Letterio Toscano

Sui polinomi di Jacobi e ultrasferici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 195–201.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_195_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sui polinomi di Jacobi e ultrasferici.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina)

Sunto. - *Si ricava una nuova formula di passaggio dai polinomi di* JACOBI *a quelli ultrasferici, e, con applicazioni, si prova la sua utilità.*

1. È noto che i polinomi ultrasferici

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda,\ n)}{n\,!}\ {}_2F_1\left(-n,\ n+2\lambda;\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right)$$

discendono da quelli di JACOBI

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n\,!}\ {}_2F_1\left(-n,\ n+\alpha+\beta+1;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right)$$

mediante la formula

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda,\ n)}{\left(\lambda+\frac{1}{2},\ n\right)}\, P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\ \lambda-\frac{1}{2}\right)}(x). \tag{1}$$

Con questa un polinomio ultrasferico viene espresso come prodotto di un polinomio di JACOBI per un fattore funzione del solo parametro. Mentre talvolta può necessitare una espressione dello stesso tipo col fattore funzione della sola variabile fondamentale.

In questo secondo ordine di idee presento quì la formula, che non mi risulta nota,

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = e^{in\theta}\, P_n^{(2\lambda-1,\ -n-\lambda)}(z) \tag{2}$$

con

$$z = \frac{\cos\theta - 3i\ \mathrm{sen}\ \theta}{\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta}.$$

E farò vedere che essa ha un ruolo non meno importante della (1), e che può anche condurre a nuovi risultati.

2. In una memoria di E. GOURSAT [1] si trova la seguente formula di trasformazione per funzioni ipergeometriche di GAUSS

[1] E. GOURSAT, *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique*, Annales Éc. Normale supérieure, (2), supplément au. T. 10, (1881), pp. 3-142.

$$ {}_2F_1\left(a,\ b;\ \frac{a+b+1}{2};\ u\right)= $$

$$ =(\sqrt{1-u}+\sqrt{-u})^{-2a}\,{}_2F_1\left[a,\ \frac{a+b}{2};\ a+b;\ \frac{4\sqrt{u(u-1)}}{(\sqrt{1-u}+\sqrt{-u})^2}\right]. $$

Facciamo in essa $a=-n$, $b=n+2\lambda$, $u=\dfrac{1-v}{2}$. Si ha

$$ {}_2F_1\left(-n,\ n+2\lambda;\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{1-v}{2}\right)= $$

$$ =\left(\sqrt{\frac{v+1}{2}}+\sqrt{\frac{v-1}{2}}\right)^{2n}{}_2F_1\left[-n,\ \lambda;\ 2\lambda;\ \frac{4\sqrt{\frac{v+1}{2}\,\frac{v-1}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{v+1}{2}}+\sqrt{\frac{v-1}{2}}\right)^2}\right]. $$

Ancora, con $v=\cos\theta$, segue

$$ {}_2F_1\left(-n,\ n+2\lambda;\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{1-\cos\theta}{2}\right)= $$

$$ =\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)^{2n}{}_2F_1\left[-n,\ \lambda;\ 2\lambda;\ \frac{4i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)^2}\right]= $$

$$ =e^{in\theta}\,{}_2F_1\left(-n,\ \lambda;\ 2\lambda;\ \frac{2\,i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}\right). $$

Poniamo

$$ \frac{1-z}{2}=\frac{2\,i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}, $$

ovvero

$$ z=\frac{\cos\theta-3i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}. $$

Introducendo nell'ultima relazione i polinomi ultrasferici e di JACOBI si ottiene

$$ \frac{n!}{(2\lambda,\ n)}\,P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=e^{in\theta}\,\frac{n!}{(2\lambda,\ n)}\,P_n^{(2\lambda-1,\ -n-\lambda)}(z), $$

e quindi la (2).

