Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Su una formula limite tra funzioni ipergeometriche di Kummer e funzioni del cilindro parabolico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 239–243.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_239_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Su una formula limite tra funzioni ipergeometriche di Kummer e funzioni del cilindro parabolico.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si generalizza una formula limite tra funzioni ipergeometriche di* KUMMER *e funzioni del cilindro parabolico, e si prova la sua utilità.*

1. In una precedente nota ([1]) ho fra l'altro completato un risultato di E. FELDHEIM, dimostrando che tra funzioni ipergeometriche di Kummer e funzioni del cilindro parabolico vale la formula limite

$$(1) \qquad \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\Gamma(\alpha + h + \nu + 1)}{\alpha^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\alpha + h + 1)} {}_1F_1(-\nu\,;\ \alpha + h + 1\,;\ \alpha - x\sqrt{\alpha}) = e^{\frac{x^2}{4}} D_\nu(x)$$

con ν e h qualsiasi, e

$$D_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} 2^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} x\, {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right).$$

Per le applicazioni questa formula si presta — e bene — solo quando si opera su funzioni ipergeometriche dello stesso argomento. Mentre, anche per un più vasto campo di applicazioni, riuscirebbe utile insieme alla (1) la conoscenza di altre formule più generali, per potere operare su relazioni con funzioni ipergeometriche di argomenti diversi.

A questo proposito aggiungo qui la formula

$$(2) \quad \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\Gamma(\alpha + h + \nu + 1)}{\alpha^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\alpha + h + 1)} {}_1F_1\left(-\nu\,;\ \alpha + h + 1\,;\ \alpha \frac{\sqrt{\alpha} - x}{\sqrt{\alpha} - t}\right) = e^{\frac{(x-t)^2}{4}} D_\nu(x - t)$$

con ν e h qualsiasi, che si riduce alla (1) per $t = 0$.

([1]) L. TOSCANO, *Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche*, Boll. Un. Mat. Ital., (III), IX, (1954), pp. 29-38.

2. Alla (2) si perviene facilmente seguendo la mia precedente nota per la (1). L'argomento $\alpha - x\sqrt{\alpha}$ viene sostituito con $\alpha\,\dfrac{\sqrt{\alpha} - x}{\sqrt{\alpha} - t}$.

E poichè questo si può scrivere

$$\alpha - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - t} \cdot (x - t)\sqrt{\alpha}\,,$$

si vede in definitiva che la x viene sostituita col prodotto di $x - t$ per il fattore $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - t}$ che al limite per $\alpha \to \infty$ risulta uguale a 1.

Analoghe considerazioni potrebbero condurre ad altre estensioni della (1).

3. Per ν uguale all'intero positivo n si ha, per i polinomi di LAGUERRE e di HERMITE

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha + 1,\ n)}{n\,!}\ {}_1F_1(-n\,;\ \alpha + 1\,;\ x)$$

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n(2n)\,!}{2^n\,n\,!}\ {}_1F_1\left(-n\,;\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right)$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n(2n+1)\,!}{2^n\,n\,!}\ x\ {}_1F_1\left(-n\,;\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

la formula

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-\frac{n}{2}} L_n^{(\alpha+h)}\left(\alpha\,\frac{\sqrt{\alpha} - x}{\sqrt{\alpha} - t}\right) = \frac{1}{n\,!}\,H_n(x - t)\,. \tag{3}$$

Essa potrebbe pure provarsi direttamente e per via elementare, ricorrendo a note rappresentazioni dei polinomi di LAGUERRE e di HERMITE con i determinanti, o considerandola nota per $t = 0$ e applicando la formula di moltiplicazione per i polinomi di LAGUERRE.

Se ν è uguale all'intero negativo $-n-1$, introducendo le funzioni di HERMITE di seconda specie

$$h_{2n}(x) = (-2)^n n\,!\ x\ {}_1F_1\left(-n + \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right)$$

$$h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}2^n n\,!\ {}_1F_1\left(-n - \frac{1}{2};\ \frac{1}{2},\ \frac{x^2}{2}\right)$$

e osservando che

$$D_{-n-1}(ix) = \frac{(-1)^{\frac{3}{2}(n+1)}}{n!} e^{-\frac{x^2}{4}}\left[h_n(x) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,H_n(x)\right],$$

si ha la formula

$$\text{(4)}\qquad \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-\frac{n+1}{2}}\,{}_1F_1\left(n+1;\ -\alpha+h+1;\ -\alpha\frac{\sqrt{\alpha}-x}{\sqrt{\alpha}-t}\right) =$$
$$= \frac{1}{n!} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\left[h_n(x-t) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,H_n(x-t)\right].$$

