoluzione del problema effettivo.

5. **Precisazione degli sforzi nella più generale Elasticità di secondo grado.** - Passo ora a precisare i risultati conseguiti nei n. precedenti adottando per W l'espressione che ad esso compete nella più generale Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili,

$$2W = c_1(\mathfrak{J}_1 - 3) + c_2(\mathfrak{J}_2 - 3) + c_3(\mathfrak{J}_1 - 3)^2, \tag{20}$$

con c_1, c_2, c_3 costanti [7]. Le condizioni cui si devono intendere assoggettati c_1, c_2, c_3 perché W possieda quelle prime proprietà che sono suggerite dal suo significato fisico sono già state stabilite in altro lavoro [8]. In particolare, quando non sia $c_3 = 0$, dovrà essere $c_3 > 0$ ed insieme

$$c_1 + c_2 > 0, \quad c_2 + 4c_3 > 0. \tag{21}$$

Dalla (20) si ottiene [cfr. (14), (12) e (18)]

$$\overline{W}_1 = c_1 + 2c_3(\mathfrak{J}_1 - 3) = c_1 + 2c_3\lambda^{-2}[\lambda^6 - 3\lambda^2 + 2 + K^2r^2], \quad \overline{W}_2 = c_2 \tag{22}$$

Le (19) e (15) divengono in conseguenza

$$\bar{p} = \frac{1}{2}K^2\lambda^{-4}c_2(a^2 - r^2) - 2c_3K^2\lambda^{-4}r^2 + c_2\lambda^2 - c_1\lambda^{-2} - 2c_3\lambda^{-4}[\lambda^6 - 3\lambda^2 + 2], \tag{23}$$

e

$$
\begin{aligned}
X_{11} &= \frac{1}{2}c_2K^2\lambda^{-4}(a^2 - r^2),\\
X_{22} &= \frac{1}{2}c_2K^2\lambda^{-4}(a^2 - 3r^2),\\
X_{33} &= \frac{1}{2}c_2K^2\lambda^{-4}(a^2 - r^2) + \overline{W}_1K^2\lambda^{-2}r^2 - \overline{W}_1\lambda^{-2}(1 - \lambda^6) - c_2\lambda^{-4}(1 - \lambda^6),\\
X_{23} &= -\lambda^{-4}[2c_3\lambda^6 - (6c_3 - c_1)\lambda^2 + c_2 + 4c_3]Kr - 2c_3\lambda^{-4}K^3r^3
\end{aligned} \tag{24}
$$

sempre in aggiunta a $X_{12} = X_{13} = 0$.

(7) Cfr. A. Signorini, Mem. III^a, Cap. III.

(8) T. Manacorda, *Sul potenziale isotermo nella più generale Elasticità di secondo grado*, Ann. di Mat. pura e appl. (4), *41*, (1955).

Un primo esame delle (25) mostra che, se $c_2 = 0$, X_{11} e X_{22} si annullano identicamente come nel problema elementare della elasticità classica. In generale X_{11}/c_2 e X_{22}/c_2 risultano funzioni decrescenti di r, la prima sempre non negativa, mentre la seconda passa dal positivo al negativo annullandosi per $r = a/\sqrt{3}$.

Conviene anche qui ([9]) ricorrere alle posizioni

$$\frac{c_1}{6c_3} = 1 - X, \quad \frac{c_2}{4c_3} = Y - 1. \tag{25}$$

Per la $(21)_2$ è $Y > 0$. Posto poi anche

$$f(\lambda^2) = \lambda^6 - 3X\lambda^2 + 2Y, \tag{26}$$

si possono precisare X_{33} e X_{23} nella forma

$$\begin{aligned} X_{33} &= 2c_3\lambda^{-4}\{K^4r^4 + (Y-1)K^2(a^2 - r^2) + \\ &\qquad + K^2r^2[2\lambda^6 - 3X\lambda^2 + 1] + (\lambda^6 - 1)f(\lambda^2)\}, \\ X_{23} &= -2c_3\lambda^{-4}\{f(\lambda^2)Kr + K^3r^3\}. \end{aligned} \tag{27}$$

La funzione $f(\lambda^2)$ deve intendersi positiva per ogni λ^2 ([10]), e perciò X_{23} risulta funzione sempre non positiva e decrescente di r, col minimo per $r = a$.

