BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO VAONA

Sulla deformazione proiettiva debole di uno strato di quadriche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.3, p. 337–348.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_3_337_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sulla deformazione proiettiva debole di uno strato di quadriche.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna)

Sunto. - *Si veda il n. 1.*

1. Introduzione.

Ricordo che, secondo la definizione posta dal ČECH [1], una trasformazione puntuale T fra due spazi proiettivi S_3, $\overline{S}_3$ è una *deformazione o applicabilità proietti a* di uno strato Σ di superficie [2] di S_3 in uno strato $\overline{\Sigma}$ di superficie di S_3 quando, per ogni coppia P, $\overline{P}$ di punti corrispondenti, esiste una omografia K, tangente a T in P, $\overline{P}$, che muta la superficie F di Σ passante per P in una superficie KF avente in $\overline{P}$ un contatto analitico del 2° ordine con la superficie $\overline{F}$ omologa di F in T.

Queste corrispondenze sono state studiate dal ČECH [3] e da me [4] sia nello spazio ordinario come anche negli spazi a più dimensioni.

È evidente che una deformazione proiettiva di uno strato subordina fra superficie corrispondenti una ordinaria applicabilità proiettiva nel senso di FUBINI e che non è vero il viceversa. La condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione T sia una deformazione proiettiva di uno strato Σ è che le direzioni tangenti alle superficie di Σ siano caratteristiche per T.

(1) Si veda: E. ČECH, *Deformazione proiettiva di strati d'ipersuperficie*, « Atti del Convegno Internazionale di Geometria differenziale. Italia 1953 », Perrella, Roma (1954), pp. 266-273. Si vedano anche i lavori di E. ČECH: *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*. Mém. I, II, III, IV, V, VI, VII, « Časopis pro pěst. matem. a fys. », 74, pp. 32-48 (1949); 75, pp. 123-136 (1950); 75, pp. 137-157 (1950); 77, pp. 149-166 (1952); 77, pp. 167-188 (1952); 77, pp. 297-331 (1952); 78, pp. 123-137 (1953).

(2) Dicesi *strato di superficie* una famiglia ∞^1 tale che per ogni punto di una certa regione passi una superficie della famiglia ed una sola.

(3) Si vedano i lavori cit. in (1).

(4) Si veda: G. VAONA, *Le trasformazioni fra due spazi che posseggono iperpiani di rette caratteristiche*, « Rend. Sem. Mat. di Torino », 12, pp. 195-238 (1953); G. VAONA, *Deformazione proiettiva di uno strato di superficie dello spazio ardinario*, « Atti Sem. Mat e Fis. di Modena » (1955).

Recentemente il prof Čech mi ha proposto di occuparmi di un nuovo tipo di deformazioni proiettive di strati (*deformazioni deboli o in senso debole*) che si possono definire nel seguente modo:

« Una trasformazione puntuale T fra due spazi proiettivi S_3, $\bar{S}_3$ si dice che è una *deformazione proiettiva debole* (o *in senso debole*) di uno strato Σ di superficie di S_3 in un strato $\bar{\Sigma}$ di superficie di $\bar{S}_3$ quando subordina fra superficie corrispondenti dei due strati un'ordinaria applicabilità proiettiva (in particolare un'omografia) e le giaciture piane tangenti alle superficie di Σ, $\bar{\Sigma}$ sono giaciture caratteristiche » ([5]).

La presente Nota è dedicata allo studio delle deformazioni deboli di strati di superficie limitatamente agli strati di quadriche.

Posto analiticamente il problema mediante un'opportuna rappresentazione della trasformazione con equazioni differenziali a derivate parziali (n. 2), si considerano le deformazioni proiettive che inducono fra superficie corrispondenti un'applicabilità proiettiva (non omografia), limitatamente al caso in cui le superficie degli strati siano quadriche. Si dimostra che gli strati di quadriche proiettivamente deformabili sono particolari e dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile (n. 3). Si stabilisce una caratterizzazione geometrica di tali strati (n. 4) e se ne indica una costruzione geometrica (n. 5). Fra gli strati di quadriche proiettivamente deformabili si incontrano quelli costituiti dalle quadriche appartenenti alle congruenze W a falde focali rigate, diffusamente studiate da C. Segre ([6]), da J. Klapka ([7]) e da altri Autori.

