Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Sviluppo di alcuni polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati e relazioni tra essi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 233–238.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_233_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sviluppo di alcuni polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati e relazioni tra essi.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - *È contenuto nella breve introduzione che segue.*

In alcune Note precedenti ([1]) abbiamo studiato dei polinomi, indicati con $H^{n,p}(x)$, $P^{\alpha,n,p}(x)$, $A^{\nu,n,p}(x)$ che generalizzano rispettivamente i polinomi d'HERMITE, di LAGUERRE, gli ultrasferici ed i corrispondenti polinomi associati.

Qui determiniamo gli sviluppi di alcuni di tali polinomi e stabiliamo delle relazioni tra essi ([2]).

§ 1° - Sviluppi dei polinomi $H^{n,p}(x)$ e $P^{\alpha,n}(x)$.

1. Se poniamo

$$(1_1)\qquad G_n(x) = \sum_{r=0}^{\nu} a_{n,r} x^{n-2r}, \qquad \nu = \left[\frac{n}{2}\right],$$

$$(2_1)\qquad H_n(x) = \sum_{j=0}^{\nu} b_{n,j} x^{n-2j}, \qquad \text{»} \quad ,$$

in cui $G_n(x)$ è il polinomio associato a quello d'HERMITE, $H_n(x)$, (per il quale è $\dfrac{dH_n(x)}{dx} = nH_{n-1}(x)$) e

$$b_{n,j} = \frac{(-1)^j n!}{2^j j!\,(n-2j)!},$$

sostituendo nella ([3])

$$(3_1)\qquad G_n'(x) = H_{n+1}(x) - G_{n+1}(x),$$

([1]) *Polinomi più generali di altri classici e dei loro associati, e relazioni tra essi. Funzioni di seconda specie,* « Riv. Mat. Univ. Parma », 4, (1953), pp. 363-386.

([2]) Per altre relazioni tra i polinomi associati Cfr. G. PALAMÀ, *Relazioni tra i polinomi associati alle funzioni di* LAGUERRE *e di* HERMITE, « Boll. Un. Mat. It. », 3, 9, (1954), pp. 64-66; L. TOSCANO, *Polinomi associati a polinomi classici,* « Riv. Mat. Univ. Parma », 4, (1953), pp. 387-402, ed i Lavori ivi citati.

([3]) Cfr. L. TOSCANO, c. in ([2]) e G. PALAMÀ, *Integrali generali delle equazioni differenziali cui soddisfano polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati,* « Boll. Un. Mat. It. », 3, 10, (1955), fasc. 2°, ove la formula del testo è generalizzata.

$\left(\text{ove } G_n'(x) \equiv \dfrac{dG_n(x)}{dx}\right)$ al posto di $G_k(x)$, $H_{n+1}(x)$ i loro sviluppi dati dalle (1_1), (2_1) ed annullando poi il coefficiente di x^{n+1-2j}, si trae

$$(n-2j+2)a_{n,j-1} = b_{n+1,j} - a_{n+1,j}\,,$$

a mezzo della quale, tenendo presente che $a_{m,0}=1$, si ricava subito

$$a_{n,m} = (-1)^m m!\binom{n-m}{m}\sum_{r=0}^{m} 2^{r-m}\binom{n-r}{n-m}\,,$$

che dà la formula (4)

$$G_n(x) = \sum_{m=0}^{\nu}\sum_{r=0}^{m}(-1)^m m!\,2^{r-m}\binom{n-m}{m}\binom{n-r}{n-m}x^{n-2m}\,,\qquad \nu = \left[\frac{n}{2}\right].$$