Le (27) danno la soluzione del problema preliminare nella Elasticità di secondo grado, in quanto $-X_{33}$ e $-X_{23}$ forniscono la distribuzione degli sforzi superficiali che occorre applicare a Σ_1 perchè C sia configurazione forzata di equilibrio. Indicherò con $\boldsymbol{R}$ il risultante e con $\boldsymbol{M}$ il momento risultante rispetto ad O delle forze superficiali agenti su Σ_1, osservando che si ha

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{R}}{2\pi} &= -\int_0^a X_{33} r\,dr \cdot \boldsymbol{u}_3, \\ \frac{\boldsymbol{M}}{2\pi} &= -\int_0^a X_{23} r^2 dr \cdot \boldsymbol{u}_3. \end{aligned} \tag{27}$$

Conviene introdurre, al posto di K, l'angolo di torsione ω [cfr. (18')], ponendo anche

$$\lambda^2 = \mu, \quad \frac{\omega a_*}{l_*} = \eta. \tag{29}$$

([9]) Loc. cit. in ([8]) n. 4.

([10]) Loc. cit. in ([8]) n. 5.

Se si fanno allora le posizioni

$$(30)\qquad \tau = \frac{1}{3}\mu^5\eta^4 + \frac{1}{2}[2\mu^3 - 3X\mu + Y]\mu^2\eta^2, \qquad t = \frac{1-\mu^3}{\mu} f(\mu)$$

si ottiene a integrazione effettuata

$$(31)\qquad \frac{\boldsymbol{R}}{2c_3\pi a^2_*} = (t-\tau)\boldsymbol{u}_3, \quad \frac{\boldsymbol{M}}{2c_3\pi a^3_*} = \left\{\frac{1}{2} f(\mu)\mu\eta + \frac{1}{2}\eta^3\mu^4\right\}\boldsymbol{u}_3.$$

Mentre $\boldsymbol{M}$ risulta senz'altro funzione crescente di η[di μ] per ogni prefissato μ [per ogni prefissata η], lo stesso non può dirsi, almeno in un primo momento, di $\boldsymbol{R}$. Il suo comportamento in funzione di η e μ sarà esaminato in dettaglio nel prossimo n.

6. **Comportamento della funzione** $\tau = \tau(\eta, \mu)$. - La $(31)_1$ permette di interpretare il risultante delle forze superficiali agenti, per unità di area di $\Sigma_1{}^*$, su Σ_1 come la differenza di due vettori. Di questi, il vettore $2c_3 t\boldsymbol{u}_3$, indipendente dall'angolo di torsione, da solo verrebbe a corrispondere ad un allungamento uniforme di S parallelamente ad $O\ c_3$ con allungamento unitario

$$\Delta_3 = \frac{1}{\mu} - 1.$$

Invece, il vettore $2c_3\tau\boldsymbol{u}_3$, dipendente insieme da μ e da η, viene a rappresentare quella parte di $\boldsymbol{R}/\pi a^2_*$ che equilibra l'influenza che la torsione del cilindro avrebbe su Δ_3.

Quanto al comportamento di $\tau = \tau(\eta, \mu)$, conviene prima di tutto osservare che, fissata η, τ si annulla per $\mu = 0$ con la sua derivata prima, mentre la derivata seconda è positiva. Invece, pensando fissata μ, mentre è ancora $\tau(0, \mu) = 0$, la derivata prima di τ rispetto a η^2 è positiva, nulla o negativa a seconda che $2\mu^3 - 3X\mu + Y \gtreqless 0$.

Le restrizioni poi per X e Y necessarie e sufficienti ad assicurare che t è funzione sempre decrescente di μ, passante da $+\infty$ a $-\infty$ quando μ varia da zero a $+\infty$, non sono anche sufficienti perchè τ sia una funzione non negativa di η e μ, e tanto meno, fissata η [fissata μ], funzione monotona di μ [di η].