Si studiano infine le deformazioni degli strati di quadriche (n. 6), osservando, fra l'altro, che, dati due qualunque strati di quadriche proiettivamente deformabili, esistono infinite trasformazioni che deformano l'uno nell'altro e queste dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile.

([5]) Per la nozione di *giacitura caratteristica* si veda: L. Muracchini, *Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), 7, pp. 123-131 (1952). Condizione necessaria e sufficiente affinché una giacitura piana sia caratteristica è che essa possegga almeno tre direzioni caratteristiche.

([6]) Si veda: C. Segre, *Le congruenze rettilinee* W *aderenti a due superficie rigate*, « Atti Acc. Scienze di Torino », 42, pp. 539-550 (1907); C. Segre, *Congruenze rettilinee* W *di cui una od ambe le falde focali sono rigate*, « Atti Acc. Scienze di Torino », 49, pp. 291-303 (1913).

([7]) J. Klapka, *Sur les congruences* W *dont les surfaces focales sont réglées*, « Publ. de l'Univ. Masaryk », čis 69 (1926).

Nel corso del lavoro vengono impiegati spesso procedimenti e risultati stabiliti nel 2° dei miei lavori citati nella nota (4). Rimanderò quindi sovente a detto lavoro che verrà indicato con la lettera D seguita dal n. a cui la citazione si riferisce.

2. Posizione analitica del problema.

Fra gli spazi proiettivi $S_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\bar{S}_3(y_1, y_2, y_3, y_4)$ consideriamo la trasformazione T rappresentata dai due sistemi di equazioni differenziali completamente integrabili

$$x^{ij} = a_{ij}^{(0)}x + a_{ij}^{(1)}x^1 + a_{ij}^{(2)}x^2 + a_{ij}^{(3)}x^3 \tag{1}$$

$$y^{ij} = b_{ij}^{(0)}y + b_{ij}^{(1)}y^1 + b_{ij}^{(2)}y^2 + b_{ij}^{(3)}y^3 \qquad (i,\, j = 1,\, 2,\, 3), \tag{1'}$$

dove le incognite x e y e le $a_{ij}^{(s)}$, $b_{ij}^{(s)}$ sono funzioni analitiche delle tre variabili u_1, u_2, u_3 e gli indici in alto delle x e y indicano derivazioni rispetto a tali variabili [D, n. 3].

Posto $c_{ij}^{(s)} = a_{ij}^{(s)} - b_{ij}^{(s)}$, le *direzioni caratteristiche* di T sono rappresentate dal sistema delle equazioni ottenute annullando i minori del 2° ordine estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} du_1 & du_2 & du_3 \\ \sum\limits_{ij} c_{ij}^{(1)} du_i du_j & \sum\limits_{ij} c_{ij}^{(2)} du_i du_j & \sum\limits_{ij} c_{ij}^{(3)} du_i du_j \end{matrix} \right\| . \tag{2}$$

Supponiamo di aver scelto i parametri u_1, u_2, u_3 in modo che le superficie (non sviluppabili) dei due strati siano le superficie $u_3 =$ cost. e le loro curve asintotiche siano le linee coordinate $u_1 =$ cost., $u_3 =$ cost.; $u_2 =$ cost., $u_3 =$ cost..

Affinché T *sia una deformazione proiettiva debole dei due strati considerati dovranno essere soddisfatte le condizioni*

$$\begin{gathered} a_{11}^{(3)} = a_{22}^{(3)} = b_{11}^{(3)} = b_{22}^{(3)} = 0 \\ a_{11}^{(2)} = b_{11}^{(2)} \quad , \quad a_{22}^{(1)} = b_{22}^{(1)} \\ a_{12}^{(3)} = b_{12}^{(3)} \neq 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Fissando inoltre nei due spazi i fattori di proporzionalità delle coordinate alla maniera di WILCZYNSKI [D, n. 4], si avrà

$$a_{11}^{(1)} = a_{22}^{(2)} = 0 \quad , \quad b_{11}^{(1)} = b_{22}^{(2)} = 0. \tag{4}$$

Con evidente cambiamento delle notazioni, le prime tre equazioni dei sistemi (1), (1') si scrivono rispettivamente

$$(5)\quad \begin{aligned} x^{11} &= \beta x^2 + px \\ x^{22} &= \gamma x^1 + qx \\ x^{12} &= ax^1 + bx^2 + cx^3 + rx \end{aligned} \qquad (5')\quad \begin{aligned} y^{11} &= \beta y^2 + \bar{p}y \\ y^{22} &= \gamma y^1 + \bar{q}y \\ y^{12} &= \bar{a}y^1 + \bar{b}y^2 + cy^3 + \bar{r}y, \quad c \neq 0. \end{aligned}$$

Le rimanenti equazioni (1), (1') si ricavano dalle (5), (5') mediante derivazioni opportune, in guisa che la trasformazione T è rappresentata dalle sole equazioni (5), (5') [D, n. 5].