2. Procedendo in modo analogo, si perviene alla formula

$$H^{2,p}(x) = \sum_{m=0}^{\nu}\sum_{r_1=0}^{m}\sum_{r_2=0}^{m-r}(-1)^m 2^{r_1+r_2-m} m!\binom{p-m}{m}\binom{p-r_1-r_2}{p-m}x^{p-2m}\,,$$
$$\nu = \left[\frac{n}{2}\right],$$

che, posto

$$l_m = r_1 + r_2 + \ldots + r_m,$$

si generalizza nella

$$H^{n,p}(x) = \sum_{m=0}^{\nu}\sum_{r_1=0}^{m}\sum_{r_2=0}^{m-l_1}\ldots\sum_{r_n=0}^{m-l_{n-1}}(-1)^m 2^{l_n-m} m!\binom{p-m}{m}\binom{p-l_n}{p-m}x^{p-2m}\,,$$
$$\nu = \left[\frac{n}{2}\right],$$

che può scriversi

$$H^{n,p}(x) = \sum_{r=0}^{\nu}\sum_{r_1=0}^{r}\sum_{r_2=0}^{r_1}\ldots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}(-1)^r 2^{-r_n}\binom{p-r}{r}\binom{p-r+r_n}{r_n}x^{p-2r}\,,$$
$$\nu = \left[\frac{n}{2}\right],$$

La dimostrazione di quest'ultima, con il metodo d'induzione completa, si ottiene con il procedimento con cui si passa dallo sviluppo di $H^{1,p}(x) \equiv G_p(x)$ a quello di $H^{2,p}(x)$, salvo qualche irrilevante cambiamento di simboli.

(4) A tale formula perviene in maniera differente L. TOSCANO, nel *l. c.* in (2).

(5) G. PALAMÀ, *c.* in (3).

3. Alla formula seguente, che dà lo sviluppo del polinomio $P^{\alpha,n}(x)$ associato a quello di LAGUERRE, da noi stabilita altrove [6]

$$(1_3)\qquad n!\,P^{\alpha,n}(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(-1)^j\binom{k+j}{j}\frac{(n+j)!\,\Gamma(\alpha+j+k+1)}{(k+2j+1)!\,\Gamma(\alpha+j+1)}x^j,$$

può darsi altra forma. Difatti scritta la (1_3) nel seguente modo

$$n!\,P^{\alpha,n}(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(-1)^j\binom{n-k-1}{j}\frac{(n+j)!\,\Gamma(\alpha+n-k)}{(n+j-k)!\,\Gamma(\alpha+j+1)}x^j,$$

da essa si ricava subito quest'altra

$$\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n)}P^{\alpha,n}(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j\binom{n-1}{j}x^j}{\Gamma(\alpha+j+1)}\sum_{k=0}^{n-j-1}\frac{(-n+j+1,k)(-n-j,k)}{(-n+1,k)(-\alpha-n+1,k}1^k$$

ossia

$$(2_3)\qquad \frac{n!}{\Gamma(\alpha+n)}P^{\alpha,n}(x)=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j\binom{n-1}{j}x^j}{\Gamma(\alpha+j+1}\,{}_3F_2(-n+j+1,\,-n-j,\,1;\,-n+1,\,-\alpha-n+1;\,1).$$

4. In particolare si ha, per $\alpha=-n$, la semplice formuletta che segue

$$(1_4)\qquad nP^{-n,n}(x)=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-x)^r}{r!}$$

che può dimostrarsi anche con il metodo d'induzione completa a mezzo della

$$\alpha(\alpha+1)P^{\alpha+1,n-1}(x)-\alpha(\alpha-x)P^{\alpha,n}(x)+(n+1)xP^{\alpha-1,n+1}(x)=$$
$$=(\alpha+x)L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)-(\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x).$$

Dalla (1_4) si ha

$$\lim_{n\to\infty} nP^{-n,n}(x)=e^{-x}.$$

5. Se si pone

$$(1_5)\qquad G_n(x)=\sum_{j=0}^{\nu}c_{n,j}H_{n-2j}(x),\qquad \nu=[n/2],$$

[6] G. PALAMÀ, *Relazioni integrali tra le funzioni d'*HERMITE *e di* LAGUERRE *di prima e di seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati*, « Riv. Mat. Univ. Parma », 4, (1953), pp. 105-122.

Dalla (2_1) segue per $n=1$ la (1_1) e per $k=1$, $n=0$ altra formula data da L. TOSCANO [11].