La condizione infatti che, fissata μ, la funzione di η, τ/η^2, risulti positiva anche per valori di η comunque piccoli, si traduce in quella che sia positiva, in corrispondenza all'arbitrario valore di μ prefissato, la funzione

$$\varphi(\mu) = 2\mu^3 - 3X\mu + Y,$$

e quindi nella condizione per X e Y ([11])

$$Y^2 \geq 2X^3. \tag{32}$$

Questa disuguaglianza, certo soddisfatta da qualunque $X \leq 0$, è più restrittiva, per $X > 0$, delle condizioni necessarie e sufficienti perchè t risulti funzione decrescente di μ. Se infatti si interpretano X e Y come coordinate cartesiane ortogonali, il ramo di parabola semicubica

$$Y^2 = 2X^3, \quad Y \geq 0, \tag{33}$$

penetra nella regione Ω_2 del semipiano $Y \geq 0$ alla quale appartengono tutti e soli i punti $M \equiv (X, Y)$ in corrispondenza ai quali t risulta funzione decrescente di μ ([12]).

Se non si impongono ulteriori restrizioni ad X e Y, oltre quella che M appartenga ad Ω_2, non si può dunque escludere la possibilità che esistano degli X e Y per i quali τ possa essere anche negativa per qualche valore di η e μ. Mentre se è soddisfatta la (32), τ risulta anche funzione crescente di η per ogni μ prefissato.

Più restrittiva ancora della (32) risulta invece la condizione che, per ogni prefissato η, in particolare per η molto piccolo, τ risulti funzione non decrescente di μ. Avendosi

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mu} = \eta^2 \mu \left\{ 5\left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right)\mu^3 - \frac{9}{2} X\mu + Y \right\},$$

la condizione che τ sia, in corrispondenza ad ogni prefissata η, funzione non decrescente di μ, si riduce a quella che sia

$$Y^2 \geq \frac{27X^3}{10\left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right)}. \tag{34}$$

Anche la (34) è sempre soddisfatta per $X \leq 0$. Per X positiva, invece, il ramo di parabola semicubica

$$Y^2 = \frac{27}{10\left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right)} X^3, \quad Y \geq 0, \tag{35}$$

mentre è sempre esterno alla regione Ω_2 per η sufficientemente grande, penetra nell'interno di Ω_2, per η piccolo mentre la (34) costituisce addirittura una condizione più restrittiva della (32) per η piccolissimo. In altri termini, anche qui, se non si impongono a X e Y altre condizioni oltre quelle che $M \equiv (X, Y)$ appartenga

([11]) Essendo $Y > 0$, l'equazione $\varphi(\mu) = 0$ possiede in ogni caso una sola radice negativa.

([12]) Cfr. loc. cit. in ([8]), n. 7.

ad Ω_2, possono esistere dei valori di X e Y in corrispondenza ai quali, per η *sufficientemente piccolo*, $\tau(\eta, \mu)$ risulti funzione decrescente di μ, mentre è certo funzione crescente di μ per η sufficientemente grande.

Un tale comportamento di τ sembra, anche alla più immediata intuizione, difficilmente accettabile per un solido isotropo. Per questa ragione intenderò sempre nel seguito soddisfatta la disuguaglianza

$$Y^2 \geq \frac{27}{10} X^3. \tag{36}$$

e quindi, a fortiori, la (32).

7. **Caso di *Mooney-Rivlin*.** - Il potenziale isotermo (20), relativo alla più generale Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili, si specializza in quello proposto da MOONEY ([13]) e adottato da RIVLIN in molte delle sue ricerche teoriche e sperimentali, quando sia $c_3 = 0$. In tal caso si devono intendere $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ quali condizioni necessarie e sufficienti perchè W risulti positivo per tutti i valori di $\mathfrak{J}_1$ e $\mathfrak{J}_2$ possibili e non simultaneamente eguali a tre.