Stabilita la (2) si può subito osservare che, sostituendo θ con $-\theta$, alla variabile z si deve sostituire la sua coniugata $\bar{z}$, e che si ha pure

$$ (2')\qquad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=e^{-in\theta}\,P_n^{(2\lambda-1,\ -n-\lambda)}(\bar{z}). $$

Inoltre dalle formule (2) e (2') si deduce, eseguendo il prodotto, l'altra formula degna di nota

$$(3) \qquad [P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2 = P_n^{(2\lambda-1,\, -n-\lambda)}(z)\, P_n^{(2\lambda-1,\, -n-\lambda)}(\bar{z}).$$

3. A provare l'utilità delle (2), (2'), (3) valgono le considerazioni di questo paragrafo e dei successivi.

Come applicando la (1) a sviluppi in serie del tipo

$$\sum_0^\infty{}_n\, a_n t^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

si ottengono i corrispondenti per i polinomi ultrasferici, con analogia — e non meno rapidamente — si possono ottenere gli stessi risultati applicando la (2) o (2') a sviluppi del tipo

$$\sum_0^\infty{}_n\, a_n t^n P_n^{(\alpha,\, \beta-n)}(x).$$

Naturalmente, così facendo, si allarga il campo di applicazioni di tali ultime serie.

Ad esempio consideriamo i due sviluppi ([2])

$$\sum_0^\infty{}_n\, t^n P_n^{(\alpha,\, \beta-n)}(x) = (1-t)^\beta \left(1 - t\,\frac{1+x}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1} \quad |t| < 1,$$

$$\sum_0^\infty{}_n\, \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}\, P_n^{(\alpha,\beta-n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\, e^{t\frac{1+x}{2}}\, {}_1F_1\left(-\beta;\ \alpha+1;\ t\,\frac{1-x}{2}\right).$$

Facciamo in essi $\alpha = 2\lambda - 1$, $\beta = -\lambda$;

$$x = \frac{\cos\theta + 3i \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta} \quad \text{per il primo}$$

e

$$x = \frac{\cos\theta - 3i \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \quad \text{per il secondo.}$$

Dal primo si ha con la (2')

$$\sum_0^\infty{}_n\, t^n e^{in\theta} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = (1-t)^{-\lambda}(1 - te^{2i\theta})^{-\lambda}$$

e, sostituendo t con $te^{-i\theta}$, si conclude

$$\sum_0^\infty{}_n\, t^n P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = (1 - te^{-i\theta})^{-\lambda}(1 - te^{i\theta})^{-\lambda}$$
$$= [1 - t(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + t^2]^{-\lambda} = (1 - 2t\cos\theta + t^2)^{-\lambda}.$$

([2]) E. Feldheim, *Relations entre les polynomes de Jacobi, Laguerre et Hermite*, Acta Mathematica, 75, (1942), pp. 117-138.

Dal secondo segue con la (2)

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{\Gamma(n+2\lambda)} e^{-in\theta} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{1}{\Gamma(2\lambda)} e^{te^{-2i\theta}} {}_1F_1(\lambda; 2\lambda; 2ite^{-i\theta} \operatorname{sen}\theta)$$

e, con $t \equiv te^{i\theta}$,

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{(2\lambda, n)} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = e^{te^{-i\theta}} {}_1F_1(\lambda; 2\lambda; 2it \operatorname{sen}\theta).$$

È poi noto sulle funzioni di BESSEL che

$$J_{\lambda-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-ix} {}_1F_1(\lambda; 2\lambda; 2ix);$$

e risalendo si ritrova l'altro noto risultato

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{(2\lambda, n)} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) e^{t\cos\theta} \left(\frac{t \operatorname{sen}\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} J_{\lambda-\frac{1}{2}}(t \operatorname{sen}\theta).$$

4. Il polinomio di JACOBI che si presenta al secondo membro della (2') si può trasformare con l'applicazione della formula [3]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^n P_n^{(\alpha',\beta)}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

$$\alpha' = -2n - \alpha - \beta - 1.$$

Si ha

$$P_n^{(2\lambda-1,\,-n-\lambda)}(\bar{z}) = \left(\frac{1-\bar{z}}{2}\right)^n P_n^{(-n-\lambda,\,-n-\lambda)}\left(\frac{\bar{z}+3}{\bar{z}-1}\right)$$

$$= (-2i \operatorname{sen}\theta)^n e^{in\theta} P_n^{(-n-\lambda,\,-n-\lambda)}(-i \operatorname{ctg}\theta).$$

