
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO GHERARDELLI

Un'osservazione sulla catena delle sizigie di un ideale di funzioni theta.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 10
(1955), n.2, p. 190–194.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_190_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Un'osservazione sulla catena delle sizigie di un ideale di funzioni theta.

Nota di FRANCESCO GHERARDELLI (a Firenze)

Sunto. - *Si dà una nuova dimostrazione del teorema secondo cui la catena delle sizigie di un ideale di funzioni theta ha lunghezza finita.*

1. A. ANDREOTTI [1], trattando il problema della classificazione delle superficie irregolari, ha osservato che le funzioni theta, relative ad una data matrice di RIEMANN $\omega^{(p, 2p)}$ ed ad una data forma principale, formano un anello omogeneo \mathfrak{S} e ha dimostrato, fra l'altro, i seguenti teoremi:

a) l'anello \mathfrak{S} soddisfa alla condizione massimale;

b) in \mathfrak{S} vale l'algoritmo delle sizigie di HILBERT, cioè il processo di costruzione delle sizigie successive di un ideale di \mathfrak{S} ha termine necessariamente dopo un numero finito di passi.

Nella dimostrazione di questi teoremi, data dall'ANDREOTTI, si fa ricorso a teoremi generali di ZARISKI [8] per asserire l'esistenza di modelli aritmeticamente normali della varietà di PICARD relativa alla matrice ω .

ANDREOTTI, ritenendo opportuna una costruzione più diretta di modelli aritmeticamente normali delle varietà di PICARD, ha proposto a me di dimostrare che la catena delle sizigie di un ideale di funzioni theta ha lunghezza finita, sfruttando proprietà di tali funzioni.

Per questa via più diretta si ritrova il risultato di ANDREOTTI e si determina insieme (se ω è a divisori unitari) un certo n_0 tale che i modelli delle varietà di PICARD, immagini proiettive dei sistemi lineari delle varietà di zero delle funzioni theta di ordine $n > n_0$, sono aritmeticamente normali.

2. Basta dimostrare il teorema, che abbiamo in vista, per

l'anello delle funzioni $\Theta(u)$ ($u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$) relative ad una matrice di

RIEMANN $\omega^{(p, 2p)}$ avente tutti i suoi divisori uguali all'unità: $\omega^{(p, 2p)} = (\pi i E \mid A)$ (E matrice unitaria, $A = \|a_{rs}\|$, $a_{rs} = a_{sr}$). Infatti,

se ω non è a divisori unitari, $\omega = (\pi i D^{-1} \mid A)$ ($D = \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_p \end{pmatrix}$;

$\delta_1/\delta_2/\dots/\delta_p$), basta osservare che le funzioni theta dell'anello $\mathfrak{S}[(\pi i D^{-1} \mid A)]$ appartengono anche all'anello $\mathfrak{S}[(\pi i E \mid A)]$ e quindi

verificare che la lunghezza della catena delle sizigie di un ideale di \mathfrak{S} non supera quella del corrispondente ideale di \mathfrak{S} (¹).

La nostra dimostrazione è basata essenzialmente sul seguente lemma:

Ogni funzione theta dell'anello $\mathfrak{S}[(\pi i E | A)]$ di ordine kn , Θ_{kn} , si può esprimere come un polinomio nelle funzioni theta di ordine n , appena n è maggiore di un certo n_0 .

Per un teorema di MUHLY [6], questo lemma ci dice che i modelli della varietà di PICARD relativa alla matrice $(\pi i E | A)$, ottenuti come immagini proiettive dei sistemi lineari delle varietà di zero delle funzioni theta di ordine $n > n_0$, sono aritmeticamente normali.

Di questo lemma daremo due dimostrazioni: la prima, valida soltanto nel caso in cui la matrice ω è a moduli generali, ci dice che $n_0 \leq 4$; la seconda, valida qualunque sia ω , ci dà per n_0 il limite superiore 2^{2^r} .