3. Le deformazioni deboli di strati di quadriche. Strati di quadriche proiettivamente deformabili.

Supponiamo che le superficie dei due strati siano quadriche ($\beta = \gamma = 0$) e che la deformazione subordini fra quadriche corrispondenti un'applicabilità proiettiva che non si riduca ad una omografia (8).

La trasformazione sarà rappresentata dai due sistemi

$$(6)\quad \begin{aligned} x^{11} &= px \\ x^{22} &= qx \\ x^{12} &= ax^1 + bx^2 + cx^3 + rx \end{aligned} \qquad (6')\quad \begin{aligned} y^{11} &= \bar{p}y \\ y^{22} &= \bar{q}y \\ y^{12} &= \bar{a}y^1 + \bar{b}y^2 + cy^3 + ry, \end{aligned}$$

dove $c \neq 0$ e non si ha contemporaneamente $p = \bar{p}$, $q = \bar{q}$.

Derivando opportunamente le (6) si ottengono le rimanenti equazioni differenziali (1) e per i loro coefficienti si hanno le espressioni [D, n. 5]

$$(7)\quad \begin{aligned} ca_{13}^{(1)} &= -ab - a^1 - r \\ ca_{13}^{(2)} &= -bb - b^1 + p \\ ca_{13}^{(3)} &= -bc - c^1 \\ ca_{13}^{(0)} &= -ap - br + p^2 - r^1 \end{aligned} \qquad (8)\quad \begin{aligned} ca_{23}^{(1)} &= -aa - a^2 + q \\ ca_{23}^{(2)} &= -ab - b^2 - r \\ ca_{23}^{(3)} &= -ac - c^2 \\ ca_{23}^{(0)} &= -bq - ar + q^1 - r^2 \end{aligned}$$

(8) La corrispondenza subordinata può ridursi ad una omografia. Tale caso va studiato a parte.

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
ca_{33}^{(1)} &= -\, ba_{23}^{(1)} + a_{13}^{(3)} a_{23}^{(1)} + \frac{\partial a_{13}^{(1)}}{\partial u_2} - a^3 \\
ca_{33}^{(2)} &= -\, aa_{13}^{(2)} + a_{13}^{(3)} a_{23}^{(2)} - ba_{23}^{(2)} + ba_{13}^{(1)} + a_{13}^{(0)} + \frac{\partial a_{13}^{(2)}}{\partial u_2} - b^3 \\
ca_{33}^{(3)} &= -\, aa_{13}^{(4)} + ca_{13}^{(1)} - ba_{23}^{(3)} + a_{13}^{(3)} a_{23}^{(3)} + \frac{\partial a_{13}^{(3)}}{\partial u_2} - r - c^3 \\
ca_{33}^{(0)} &= -\, aa_{13}^{(0)} - ba_{23}^{(0)} + a_{13}^{(3)} a_{23}^{(0)} + ra_{13}^{(1)} + qa_{13}^{(2)} + \frac{\partial a_{13}^{(0)}}{\partial u_2} - r^3 .
\end{aligned}
$$

Analogamente i coefficienti delle rimanenti equazioni (1′) sono dati dalle formule che si ottengono dalle precedenti sostituendo p, q, a, b, r con $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{r}$ rispettivamante. Nel seguito indicheremo queste formule con in numeri (7′), (8′), (9′).

