Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Carini

Sull'equazione dell'energia nella dinamica del punto a massa variabile.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 224–228.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_224_0>

Sull'equazione dell'energia nella dinamica del punto a massa variabile.

Nota di GIOVANNI CARINI (a Messina)

Sunto. - *Si stabilisce l'equazione dell'energia della dinamica del punto a massa variabile. Quindi, dalla combinazione dell'equazione trovata col principio di relatività, si deduce l'equazione newtoniana nella forma in cui è stata posta da* SOMMERFELD.

1. È stato osservato da vari Autori che l'interpretazione comune della legge seconda del moto sotto la forma — la forza totale è proporzionale all'accelerazione — non corrisponde al pensiero newtoniano.

NEWTON intende per « motus » la « quantitas motus » e quindi la « mutatio motus » non significa « variazione di velocità » bensì « variazione di quantità di moto ».

A questa interpretazione si è giunti certamente sotto l'impulso della dottrina relativistica, in cui la « quantità di moto » dipende dalla velocità anche per il tramite della massa.

Già però nel sec. XIX, alcuni Autori inglesi hanno considerato problemi dinamici in cui la massa è variabile per il fatto che il corpo in moto acquista o perde particelle materiali.

In una Nota lincea del 1928 (1), LEVI-CIVITA ha studiato sistematicamente il problema delle masse variabili ed ha caratterizzato una categoria di casi in cui l'equazione newtoniana assume la forma

$$\text{derivata della quantità di moto} = \text{forza}.$$

In questi casi si può dire che è possibile associare al corpo puntiforme di massa variabile una grandezza, la quantità di moto, il cui differenziale si identifica con Fdt.

Ma nel caso più generale possibile, la legge newtoniana deve essere intesa nel modo seguente:

$$\text{variazione di quantità di moto} = \text{forza} \times dt$$

nel senso che debbono essere considerate le determinazioni della quantità di moto agli istanti $t + dt$ e t.

(1) T. LEVI-CIVITA: *Sul moto di un corpo di massa variabile*, « Rend. Lincei » [6], 1928.

La loro differenza non è in generale il differenziale della quantità di moto, per l'insorgere di quantità di moto, che nascono dall'addizione o sottrazione improvvise di particelle materiali.

Ciò è stato messo sostanzialmente in evidenza dal LEVI-CIVITA, ma il SOMMERFELD nella sua «Meccanica», vol. I delle Vorlesungen über theoretische Physik, ha illuminato le riflessioni generali con acconci esempi, la cui importanza non può sfuggire ad alcuno.

Fin dal 1897 ([2]) è stata messa in rilievo la circostanza che l'equazione dinamica newtoniana è deducibile dalla combinazione del principio dell'energia e del principio di relatività.

In questa Nota mi propongo di stabilire l'equazione dell'energia nella forma più generale, dalla quale, per combinazione col principio di relatività, si deduce l'equazione newtoniana nella forma che trovasi in SOMMERFELD:

$$\frac{d(mv)}{dt} - \dot{m}V = F \tag{1}$$

dove al primo membro, accanto alla derivata temporale dell'impulso del punto P, m, figura il rapporto a dt dell'impulso dmV (impulso convettivo) della particella dm, che si aggiunge o si sottrae alla massa m. Le velocità v e V sono valutate rispetto allo stesso sistema inerziale di riferimento S.

2. Si supponga che, in ogni tempuscolo da t a $t + dt$, alla massa m del punto mobile P, si aggiunga la massa elementare $d\mu$.

Se v e V sono le velocità di P e di $d\mu$, l'energia cinetica all'istante t (prima dell'urto) è

$$T_1 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} d\mu V^2. \tag{2}$$

L'energia cinetica relativa all'istante $t + dt$, cioè

$$\frac{1}{2}(m + d\mu)(v + dv)^2$$

si ottiene da T_1 dopo aver tenuto conto:

a) della variazione dell'energia dovuta al lavoro $d\Omega$ della forza totale agente sul punto P, m (il lavoro della forza agente su $d\mu$ è di ordine superiore);

([2]) J. R. SCHÜTZ, *Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie*, Göttinger Nachrichten, 1897.

b) della perdita di energia $-\Delta T$ dovuta all'urto (Teorema di CARNOT).