La quale, con le funzioni di LAGUERRE di seconda specie

$$l_n^{(\alpha)}(x) = -\Gamma(\alpha)x^{-\alpha}\,{}_1F_1(-\alpha-n;\ 1-\alpha;\ x),$$

si può presentare nella forma

$$\text{(5)}\qquad \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\alpha\frac{\sqrt{\alpha}-x}{\sqrt{\alpha}-t}\right)^{\alpha} e^{-\alpha\frac{\sqrt{\alpha}-x}{\sqrt{\alpha}-t}}\, l_n^{(\alpha)}\left(\alpha\frac{\sqrt{\alpha}-x}{\sqrt{\alpha}-t}\right) =$$
$$= \frac{-1}{n!} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\left[h_n(x-t) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,H_n(x-t)\right].$$

4. Ai polinomi di HERMITE e di LAGUERRE sono associati i polinomi $G_n(x)$, $F_n^{(\alpha)}(x)$ con le relazioni

$$h_n(x) = H_n(x)h_0(x) - e^{\frac{x^2}{2}}G_{n-1}(x)$$
$$l_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x)l_0^{(\alpha)}(x) + \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}e^{x}F_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

E vale la formula

$$\text{(6)}\qquad \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-\frac{n}{2}}F_n^{(\alpha)}\left(\alpha\frac{\sqrt{\alpha}-x}{\sqrt{\alpha}-t}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\,G_n(x-t).$$

Per i polinomi ([2])

$$g_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha}e^{x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^{\alpha}e^{-x}$$

([2]) L. TOSCANO, *Una classe di polinomi della Matematica attuariale*, Rivista di Matematica della Università di Parma, I, (1950), pp. 459-470.

si ha analogamente

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-\frac{n}{2}} g_n^{(\alpha)}\left(\alpha \frac{\sqrt{\alpha} - x}{\sqrt{\alpha} - t}\right) = H_n(x - t). \tag{7}$$

5. Proviamo infine l'utilità della nuova formula limite proprio in quel caso che mi ha indotto a dimostrarla.

Sia

$$u = x + tu$$

con x reale positivo e $|t| < 1$.

Consideriamo lo sviluppo di LAGRANGE

$$f(u) = f(x) + \sum_1^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\varphi^n(x) f'(x)]$$

per $\varphi(u) = u$ e $f(u) = \int u^\alpha e^{-u} l_0^{(\alpha)}(u) du$.

Si ha

$$\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$= u^\alpha e^{-u} l_0^{(\alpha)} \cdot \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-\alpha-1} x^\alpha e^{-\frac{x}{1-t}} l_0^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-t}\right).$$

D'altra parte

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x} l_0^{(\alpha)}(x)].$$

Allora dalla derivata rispetto a x dello sviluppo di LAGRANGE si deduce

$$\sum_0^\infty {}_n t^n l_n^{(\alpha)}(x) = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{tx}{1-t}} l_0^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-t}\right) \qquad |t| < 1. \tag{8}$$

Ciò fissato, poniamo $x \equiv \alpha - x\sqrt{\alpha}$, $t \equiv \frac{t}{\sqrt{\alpha}}$. Dal precedente sviluppo si ha

$$\sum_0^\infty {}_n t^n \cdot \frac{\alpha^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} (\alpha - x\sqrt{\alpha})^\alpha e^{-\alpha + x\sqrt{\alpha}} l_n^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha}) =$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - t} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\alpha \frac{\sqrt{\alpha} - x}{\sqrt{\alpha} - t}\right)^\alpha e^{-\alpha \frac{\sqrt{\alpha} - x}{\sqrt{\alpha} - t}} l_0^{(\alpha)}\left(\alpha \frac{\sqrt{\alpha} - x}{\sqrt{\alpha} - t}\right).$$

Passando al limite per $\alpha \to \infty$ con la (5) segue

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} h_n(x) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} H_n(x) =$$

$$= e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \left[h_0(x-t) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right],$$

da cui

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} h_n(x) = e^{tx - \frac{t^2}{2}} h_0(x-t). \tag{9}$$

Lo sviluppo (8) non mi risulta noto, il (9) è stato già da me trovato per altra via ([3]).

([3]) L. Toscano, *Polinomi associati a polinomi classici*, Rivista di Matematica della Università di Parma, 4, (1953), pp. 387-402.