Le condizioni di integrabilità del sistema (6) si scrivono [*D*, n. 5]

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
c(2ab^1 + a^{11} + 2r^1) &= 2c^1(ab + a^1 + r) \\
c(2bb^1 + b^{11} - p^1) &= 2c^1(bb + b^1 - p) \\
2ccb^1 &= 2cc^1 b + 2c^1 c^1 - cc^{11} \\
c(2a^1 p + ap^1 + 2rb^1 + cp^3 + r^{11}) &= 2c^1(ap + br + r^1),
\end{aligned}
$$

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
c(2aa^2 + a^{22} - q^2) &= 2c^2(aa + a^2 - q) \\
c(2ba^2 + b^{22} + 2r^2) &= 2c^2(ab + b^2 + r) \\
2cca^2 &= 2cc^2 a + 2c^2 c^2 - cc^{22} \\
c(2b^2 q + bq^2 + 2ra^2 + cq^3 + r^{22}) &= 2c^2(bq + ar + r^2),
\end{aligned}
$$

$$
(12) \qquad p^2 = 0, \qquad q^1 = 0.
$$

Le condizioni di integrabilità del sistema (6′), che indicheremo con (10′), (11′), (12′), si ottengono dalle precedenti sostituendo p, q, a, b, r con $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{r}$ rispettivamente.

Sottraendo membro a membro le (10_2), $(10_2')$; le (10_3), $(10_4')$; le (11_1), $(11_1')$ e le (11_3), $(11_3')$ si hanno le relazioni

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
c(a-\bar{a})^2 &= c^2(a-\bar{a}), \qquad c(b-\bar{b})^1 = c^1(b-\bar{b}) \\
c(q-\bar{q})^2 &= c^2(q-\bar{q}), \qquad c(p-\bar{p})^1 = c^1(p-\bar{p}).
\end{aligned}
$$

Avendo riguardo alle (12), (12′), poichè non si ha contemporaneamente $p = \bar{p}$ e $q = \bar{q}$, dalle (13) segue

$$
(14) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \log c = 0.
$$

Si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinché lo strato di quadriche di equazioni (6) *sia proiettivamente deformabile in senso debole è che sia soddisfatta la* (14).

La necessità della condizione è già stata sopra verificata; dimostriamo quindi la sufficienza.

Supposta vera la (14), operiamo sui sistemi (6), (6′) le trasformazioni

$$x = \rho(u_1, u_2, u_3)\bar{x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad , \quad y = \rho(u_1, u_2, u_3)\bar{y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$
$$\tau_1 = \tau_1(u_1, u_3) \quad , \quad \tau_2 = \tau_2(u_2, u_3) \quad , \quad \tau_3 = \tau_3(u_3), \tag{15}$$

dove la funzione ρ è integrale del sistema completamente integrabile

$$2\rho^1\tau_1{}^1 + \rho\tau_1{}^{11} = 0 \quad , \quad 2\rho^2\tau_2{}^2 + \rho\tau_2{}^{22} = 0. \tag{16}$$

Dette trasformazioni non alterano le particolarità di cui godono i sistemi. Il coefficiente c^*, trasformato di c, è dato da

$$c^* = \frac{c\tau_3{}'}{\tau_1{}^1\tau_2{}^2}; \tag{17}$$

e, poiché per la (14) c è il prodotto di una funzione delle variabili u_1, u_3 per una funzione delle variabili u_2, u_3, scegliendo opportunamente le funzioni τ_1, τ_2, τ_3 si può rendere

$$c^* = 1. \tag{18}$$

Indicando con le stesse lettere i coefficienti e le funzioni incognite dei sistemi trasformati, le condizioni di integrabilità (10), (11), (12) si scrivono

$$p^1 = p^2 = 0,\ q^1 = q^2 = 0,\ b^1 = 0,\ a^2 = 0,\ 2r^1 + a^{11} = 0,\ 2r^2 + b^{22} = 0 \tag{19}$$

$$4pa^1 + 2p^3 - a^{111} = 0,\ 4qb^2 + 2q^3 - b^{222} = 0. \tag{20}$$

Le condizioni di integrabilità (19′), (20′) dell'altro sistema si deducono dalle (19), (20) con la solita sostituzione.

Dalle (19), (20) e (19′), (20′) appare chiaramente come lo strato di equazioni (6), per il quale risulti verificata la (14), ammetta infinite deformazioni dipendenti da funzioni arbitrarie di una variabile.

Si ha inoltre:

Gli strati di quadriche proiettivamente deformabili in senso debole dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile.

Infatti un generico strato di quadriche proiettivamente deformabile in senso debole è rappresentabile con equazioni del tipo

$$
\begin{aligned}
x^{11} &= px \\
x^{22} &= qx \\
x^{12} &= ax^1 + bx^2 + x^3 + rx,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

dove le funzioni p, q, a, b, r soddisfano alle condizioni di integrabilità (19), (20).

