Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Aymerich

Una proprietà dell'energia elastica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.3, p. 332–336.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_3_332_0>

Una proprietà dell'energia elastica.

Nota di GIUSEPPE AYMERICH (a Cagliari)

Sunto. - *Vedi il n. 1.*

1. Consideriamo un corpo elastico C, non soggetto a forze di massa, in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze superficiali esterne: supponiamo che queste forze siano applicate su di una parte del contorno di C, diciamola σ, mentre la parte rimanente sia scarica.

Consideriamo poi un altro corpo C_1, la cui superficie abbia una parte Σ che possa combaciare con una parte scarica del contorno di C; si ottiene così un nuovo corpo elastico $C' = C + C_1$.

In una nota del 1937, intesa a dare una dimostrazione del principio di S. VENANT, O. ZANABONI (1) ha dimostrato, tra l'altro, che se si lasciano invariate le forze esterne l'energia di deformazione di C' è *minore* di quella di C.

In questo lavoro dimostriamo che sussiste la seguente altra proprietà, in un certo senso parallela alla precedente: « *Se, nelle modalità sopra indicate, il corpo elastico* C *si accresce di materia per diventare un altro corpo* C', *mentre vengono mantenuti invaviati gli spostamenti nella parte* σ *del contorno di* C, *la energia di deformazione che compete a* C' *è maggiore di quella che compete a* C ».

Ci siamo serviti per ottenere questo risultato del calcolo vettoriale omografico ed abbiamo poi voluto ritrovare per questa via, che ci sembra più semplice, il teorema di ZANABONI. Abbiamo infine mostrato, con qualche esempio, come entrambe le due proprietà possano applicarsi per ottenere delle limitazioni dell'energia elastica.

2. Diciamo s lo spostamento elastico del generico punto di C sotto l'azione del primitivo sistema di forze esterne (F), $\alpha = \dfrac{ds}{dP}$ l'omografia di deformazione e β quella dei corrispondenti sforzi interni. L'energia elastica di C è

$$L = \frac{1}{2}\int_C I_1(\beta\alpha)dC.$$

(1) O. ZANABONI, *Dimostrazione generale del principio del De Saint Venant*, Rend. Acc. Lincei Roma, 1937, p. 117.

Per mantenere invariati gli spostamenti nella parte σ del contorno di C quando il corpo si accresce di materia, occorrerà generalmente aggiungere alle forze $(\boldsymbol{F})$ un altro sistema $(\boldsymbol{F}_1)$, pure equilibrato in σ. Detti $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}_1$ lo spostamento del generico punto di C', $\alpha' = \alpha + \alpha_1$ e $\beta' = \beta + \beta_1$ le corrispondenti omografie delle deformazioni e degli sforzi, poichè in C_1 si ha ovviamente

$$I_1(\beta'\alpha') = I_1(\beta_1\alpha_1)$$

l'energia elastica di C' sarà espressa da

$$L' = \frac{1}{2}\int_C I_1(\beta'\alpha')dC + \frac{1}{2}\int_{C_1} I_1(\beta_1\alpha_1)dC_1 . \tag{1}$$

D'altra parte, osservato che per la legge di HOOKE

$$I_1(\beta\alpha_1) = I_1(\beta_1\alpha)$$

si può scrivere

$$\frac{1}{2}\int_C I_1(\beta'\alpha')dC = \frac{1}{2}\int_C I_1(\beta\alpha)dC + \int_C I_1(\beta\alpha_1)dC + \frac{1}{2}\int_C I_1(\beta_1\alpha_1)dC \tag{2}$$

Avendo supposte trascurabili le forze di massa, detto $\boldsymbol{n}$ il versore della normale alla superficie di C rivolta verso l'esterno, per una nota formula risulta

$$\int_C I_1(\beta\alpha_1)dC = \int_\sigma \beta\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{n}d\sigma + \int_\Sigma \beta\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{n}d\Sigma \tag{3}$$

da cui, tenendo presente che, per ipotesi su σ è $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'$ ossia $\boldsymbol{s} = 0$ e che su Σ è $\beta\boldsymbol{n} = 0$, segue

$$\int_C I_1(\beta\alpha_1)dC = 0.$$

Dalla (2) si trae pertanto

$$\frac{1}{2}\int_C I_1(\beta'\alpha')dC = L + \int_C I_1(\beta_1\alpha_1)dC$$

e la (1) diventa

$$L' = L + \frac{1}{2}\int_C I_1(\beta_1\alpha_1)dC + \frac{1}{2}\int_{C_1} I_1(\beta_1\alpha_1)dC \tag{4}$$

la quale dimostra l'asserto, poichè gli ultimi due integrali sono essenzialmente positivi.