2. Analoga alla (2_1) è la seguente formula anch'essa assai generale

$$(1_2) \qquad \lim_{\nu \to \infty} [(2\nu)^{-p/2} A^{k+\nu, n, p}(x/\sqrt{2\nu})] = \frac{n!}{(n+p)!} H^{n,p}(x),$$

in cui non compare l'unità immaginaria, che si dimostra al solito modo e dalla quale per $n=1$, $n=0$ ricaviamo rispettivamente

$$(2_2) \qquad \lim_{\nu \to \infty} [(2\nu)^{-p/2} A^{k+\nu, p+1}(x/\sqrt{2\nu})] = \frac{1}{(p+1)!} G_p(x),$$

$$(3_2) \qquad \lim_{\nu \to \infty} [(2\nu)^{-p/2} P_p^{(k+\nu)}(x/\sqrt{2\nu})] = \frac{1}{p!} H_p(x),$$

ove $P_n^{(\alpha)}(x)$ è il polinomio ultrasferico.

Entrambe le (2_2), (3_2) possono dedursi facilmente da altre note [12].

3. In un recente Lavoro [13] abbiamo dimostrata la seguente formula

$$\lim_{s \to \infty} \left[\frac{1}{\Gamma(s)} \Gamma(s+n-1) s^{-\frac{1}{2}(p+2n-2)} A^{s/2, n, p}(x/\sqrt{s})\right] = \frac{n!}{(n+p)!} H^{n,p}(x)$$

([11]) Cfr. L. TOSCANO, c. in ([2]), p. 394.

([12]) La (2_2) del testo si desume dalla

$$\lim_{a \to \infty} \frac{A^{a-n, 2n+1}(x/\sqrt{a})}{(a-n, n)} = \frac{2^n}{(2n+1)!} G_{2n}(x\sqrt{2}),$$

dopo avervi cambiato a in $a+k+n$, e dall'analoga relativa a $G_{2n+1}(x\sqrt{2})$ del l. c. in ([1]).

La (2_3) del testo segue invece dalla

$$\lim_{a \to \infty} \frac{P_{2n}^{(a-n)}(x/\sqrt{a})}{(a-n, n)} = \frac{2^n}{(2n)!} H_{2n}(x\sqrt{2})$$

e dall'altra dello stesso tipo, in cui appare $H_{2n-1}(x\sqrt{2})$, della Nota: *Contributo alla ricerca di relazioni fra classici polinomi*, « Riv. Mat. Univ. Parma », **2**, (1951), pp. 383-402. La formula particolare che segue dalla (2_2) del testo per $k=0$, si trova in L. TOSCANO, *Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche*, « Boll. Un. Mat. It. », **3**, 9, (1954), pp. 29-38, e nel *l. c.* in ([1]).

([13]) Cfr. *l. c.* in ([1]).

e si deriva, tenendo presente la (3_1), è facile ricavare la formula seguente [7]

$$(2_5) \qquad G_n(x) = \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{n-j}{j} j\,!\, H_{n-2j}(x), \qquad \nu = [n/2].$$

La (2_5) consente di ottenere subito varie formule integrali quale ad es. la seguente

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} G_n^2(x) dx = \sqrt{2\pi} \sum_{s=0}^{\nu} \frac{[(n-s)\,!]^2}{(n-2s)\,!}, \qquad \nu = [n/2],$$

analoga ad altra stabilita da L. TOSCANO [8], in cui però compare l'unità immaginaria.

Se poi si tien presente che [9]

$$H^{2,p}(x) = x G_{p+1}(x) - H_{p+2}(x)$$

e la (2_5), si ha subito la seguente formula analoga alla stessa (1_5)

$$H^{2,p}(x) = -H_{p+2}(x) + \sum_{r=0}^{\mu} (-1)^r \binom{p+1-r}{r} r\,!\, x H_{p+1-2r}(x), \quad \mu = [(p+1)/2].$$

§ 2° - Relazioni tra polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati.