Per la (1) segue

$$P_n^{(2\lambda-1,\,-n-\lambda)}(\bar{z}) = \frac{(-n-\lambda+1,\, n)}{(-2n-2\lambda+1,\, n)}(-2i \operatorname{sen}\theta)^n e^{in\theta} P_n^{\left(-n-\lambda+\frac{1}{2}\right)}(-i \operatorname{ctg}\theta).$$

Inoltre

$$(-n-\lambda+1,\, n) = (-1)^n(\lambda,\, n)$$

$$(-2n-2\lambda+1,\, n) = (-1)^n(n+2\lambda,\, n).$$

[3] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, New Jork, (1939), p. 63.

E quindi, con la (2'), si conclude la seguente formula, trovata per altra via e in altra forma da A. ANGELESCO (4),

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{(\lambda,\ n)}{(n+2\lambda,\ n)}(-\,2i\ \mathrm{sen}\ \theta)^n P_n^{\left(-n-\lambda+\frac{1}{2}\right)}(-\,i\ \mathrm{ctg}\ \theta).$$

5. In un lavoro di W. N. BAILEY (5) si trova la formula sul prodotto di due polinomi di JACOBI ad argomenti diversi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(y) = \frac{(-\,1)^n(\alpha+1,\ n)(\beta+1,\ n)}{n\,!}\,\cdot$$

$$\cdot\sum_0^n{}_m \frac{(-\,1)^m(n+\alpha+\beta+1,\ m)}{(\alpha+1,\ m)(\beta+1,\ m)(n-m)\,!}\left(\frac{x+y}{2}\right)^m P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{1+xy}{x+y}\right).$$

Posto $\alpha = 2\lambda - 1$, $\beta = -\,n - \lambda$, $x = z$, $y = \bar{z}$,
da cui $x + y = 2(1 - 4\ \mathrm{sen}^2\theta)$, $xy = 1 + 8\ \mathrm{sen}^2\theta$,
si ha per la (3)

$$[P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2 = \frac{(-\,1)^n(2\lambda,\ n)(-\,n-\lambda+1,\ n)}{n\,!}\,\cdot$$

$$\cdot\sum_0^n{}_m \frac{(-\,1)^m(\lambda,\ m)}{(2\lambda,\ m)(-\,n-\lambda+1,\ m)(n-m)\,!}(1-4\ \mathrm{sen}^2\theta)^m P_m^{(2\lambda-1,\ -n-\lambda)}\left(\frac{1+4\ \mathrm{sen}^2\theta}{1-4\ \mathrm{sen}^2\theta}\right),$$

e semplificando

$$[P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2 = \frac{1}{n\,!}\sum_0^n{}_m \frac{(\lambda,\ m)(\lambda,\ n-m)(2\lambda+m,\ n-m)}{(n-m)\,!}\,\cdot \tag{4}$$

$$\cdot\,(1-4\ \mathrm{sen}^2\theta)^m P_m^{(2\lambda-1,\ -n-\lambda)}\left(\frac{1+4\ \mathrm{sen}^2\theta}{1-4\ \mathrm{sen}^2\theta}\right).$$

Prendendo invece le mosse dallo sviluppo in serie (6)

$${}_2F_1(a,\ b\,;\ c\,;\ x)\,{}_2F_1(a,\ b\,;\ c\,;\ y) = \sum_m^\infty \frac{(a,\ m)(b,\ m)(c-a,\ m)(c-b,\ m)}{(c,\ m)(c,\ 2m)m\,!}(xy)^m\,\cdot$$

$$\cdot\,{}_2F_1(a+m,\ b+m\,;\ c+2m\,;\ x+y-xy),$$

(4) A. ANGELESCO, *Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite*, Thése - Gauthier - Villars, Paris, 1916.

(5) W. N. BAILEY, *On the product of two Legendre polynomials with different arguments*, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), 41, (1936), pp. 215-220.