Sia ω a moduli generali. In questo caso si può seguire con opportune varianti un procedimento seguito da W. WIRTINGER ([7] pag. 12).

Cominciamo dal caso $p=1$. Sia V_1 la curva ellittica (varietà di PICARD ad una dimensione) relativa alla ω ; indichiamo con G_n il gruppo di n punti individuato su V_1 da una funzione theta di ordine n e con $|G_n|$ la serie lineare completa g_n^{n-1} determinata su V_1 dal sistema di tutte le funzioni theta di ordine n .

Consideriamo su V_1 le serie lineari $|G_{n-2}| + G_2^{(1)}$, $|G_{n-2}| + G_2^{(2)}$ ($n > 4$), dove $G_2^{(1)}$ e $G_2^{(2)}$ sono i gruppi di zero di due funzioni theta del secondo ordine, $\Theta_2^{(1)}$ e $\Theta_2^{(2)}$ ($\Theta_2^{(1)} \neq \Theta_2^{(2)}$). Dico che la serie lineare g_n , a cui appartengono tali g_n^{n-3} coincide colla serie lineare completa $|G_n|$: infatti, la dimensione della serie lineare comune alle due g_n^{n-3} è $n-5$ (²). Ne segue che ogni Θ_n ellittica si può esprimere come un polinomio nelle funzioni theta di ordine minore o eguale a quattro (³).

Di qui poi, si deduce facilmente che le Θ_{4m} ellittiche, di ordine multiplo di quattro, si esprimono come polinomi nelle Θ_4 . Verifi-

(¹) Osservazione dovuta ad ANDREOTTI, cfr. [1], pag. 39.

(²) Per il metodo usato nel calcolo della dimensione della serie cui appartengono le due g_n^{n-3} cfr. [2], pag. 366.

(³) Se al posto della $\Theta_2^{(1)}$ si considera la theta del primo ordine si ottiene il risultato più preciso: ogni Θ_n ellittica si può esprimere come un polinomio nelle funzioni theta di ordine minore o eguale a tre. Però, per il seguito, ci è più utile l'enunciato del testo.

chiamo il lemma per induzione, atteso che esso è manifestamente vero per $m = 1$. Per quanto si è detto sopra si ha :

$$\Theta_{4m} = A_1 \Theta_2^{(1)} + A_2 \Theta_2^{(2)}$$

con A_1 e A_2 funzioni theta di ordine $4m - 2 > 4$ e quindi :

$$A_i = \sum_{j=1}^2 A_{ij} \Theta_2^{(j)} \quad (i = 1, 2),$$

cioè :

$$(1) \quad \Theta_{4m} = \sum_{ij} A_{ij} \Theta_2^{(i)} \Theta_2^{(j)},$$

colle A_{ij} funzioni theta di ordine $4(m - 1)$. Per il lemma ammesso, le A_{ij} sono esprimibili per le Θ_4 ; dalla (1) si deduce poi la voluta rappresentazione delle Θ_{4m} per le Θ_4 .

Sia ora $p > 1$. Si faccia tendere con continuità la matrice quadrata $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$ alla forma diagonale $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$ cioè si faccia degenerare la varietà di PICARD, V_p , relativa alla $\omega = (\pi i E | A)$, nella varietà V_p prodotto di p curve ellittiche. Di conseguenza (*) ogni $\Theta_n[u(\pi i E | A)]$ tende al prodotto di p Θ_n ellittiche: $\Theta_n(u_1, u_2, \dots, u_p) \rightarrow \Theta_n(u_1) \Theta(u_2) \dots \Theta_n(u_p)$ e viceversa il prodotto $\prod_i^{1 \dots p} \Theta_n(u_i | a_{ii})$, di p Θ_n ellittiche, relative alle matrici $(\pi i | a_{ii})$, si può sempre considerare come limite di qualche $\Theta_n(u_1, u_2, \dots, u_p)$ appartenente alla matrice $(\pi i E | A)$.