Essendo ora $W_1 = c_1$, mentre le $(24)_{1,2}$ non cambiano, le (27) si semplificano in

$$\begin{aligned} X_{33} &= \frac{1}{2} c_2 K^2 \lambda^{-4}(a^2 - r^2) + c_1 K^2 \lambda^{-2} r^2 + \frac{\lambda^6 - 1}{\lambda^4} [\lambda^2 c_1 + c_2], \\ X_{23} &= - \lambda^{-4}[c_1 \lambda^2 + c_2] K r. \end{aligned} \tag{37}$$

Quanto a $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{M}$ [cfr. (31)], posto qui

$$\tau_1 = \frac{1}{4}\left[2 \frac{c_1}{c_2} \mu + 1\right] \mu^2 \eta^2, \quad t_1 = \frac{1 - \mu^3}{\mu}\left[\frac{c_1}{c_2} \mu + 1\right], \tag{38}$$

si ottiene

$$\frac{\boldsymbol{R}}{c_2 \pi a_*^2} = (t_1 - \tau_1) \boldsymbol{u}_3, \quad \frac{\boldsymbol{M}}{c_2 \pi a_*^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{c_1}{c_2} \mu + 1\right] \eta \mu \boldsymbol{u}_3. \tag{39}$$

Allo stesso risultato si perviene naturalmente passando al limite nelle (31) per $c_3 \to 0$,

Come si vede immediatamente, nel caso presente, mentre t_1 resta funzione sempre decrescente di μ, τ_1 risulta senz'altro funzione crescente e di η [per ogni prefissato μ], e di μ [per ogni prefissato η].

([13]) M. MOONEY, *A theory of large elastic deformation*, J. of Appl. Phys. **11**, (1940), pp. 582-592.

La cosa non può certo sorprendere quando si osservi che

$$\lim_{c_3 \to 0} 6c_3X = -c_1 < 0.$$

e si ricordi che per $X \leq 0$ le (34) e (32) sono sempre soddisfatte.

8. **Risoluzione del problema effettivo.** - L'equazione caratteristica del problema effettivo nella più generale Elasticità di secondo grado si scrive ora [cfr. $(31)_1$]

$$(40) \qquad \tau(\eta, \mu) = t(\mu),$$

con $\tau(\eta, \mu)$ positiva per ogni η e μ positivi, e funzione crescente di μ[di η] in corrispondenza ad ogni prescelta η [ad ogni prescelta μ], e t funzione sempre decrescente di μ, positiva per $0 < \mu < 1$ [$\Delta_3 > 0$], negativa per $\mu > 1$ [$\Delta_3 < 0$]. Tale comportamento di τ e t assicura senz'altro che il problema effettivo ammette una ed una sola soluzione in corrispondenza ad ogni prescelta $\eta > 0$, e che essa corrisponde necessariamente ad un valore di μ minore di uno; e che, viceversa, per ogni prescelta μ positiva e minore di uno, esiste uno ed un sol valore di η per il quale la (40) è soddisfatta. Quando sia soddisfatta per X ed Y la disuguaglianza (36), il problema effettivo ammette dunque sempre una ed una sola soluzione, ed essa corrisponde necessariamente ad uno stato di allungamento di S.

Alle stesse conclusioni si arriva naturalmente nel caso di MOONEY-RIVLIN, nel quale le funzioni τ_1 e t_1 hanno senz'altro tutte le proprietà necessarie ad assicurare l'esistenza di una ed una sola soluzione del problema effettivo.

OSSERVAZIONE. - Se la deformazione si riduce infinitesima, K e $1 - \lambda$ si devono ritenere infinitesimi. Posto allora

$$\lambda^2 = 1 - \sigma, \quad c_1 + c_2 = \frac{E}{3},$$

[$E > 0$, cfr. $(21)_1$], le (24) danno, a meno di infinitesimi di ordine superiore a K e σ,

$$X_{11} = X_{22} = 0, \ X_{33} = -E\sigma, \ X_{23} = -\frac{E}{3} Kr.$$

Nella approssimazione adottata si ha $X_{33} = 0$ solo per $\lambda = 1$. La possibilità quindi che le forze superficiali applicate a Σ_1 vengano ad equivalere ad una coppia anche per $\lambda \neq 1$ dipende in modo essenziale dalla non linearità delle relazioni tra sforzi interni e deformazione, e va senz'altro esclusa dall'ambito della teoria linearizzata della elasticità.