Le trasformazioni che non alterano le particolarità del sistema (21) sono del tipo

$$
\begin{gathered}
x = \rho(u_3)\bar{x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \; \tau_1 = f(u_3) + u_1\varphi(u_3), \; \tau_2 = \psi(u_3) + u_2\chi(u_3), \\
\tau_3 = \int \varphi\chi du_3 + k,
\end{gathered}
\tag{22}
$$

dove le funzioni φ e χ sono $\neq 0$ e k è una costante.

Si possono distinguere tre casi:

$a)$ $p \neq 0$, $q \neq 0$;

$b)$ $p = 0$, $q \neq 0$;

$c)$ $p = q = 0$.

Mediante opportune trasformazioni del tipo (22), ci si può ridurre ad avere rispettivamente:

Caso a)

$$p = 1, \; q = 1, \; 2r = -a^1 - b^2, \; 4a = a^{11}, \; 4b = b^{22}; \tag{23}$$

Caso b)

$$p = 0, \; q = 1, \; 2r = -a^1 - b^2, \; a = u_1{}^2F(u_3), \; 4b = b^{22}; \tag{24}$$

Caso c)

$$p = 0, \; q = 0, \; 2r = -a^1 - b^2, \; a = u_1{}^2F(u_3), \; b = u_2{}^2G(u_3), \tag{25}$$

dove F e G sono funzioni arbitrarie di u_3.

Dopo di ciò le trasformazioni del tipo (22), che lasciano inalterate le (23), (24), (25) rispettivamente, dipendono soltanto da costanti arbitrarie. È allora evidente come nei casi a), b), c) lo strato dipenda rispettivamente da quattro, tre, due funzioni arbitrarie di una variabile.

4. Caratterizzazione geometrica degli strati di quadriche proiettivamente deformabili in senso debole.

Nel n. precedente ci siamo occupati dello studio degli strati di quadriche deformabili da un punto di vista analitico. Ci proponiamo ora di attribuire un significato geometrico alle condizioni stabilite.

Le generatrici di ciascuna schiera delle quadriche dello strato costituiscono una congruenza. Le due congruenze sono fra loro intimamente legate nel senso che la conoscenza dell'una individua l'altra. Per la caratterizzazione geometrica degli strati deformabili ci si potrà quindi riferire indifferentemente all'una o all'altra di queste due congruenze.

Si possono distinguere tre casi:

1°) entrambe le due congruenze hanno falde focali degeneri (ridotte a curve):

2°) una almeno delle due congruenze ha una falda focale non degenere e una degenere;

3°) una almeno delle due congruenze ha due superficie focali non degeneri, distinte o coincidenti.

Nel 1°) caso, riferendoci alle equazioni differenziali (21), le superficie focali della congruenza costituita dalle schiere di generatrici $u_2 = \text{cost.}$, $u_3 = \text{cost.}$ sono quelle descritte dal punto z dato da

$$z = \mu x + x^1, \tag{26}$$

dove μ soddisfa alla equazione di 2° grado

$$\mu\mu = p. \tag{27}$$

Affinchè entrambe le falde focali siano degeneri deve aversi

$$a^{11} = 0.$$

Se lo stesso accade della congruenza formata dalle altre schiere di generatrici, si avrà

$$b^{12} = 0.$$

Con opportune trasformazioni del tipo (22) si può fare in modo da avere

$$a = b = r = 0.$$

Dallé condizioni di integrabilità segue poi $p = \text{cost.}$, $q = \text{cost.}$ e quindi lo strato di quadriche è un fascio di uno dei segmenti tipi [*D*, n. 12]:

1$^{\circ}_{a}$) *quadriche passanti per un quadrilatero sghembo;*

1°_b) *quadriche passanti per tre rette* a, b, c, *con* a *e* b *sghembe fra loro ed incidenti a* c, *ed aventi un contatto ordinario del 1° ordine nei punti di* c ;

1°_c) *quadriche passanti per due rette incidenti ed aventi un contatto ordinario del 1° ordine nei punti di queste.*

Si tratta cioè degli strati di quadriche proiettivamente deformabili secondo la 1ª definizione posta dal Čech, ricordata nell'introduzione.