Consideriamo ora p sistemi di $4m \Theta_{4m}$ ellittiche linearmente indipendenti (l. i.), relative alle matrici $(\pi i | a_{11}) \dots (\pi i | a_{pp})$, che scriviamo in un quadro così:

$$(2) \quad \begin{array}{l} \Theta_{4m}^{(1)}(u_1) \dots \Theta_{4m}^{(4m)}(u_1) \\ \Theta_{4m}^{(1)}(u_2) \dots \Theta_{4m}^{(4m)}(u_2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Theta_{4m}^{(1)}(u_p) \dots \Theta_{4m}^{(4m)}(u_p). \end{array}$$

I $(4m)^p$ prodotti :

$$(3) \quad \Theta_{4m}^{(i_1)}(u_1) \dots \Theta_{4m}^{(i_p)}(u_p) \quad (i_1, i_2, \dots, i_p = 1, 2, \dots, 4m)$$

ci danno evidentemente $(4m)^p$ funzioni theta di ordine $4m$, appartenenti alla matrice $(\pi i E | A)$ l. i.; esse si possono considerare come

(4) Cfr. [7], pag. 14 e [3], pag. 248.

limiti di altrettante Θ_{4m} appartenenti alla matrice $(\pi i E | A)$: ancora l. i., perchè $\Theta_{4m} [u(\pi i E | A)]$ linearmente dipendenti non possono diventare l. i. nel passaggio dalla matrice A alla matrice \bar{A} .

Ogni $\Theta_{4m}^{(j)}(u_i)$ ($i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, 4m$) del quadro (2), per il lemma dimostrato nel caso $p = 1$, si può esprimere come un polinomio nelle $\Theta_4(u_i)$. Ne segue che i $(4m)^p$ prodotti (3) risultano in definitiva polinomi nelle funzioni theta del quarto ordine appartenenti alla matrice $(\pi i E | \bar{A})$. Tornando alla matrice $(\pi i E | A)$ è chiaro che si ottengono così $(4m)^p \Theta_{4m}[u(\pi i E | A)]$ l. i. — e quindi tutte le $\Theta_{4m}[u(\pi i E | A)]$ — espresse come polinomi nelle funzioni theta del quarto ordine.

3. Sia ora $\omega^{(p, 2^p)}$ a moduli qualsiasi. Vale il teorema ([5], pag. 406): *Ogni funzione theta dell'anello $\mathfrak{S}(\omega)$ si può rappresentare come un polinomio omogeneo nelle 2^{2p} funzioni theta del primo ordine con caratteristica bipartita.* Indicando con $\mathfrak{S}[\varepsilon^i](u)$ le funzioni theta del primo ordine con caratteristica bipartita, il teorema significa che fra i prodotti

$$(4) \quad \prod_1^n \mathfrak{S}[\varepsilon^i](u)$$

esistono $n^p \Theta_n$ l. i. .

Se $n > 2^{2p}$, certamente nelle espressioni (4) una $\mathfrak{S}[\varepsilon^i](u)$ è ripetuta almeno due volte, ma una $\mathfrak{S}[\varepsilon^i](u)$ è una funzione theta del secondo ordine appartenente all'anello $\mathfrak{S}(\omega)$; quindi ogni funzione theta di ordine $n > 2^{2p}$ si può rappresentare come una somma di prodotti di funzioni theta di ordine $n - 2$ per funzioni theta del secondo ordine: $\Theta_n = \sum \Theta_{n-2}^{(i)} \Theta_2^{(i)}$ ($n > 2^{2p}$).