1. Si dimostra subito con il metodo d'induzione completa la seguente formula

$$(1_1) \qquad \lim_{\nu \to \infty} [(-2\nu)^{-p/2} A^{k-\nu, p+1}(x/\sqrt{2\nu})] = \frac{1}{(p+1)\,!}\, G_p(ix), \qquad i = \sqrt{-1},$$

ove $A^{k-\nu, p+1}(x)$ sono i polinomi associati agli ultrasferici, e k è numero reale qualsiasi, ed anche la formula più generale

$$(2_1) \qquad \lim_{\nu \to \infty} [-2\nu)^{-p/2} A^{k-\nu, n, p}(x/\sqrt{2\nu})] = \frac{n\,!}{(p+n)\,!}\, H^{n,p}(ix), \quad i = \sqrt{-1},$$

in cui i polinomi $A^{k-\nu, n, p}(x)$ generalizzano sia gli ultrasferici $(n=0)$, che i loro associati $(n=1)$ [10].

(7) Cfr. L. TOSCANO, *Carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli di* HERMITE, « Boll. Un. Mat. It. », 3, 9, (1954), pp. 146-150.

(8) Cfr. L. TOSCANO, *c.* in (2).

(9) La formula del testo si deduce come caso particolare da una formula che si trova nel *l. c.* in (1).

(10) Cfr. *l. c.* in (1).

che però, posto $s = 2\nu$, si può scrivere più semplicemente

$$(1_3) \qquad \lim_{\nu \to \infty} [(2\nu)^{-p/2} A^{\nu,n,p}(x/\sqrt{2\nu})] = \frac{n!}{(p+n)!} H^{n,p}(x),$$

essendo

$$(2_3) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{\Gamma(2\nu + n - 1)}{\Gamma(2\nu)(2\nu)^{n-1}} = 1.$$

Ora anche la (1_3) è un caso particolare della (1_2) dalla quale segue per $k = 0$.

4. Altrove è stata data la formula seguente [14]

$$(1_4) \qquad \lim_{h \to 0} \left[h^{p-1} P^{h^{-2}+k,p}\left(\frac{x}{h} + \frac{1}{h^2}\right)\right] = \frac{(-1)^{p-1}}{p!} G_{p-1}(x),$$

in cui con $P^{\nu,n}(x)$ abbiamo indicati i polinomi associati a quelli di LAGUERRE.

Se nella (1_4) mutiamo h in $-1/\sqrt{\alpha}$, abbiamo [15]

$$(2_4) \qquad \lim_{\alpha \to \infty} [\alpha^{-(p-1)/2} P^{\alpha+k,p}(\alpha - x\sqrt{\alpha})] = \frac{1}{p!} G_{p-1}(x).$$

Ora la (1_4) è stata da noi generalizzata nella seguente [16]

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{\Gamma(h^{-2} + k + n)}{\Gamma(h^{-2} + k + 1)} h^{p+2n-2} P^{h^{-2}+k,n,p}\left(\frac{x}{h} + \frac{1}{h^2}\right)\right] = \frac{(-1)^{pn}\, n!}{(p+n)!} H^{n,p}(x),$$

cui, se poniamo $h = -1/\sqrt{\alpha}$ e teniamo presente la (2_3), può darsi la forma più semplice

$$(3_4) \qquad \lim_{\alpha \to \infty} [\alpha^{-p/2} P^{\alpha+k,n,p}(\alpha - x\sqrt{\alpha})] = \frac{n!}{(p+n)!} H^{n,p}(x).$$

Dalla (3_4) per $n = 1$ ed $n = 0$ seguono rispettivamente la (2_4) (se mutiamo in essa p in $p+1$) ed un' altra cui si riduce, con le trasformazioni indicate in alto, altra nota formula [17].

(14) Cfr. G. PALAMÀ, *Relazioni tra i polinomi* ecc. c. in (2).

(15) La (2_4) del testo per $k = 0$ è data da L. TOSCANO nel *l. c.* in (12). Si badi che i nostri polinomi $P^{\alpha,n}(x)$ sono indicati da L. TOSCANO con $F^{(\alpha)}_{n-1}(x)$.

(16) Cfr. *l. c.* in (1).

(17) G. PALAMÀ, *Sulla soluzione polinomiale della* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$, « Boll. Un. Mat. It. », 2, 1, (1939), pp. 27-35; L. TOSCANO, *Formule limiti sui polinomi di* LAGUERRE, « Idem », idem, pp. 337-339.