Nel 2° caso, supponiamo che la congruenza $u_2 = \text{cost.}$, $u_3 = \text{cost.}$ abbia una falda focale non degenere ed una degenere (9). Derivando successivamente la (26), si ha che le coordinate del punto z di entrambe le falde focali soddisfano all'equazione

$$z^{22} = qz. \tag{28}$$

La (28) ci assicura che le due falde focali si riducono rispettivamente ad una retta G e ad una superficie rigata H. Le rette della congruenza si ottengono congiungendo ciascun punto P di H con il punto intersezione di G col piano tangente in P ad H. Le schiere rigate sono costituite dalle rette della congruenza che si appoggiano alle generatrici di H.

Nel 3° caso la (28) ci permette di affermare che le due superficie focali sono due superficie rigate G ed H e la corrispondenza determinata dalla congruenza fra i punti di G ed H (essendo omologhi due punti quando sono fuochi di uno stesso raggio) muta le generatrici di G in quelle di H. Una congruenza siffatta è una congruenza W a falde focali rigate (10) di quelle diffusamente studiate da C. Segre ed J. Klapka nei lavori citati nelle note (6) e (7).

Inversamente ogni strato di quadriche per cui la congruenza delle generatrici di una schiera è una congruenza W a falde focali rigate (caso 3°) oppure è una congruenza con una falda focale rigata ed una degenere ridotta ad una retta (caso 2°), è proiettivamente deformabile in senso debole.

(9) In questo caso deve essere necessariamente $p \neq 0$.

(10) Una congruenza a falde focali rigate è W se e solo se fa corrispondere le generatrici delle due rigate (si veda: C. Segre, il 1° dei lav. cit. in (6), pp. 549-550; il 2° dei lav. cit. in (6), p. 297). Ricordo anche che una congruenza W a falde focali rigate subordina fra generatrici corrispondenti una proiettività, di modo che le rette che si appoggiano a due generatrici corrispondenti generano una schiera rigata (si veda: C. Segre, il 1° dei lav. cit. in (6), p. 539).

Consideriamo infatti lo strato di quadriche di equazioni (6) e supponiamo cha la congruenza costituita dalle generatrici $u_2 = \text{cost.}$, $u_3 = \text{cost.}$ soddisfi ad una delle due condizioni precedenti. Le falde focali della congruenza sono quelle descritte dal punto z dato da

$$z = \mu x + x^1, \tag{29}$$

dove μ è soluzione dell'equazione di 2° grado

$$\mu\mu - \frac{c^1}{c}(\mu + b) + b^1 - p = 0. \tag{30}$$

Affinché la congruenza sia dei tipi suddetti occorre che le coordinate del punto z di ciascuna falda focale soddisfino ad una medesima equazione del tipo

$$z^{22} = \rho z + \sigma z^2.$$

Devono pertanto esistere due funzioni ρ e σ tali che

$$\begin{aligned} q &= \rho + \sigma a \\ 2\mu^2 &= \sigma(\mu + b) \\ \mu^{22} + \mu q &= \rho\mu + \sigma(\mu^2 + r) \\ 0 &= \sigma c. \end{aligned}$$

Segue $\sigma = 0$, $\rho = q$, $\mu^2 = 0$. E poiché $\mu = \frac{1}{2}\frac{c^1}{c} \pm D(u_2, u_3)$, si ha la (14), essendo $\mu^2 = 0$.

5. Costruzione geometrica degli strati di quadriche proiettivamente deformabili in senso debole.

Dalle proprietà stabilite nel n. precedente segue che gli strati di quadriche proiettivamente deformabili in senso debole sono *tutti e soli* quelli appartenenti ad uno dei tre tipi:

1°) *fasci di quadriche dei tipi* 1°_a), 1°_b), 1°_c) *descritti al n. precedente;*

2°) *strati formati dalle quadriche passanti per una retta fissa* G *e tangenti ad una superficie rigata* H *lungo le sue generatrici;*

3°) *strati formati dalle quadriche appartenenti ad una congruenza* W *a falde focali rigate.*

Degli strati del 3° tipo è nota una costruzione iperspaziale di C. Segre [11] ottenuta mediante la rappresentazione dello spazio rigato sulla quadrica di Klein dell'S_5.

[11] Si veda: C. Segre, il 1° dei lav. cit. in [6].