Di qui, il lemma enunciato in 2 discende ormai senza difficoltà. Si consideri una qualunque funzione theta di ordine multiplo di 2^{2p} , $\Theta_{k \cdot 2^{2p}}$; per quanto si è dimostrato:

$$(5) \quad \Theta_{k \cdot 2^{2p}} = \sum_i A_i \Theta_2^{(i)},$$

dove le A_i sono funzioni theta di ordine $k \cdot 2^{2p} - 2$. Applicando successivamente la proprietà espressa dalle (5) si ottiene:

$$(6) \quad \Theta_{k \cdot 2^{2p}} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_{(2^{2p}-1)}} A_{i_1 i_2 \dots i_{(2^{2p}-1)}} \Theta_2^{(i_1)} \Theta_2^{(i_2)} \dots \Theta_2^{(i_{(2^{2p}-1)})},$$

dove le $A_{i_1 i_2 \dots i_{(2^{2p}-1)}}$ sono funzioni theta di ordine $(k - 1) \cdot 2^{2p}$. Per induzione rispetto a k dalla (6) segue che ogni $\Theta_{k \cdot 2^{2p}}$ si può rappresentare come un polinomio nelle $\Theta_2^{2^{2p}}$.

4. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema che è lo scopo principale di questa Nota.

Le funzioni theta dell'anello $\mathfrak{S}[u(\pi i E | A)]$ di ordine multiplo di n_0 ($n_0 = 4$ oppure $n_0 = 2^{2^p}$ secondo che ω è o no a moduli generali) formano un sottoanello \mathfrak{S}_0 . Dimostriamo che in \mathfrak{S}_0 vale l'algoritmo delle sizigie.

Siano $\Theta_{n_0}^{(1)} \dots \Theta_{n_0}^{(n_0^p)}$ funzioni theta di ordine n_0 l. i., mediante le quali si esprimono tutte le theta dell'anello \mathfrak{S}_0 . Posto $x^i = \Theta_{n_0}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n_0^p$), si consideri l'anello $K[x^1, x^2, \dots, x^{(n_0^p)}]$ dei polinomi omogenei sul corpo K dei numeri complessi e sia I l'ideale primo dei polinomi di $K[x^1, x^2, \dots, x^{(n_0^p)}]$ che si annullano identicamente quando si pone $x^i = \Theta_{n_0}^{(i)}$. Per il lemma dimostrato, $K[x^1, x^2, \dots, x^{(n_0^p)}]/I$ è isomorfo a \mathfrak{S}_0 . Valendo il teorema di HILBERT in $K[x^1, x^2, \dots, x^{(n_0^p)}]/I$ (5) esso vale altresì in $K[x^1, x^2, \dots, x^{(n_0^p)}]/I$, cioè in \mathfrak{S}_0 .

Dopo di che, per giungere alla dimostrazione completa del teorema, si può riprendere il procedimento tenuto da ANDREOTTI in [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ANDREOTTI, *Recherches sur les surfaces irrégulières*, «Mem. de l'Ac. roy. de Belgique» t. XXVII, (1952), pag. 1-56
- [2] G. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi di curve tracciati sopra una superficie algebrica* «Ann. di Mat.», 25 (2), 1897 «Memorie Scelte», Bologna, Zanichelli, (1937), pagg. 361-441.
- [3] F. CONFORTO, *Funzioni abeliane e matrici di RIEMANN*, «Corsi dell'Istituto di Alta Matematica», Ed. Libreria dell'Università di Roma, (1942).
- [4] W. GRÖBNER, *Moderne algebraische Geometrie*, Springer, Wien und Innsbruck (1949).
- [5] A. KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunctionen*, Leipzig, Teubner, (1903).
- [6] H. T. MUHLY, *A remark on normal varieties*, «Ann. of Math.» s. 2, t. 42, (1941), pagg. 921-925.
- [7] W. WIRTINGER, *Untersuchungen über Thetafunctionen*, Leipzig, Teubner, (1895).
- [8] O. ZARISKI, *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties*, «Amer. Jour. of Math.», t. 61, (1939), pagg. 249-294.

(5) Per una dimostrazione assai semplificata del teorema di HILBERT per gli anelli di polinomi su un corpo a condizione massimale, cfr. [4] pagg. 195-196.