Osservazione. - Poichè

$$\int\limits_C I_1(\beta_1\alpha_1)dC + \int\limits_{C_1} I_1(\beta_1\alpha_1)dC_1 = \int\limits_{C'} I_1(\beta_1\alpha_1)dC'$$

la (4) mostra che « *l'energia elastica di* C' *è data dall'energia elastica primitiva di* C *aumentata di quella che spetterebbe a* C' *qualora questo fosse soggetto alle sole forze aggiunte* ($\mathbf{F}_1$) ».

3. La (2) può anche scriversi

$$(2') \qquad \frac{1}{2}\int\limits_C I_1(\beta'\alpha')dC = \frac{1}{2}\int\limits_C I_1(\beta\alpha)dC + \int\limits_C I_1(\beta_1\alpha)dC + \frac{1}{2}\int\limits_C I_1(\beta_1\alpha_1)dC$$

la quale, con ovvio nuovo significato di β_1 ed α_1, vale anche nell'ipotesi di Zanaboni, in cui cioè su σ restano invariate le forze. In tal caso risulta $\beta_1 \boldsymbol{n}$ nullo su σ e continuo attraverso Σ, poichè tale è $\beta'\boldsymbol{n}$ mentre $\beta\boldsymbol{n}$ è nullo su tutt'e e due le faccie di Σ. Indicando allora con Σ' e Σ'' tali facce, rivolte rispettivamente verso C e verso C_1, in luogo della (3) si può scrivere

$$\int\limits_C I_1(\beta_1\alpha)dC = \int\limits_{\Sigma'} \beta_1\boldsymbol{n} \times s d\Sigma' = \int\limits_{\Sigma''} \beta_1\boldsymbol{n} \times s' d\Sigma - \int\limits_{\Sigma'} \beta_1\boldsymbol{n} \times s_1 d\Sigma.$$

Poichè su Σ'' si ha $s = 0$ e quindi $s' = s_1$, risulta

$$\int\limits_{\Sigma'} \beta_1\boldsymbol{n} \times s' d\Sigma = -\int\limits_{C_1} I_1(\beta_1\alpha_1)dC_1$$

onde la precedente può scriversi

$$\int\limits_C I_1(\beta_1\alpha)dC = -\int\limits_{C_1} I_1(\beta_1\alpha_1)dC_1 - \int\limits_C I_1(\beta_1\alpha_1)dC,$$

e la (1), tenendo conto della (2)', fornisce

$$L' = L - \frac{1}{2}\int\limits_{C'} I_1(\beta_1\alpha_1)dC',$$

la quale esprime il risultato di Zanaboni. Essa mostra che « *l'energia elastica di* C' *è eguale a quella primitiva di* C *diminuita dell'energia elastica che spetterebbe a* C' *nella deformazione prodotta dai soli sforzi che si trasmettono i due corpi* C *e* C_1 ».

4. Le due proprietà sopra indicate possono riuscire utili per ottenere delle limitazioni dell'energia elastica di C' quando si sappia calcolare quella di C o viceversa. Ad es. per un trave di sezione variabile come mostra la fig. 1, soggetta a trazione mediante forze applicate sulle due basi, si ottiene facilmente un limite superiore od inferiore sostituendo ad essa una cilindrica

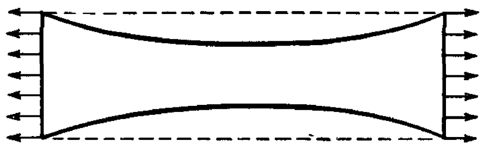

Fig. 1

con le stesse basi, a seconda che su queste siano assegnate le forze o gli spostamenti.