(6) L. TOSCANO, *Formule di trasformazione e sviluppi sulle funzioni ipergeometriche a due variabili*, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), XXXIII, (1952), pp. 119-134.

con $a = -n$, $b = n + \alpha + \beta + 1$, $c = \alpha + 1$, $x = \frac{1-x}{2}$, $y = \frac{1-y}{2}$, dopo oppurtune semplificazioni si ottiene un' altra formula sul prodotto di due polinomi di JACOBI

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(y) = \frac{(\alpha+1,\, n)}{n\,!} \sum_0^n {}_m \frac{(-1)^m (n+\alpha+\beta+1,\, m)(-n-\beta,\, m)}{(\alpha+1,\, m)\, m\,!} \,.$$

$$\cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)^m \left(\frac{1-y}{2}\right)^m P_{n-m}^{(\alpha+2m,\,\beta)}\left(\frac{xy+x+y-1}{2}\right).$$

In questa facciamo $\alpha = 2\lambda - 1$, $\beta = -n - \lambda$, $x = z$, $y = \bar{z}$, e applichiamo la (3). Si ha

$$[P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2 = \frac{(2\lambda,\, n)}{n\,!} \sum_0^n {}_m \frac{(-1)^m (\lambda,\, m)^2}{(2\lambda,\, m)\, m\,!} (4 \operatorname{sen}^2\theta)^m P_{n-m}^{(2\lambda+2m-1,\, -n-\lambda)}(1).$$

E poichè

$$P_{n-m}^{(2\lambda+2m-1,\, -n-\lambda)}(1) = \frac{(2\lambda+2m,\, n-m)}{(n-m)\,!},$$

si conclude che

(5) $$[P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2 =$$

$$= \frac{1}{n\,!} \sum_0^n {}_m \frac{(-1)^m (\lambda,\, m)^2 (2\lambda+m,\, n-m)(2\lambda+2m,\, n-m)}{m\,!\,(n-m)\,!} 4\,(\operatorname{sen}^2\theta)^m.$$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$ questa ultima si specializza per i polinomi di LEGENDRE.

E poichè

$$\left(\frac{1}{2},\, m\right) = \frac{(2m)\,!}{2^{2m}\, m\,!},$$

$$(m+1,\, n-m) = \frac{n\,!}{m\,!},\quad (2m+1,\, n-m) = \frac{(n+m)\,!}{(2m)\,!},$$

si ottiene

(6) $$[P_n(\cos\theta)]^2 = \sum_0^n {}_m \frac{(-1)^m (2m)\,!\,(n+m)\,!}{(m\,!)^4\,(n-m)\,!} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\right)^{2m}.$$

Le (4), (5), (6) non mi risultano note. Le (5) e (6), per quanto semplici, si possono presentare in altra forma più espressiva, introducendo la funzione ipergeometrica ${}_3F_2$ di CLAUSEN.

Si ha

$$(2\lambda + 2m,\ n - m) = \frac{\Gamma(2\lambda + n + m)}{\Gamma(2\lambda + 2m)} =$$

$$= \frac{(2\lambda,\ n + m)}{(2\lambda,\ 2m)} = \frac{(2\lambda,\ n)(2\lambda + n,\ m)}{2^{2m}(\lambda,\ m)\left(\lambda + \frac{1}{2},\ m\right)},$$

per cui

$$[P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2 = \frac{(2\lambda,\ n)^2}{(n!)^2} \sum_0^n{}_m \frac{(-n,\ m)(n + 2\lambda,\ m)(\lambda,\ m)}{\left(\lambda + \frac{1}{2},\ m\right)(2\lambda,\ m)m!} \operatorname{sen}^{2m}\theta,$$

e in conclusione

$$(5') \qquad [P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2 = \frac{(2\lambda,\ n)^2}{(n!)^2}\ {}_3F_2\left(-n,\ n + 2\lambda,\ \lambda;\ \lambda + \frac{1}{2},\ 2\lambda;\ \operatorname{sen}^2\theta\right).$$

Nel caso particolare dei polinomi di LEGENDRE vale la

$$(6') \qquad [P_n(\cos\theta)]^2 = {}_3F_2\left(-n,\ n + 1,\ \frac{1}{2};\ 1,\ 1;\ \operatorname{sen}^2\theta\right).$$

Le (5), (5'), (6), (6') sono notevoli per la loro semplicità, e potrebbero rivelarsi utili.