Si ha dunque

$$\frac{1}{2}(m + d\mu)(v + dv)^2 = T_1 + d\Omega - \Delta T. \tag{3}$$

Poichè, in virtù del Teorema di CARNOT, è

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(dv)^2 + \frac{1}{2}d\mu(V - v - dv)^2$$

la (3), per la (2), diventa

$$m(dv)^2 + mv \cdot dv + d\mu(v + dv)^2 - d\mu V(v + dv) = d\Omega. \tag{3'}$$

Se si trascurano i termini di ordine superiore al primo in dv e si indica con dT la variazione di energia cinetica a massa costante, cioè $dT = mv \cdot dv$ dalla (3') si deduce

$$dT + d\mu v \cdot (v - V) = d\Omega \tag{4}$$

che è l'equazione dell'energia nel caso in cui la massa del punto mobile aumenta. La (4) si può dedurre facilmente anche dall'equazione di SOMMERFELD e cioè da

$$d\mu v + mdv - d\mu V = Fdt \tag{1'}$$

dopo aver moltiplicato scalarmente ambo i membri della (1') per v.

3. Supponiamo ora che durante il moto, il punto materiale P, m espella dei corpuscoli.

In tal caso la $\dot{m}$ che interviene nell'equazione (1) è una quantità negativa e se poniamo $\dot{m} = -\dot{\mu}$ con $\dot{\mu} > 0$, la (1) si muta in

$$-d\mu v + mdv + d\mu V = Fdt.$$

Nell'istante t, l'energia cinetica del punto materiale è

$$\frac{1}{2}mv^2.$$

Se nel tempuscolo da t a $t + dt$ il punto materiale espelle la particella $d\mu$, l'energia cinetica relativa all'istante $t + dt$ è

$$\frac{1}{2}(m - d\mu)(v + dv)^2 + \frac{1}{2}d\mu V^2.$$

Se teniamo conto del guadagno di energia cinetica, che è

$$\frac{1}{2}(m - d\mu)(dv)^2 + \frac{1}{2}d\mu(v - V)^2,$$

il bilancio energetico sarà espresso dalla seguente equazione

$$\frac{1}{2}(m - d\mu)(v + dv)^2 + \frac{1}{2}d\mu V^2 = \frac{1}{2}mv^2 + d\Omega + \frac{1}{2}(m - d\mu)(dv)^2 + \frac{1}{2}d\mu(v - V)^2$$

da cui si deduce (trascurando i termini di ordine superiore al primo in dv)

$$dT - d\mu v \cdot (v - V) = d\Omega$$

che è l'equazione dell'energia nel caso della diminuzione di massa.

Anche la (6) si ottiene dalla (5) dopo aver moltiplicato scalarmente ambo i membri per v.

Se a $d\mu$ si sostituisce $-dm$, la (6) assume la forma (4).

Concludiamo pertanto, che l'equazione dell'energia nella dinamica del punto a massa variabile è

$$dT + dmv \cdot (v - V) = d\Omega. \tag{7}$$

Il segno di dm discrimina il caso in cui la massa aumenta da quello in cui invece diminuisce.

Nel caso particolare in cui gli elementi di massa che si aggiungono o si sottraggono hanno velocità nulla, cioè $V = 0$, l'equazione del moto assume la forma

$$\frac{d(mv)}{dt} = F$$

l'equazione dell'energia corrispondente è

$$dT + dmv^2 = d\Omega. \tag{8}$$

Se $V = v$, nonostante che la massa sia variabile, l'equazione del moto ha la forma

$$ma = F,$$

mentre l'equazione dell'energia assume la forma classica

$$dT = d\Omega.$$

4. Allo scopo di dedurre dall'equazione dell'energia e dal principio di relatività, l'equazione fondamentale (1), consideriamo, accanto al sistema inerziale di riferimento S, il sistema S', mobile rispetto ad S di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità w.

Per il principio di relatività galileiana l'equazione dell'energia rispetto al sistema S' è:

$$dT' + dmv' \cdot (v' - V') = F' \cdot v'dt \tag{9}$$

dove le grandezze accentate si riferiscono al sistema S'.

Essendo

$$v = v' + w, \qquad V = V' + w, \qquad F = F',$$

dalla (9) si deduce

$$mvdv + dmv \cdot (v - V) - Fvdt - w \cdot [d(mv) - dmV - Fdt] = 0.$$

Per la (7) quest'ultima diventa

$$w \cdot [d(mv) - dmV - Fdt] = 0.$$

Per l'arbitrarietà di w, dev'essere

$$d(mv) - dmV = Fdt$$

che è l'equazione (1) di Sommerfeld.