Un altro tipo di struttura che si presta ad una interessante applicazione dei teoremi precedenti è data da una piastra forata avente il bordo interno libero e scarico, mentre su quello esterno sono assegnate le forze ovvero gli spostamenti. Per semplicità supponiamo che il bordo esterno sia circolare e le forze siano distribuite uniformemente in direzione radiale, così che il disco sia soggetto a trazione (o compressione) nel proprio piano.

L'energia di deformazione si sa calcolare se il foro è pure circolare, concentrico al bordo esterno od anche eccentrico ([2]); se esso è di forma differente, considerando in luogo di quello effettivo un foro circolare fittizio il cui bordo sia contenuto o contenga quello effettivo ed applicando l'uno o l'altro dei teoremi, si ottengono, *per l'una o per l'altra delle condizioni al contorno, simultaneamente* una limitazione superiore ed una inferiore della energia elastica.

Detto γ il contorno del foro, se il centro O del disco è interno a γ, si potranno considerare i cerchi concentrici di raggi eguali alla minima e massima distanza a_1 ed a_2 ($a_1 < a_2$) di O dai punti di γ; ad es. se il foro è ellittico con centro in O si avranno i cerchi di raggi eguali ai due semiassi. Ora, nel caso del foro circolare concentrico, se b è il raggio del bordo esterno, a quello del bordo interno e p la pressione, le componenti degli sforzi in coordinate polare sono

$$\sigma_r = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_\theta = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \qquad \tau_{r\theta} = 0,$$

e per l'energia elastica si ottiene

$$V = \frac{\pi p^2 b^2}{3E}\left(-2m + \frac{2a^2 + (3 - m)b^2}{b^2 - a^2}\right) \tag{5}$$

essendo E ed m i moduli di YOUNG e di POISSON.

([2]) v. TIMOSHENKO, *Théorie de l'élasticité*, Paris, 1936, p. 59.

Pertanto se p è mantenuta costante, indicata con L' la energia elastica della piastra con foro non circolare si ha, per il teorema di ZANABONI

$$V_2 < L' < V_1$$

essendo V_1 e V_2 i valori che si ottengono ponendo a_1 e a_2 in luogo di a nella (5).

Se si mettono in evidenza gli spostamenti periferici ossia l'al-

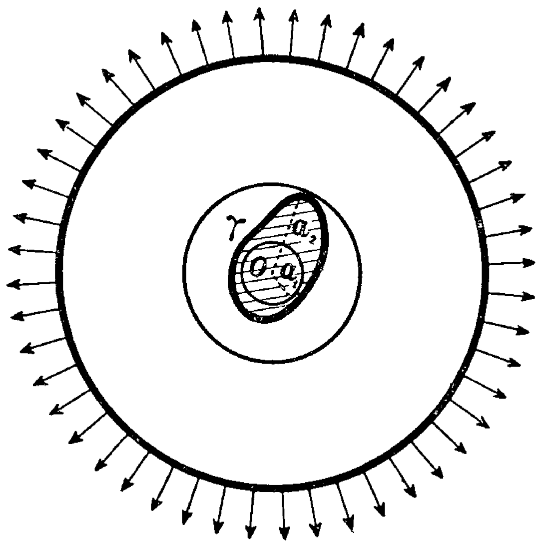

Fig. 2

lungamento δ del raggio del bordo esterno nel caso del foro circolare in luogo della (5) si ha

$$V = 2\pi E\delta^2 \frac{2a^2(1+m)+3b^2(1-m)}{[(1+m)a^2+(1-m)b^2]^2}(b^2-a^2), \tag{6}$$

e se δ vieno mantenuto costante per il teorema da noi dato risulta

$$V_1 < L' < V_2,$$

essendo adesso V_1 e V_2 i valori che assume l'espressione (6) per $a = a_1,\ a_2$.

In modo analogo, salvo maggiori difficoltà di calcolo, si può procedere sotto ipotesi meno semplici per gli sforzi e le deformazioni, ad es. quando sotto forte pressione la piastra si inflette, nel qual caso la conoscenza di valori approssimati per eccesso e per difetto della energia elastica è particolarmente importante per accertare la stabilità della struttura (³).

(³) v. TIMOSHENKO, *Theory of elastic Stability*, New York, 1936, cap. VII.