Il SEGRE ha dimostrato che « le congruenze W a falde focali rigate sono tutte e sole quelle rappresentate sulla V_4^2 di KLEIN dell' S_5 dalle V_3 luogo delle ∞^1 coniche sezione della V_4 con i piani tangenti ad una rigata sviluppabile dell' S_5 che non sia un cono col vertice sulla V_4 » (12).

Le quadriche dello strato sono quelle rappresentate dalle coniche sezione della V_4 con i piani tangenti alla sviluppabile.

Vanno escluse ovviamente fra le V_3 precedenti quelle ottenute mediante sviluppabili i cui piani tangenti sono anche tangenti alla V_4^2 (13).

Si vede subito che i coni esclusi nel teorema precedente danno luogo agli strati di quadriche del tipo 2°).

6. Deformazioni proiettive deboli di uno strato di quadriche.

Dati due qualunque strati di quadriche proiettivamente deformabili in senso debole, esistono delle trasformazioni puntuali che deformano l'uno nell'altro? E se ciò accade quante e quali sono le trasformazioni che realizzano la deformazione?

Risponde a tali domande il seguente teorema:

Dati due qualunque strati di quadriche proiettivamente deformabili in senso debole esistono infinite trasformazioni che realizzano la deformazione dell'uno nell'altro e queste dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile.

Siano dati infatti i due strati di quadriche rappresentati rispettivamente dalle equazioni

$$(31)\quad \begin{aligned} x^{11} &= px \\ x^{22} &= qx \\ x^{12} &= ax^1 + bx^2 + x^3 + rx \end{aligned} \qquad\qquad (32)\quad \begin{aligned} y^{11} &= \bar{p}y \\ y^{22} &= \bar{q}y \\ y^{12} &= \bar{a}y^1 + \bar{b}y^2 + y^3 + \bar{r}y, \end{aligned}$$

dove x, p, q, a, b, r sono funzioni delle variabili u_1, u_2, u_3 ed $y, \bar{p}, \bar{q}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{r}$ sono funzioni delle variabili τ_1, τ_2, τ_3.

(12) Da tale costruzione risulta confermato che gli strati di quadriche proiettivamente deformabili in senso debole dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile. Infatti da quattro funzioni di una variabile dipende una curva e quindi una sviluppabile dell' S_5.

(13) La congruenza rappresentata da una V_3 siffatta è costituita dalle tangenti ad una rigata nei punti di una sua curva (si veda: C. SEGRE, il 1° dei lav. cit. in (6), p. 544).

Una generica corrispondenza fra i due strati si può rappresentare con le equazioni

$$\tau_1 = \tau_1(u_1\,,\ u_2\,,\ u_3) \quad , \quad \tau_2 = \tau_2(u_1\,,\ u_2\,,\ u_3) \quad , \quad \tau_3 = \tau_3(u_3)\,.$$

Affinché tale corrispondenza sia una deformazione proiettiva è intanto necessario che si corrispondano le generatrici e quindi che le funzioni precedenti siano del tipo

$$\tau_1 = \tau_1(u_1\,,\ u_3) \quad , \quad \tau_2 = \tau_2(u_2\,,\ u_3) \quad , \quad \tau_3 = \tau_3(u_3). \tag{33}$$

Applichiamo alle (31) la trasformazione

$$x = \bar{x}(\tau_1\,,\ \tau_2\,,\ \tau_3)$$

ove τ_1, τ_2, τ_3 sono date dalle (33); in modo che punti corrispondenti si ottengono ora per gli stessi valori dei parametri. Il coefficiente c^* di x^3 nella equazione trasformata della 3ª delle (31) è dato da

$$c^* = \frac{\tau_3{}'}{\tau_1{}^1 \tau_2{}^2}\,.$$

Affinché la trasformazione sia una deformazione proiettiva dell'uno strato nell'altro, occorre e basta (n. 2) che si abbia $c^* = 1$ e quindi che τ_1, τ_2, τ_3 siano del tipo

$$\tau_1 = f(u_3) + u_1\varphi(u_3) \quad , \quad \tau_2 = \psi(u_3) + u_2\chi(u_3) \quad , \quad \tau_3 = \int \varphi\chi\, du_3 + k\,, \tag{34}$$

dove f, φ, ψ, χ sono funzioni arbitrarie ($\varphi\chi \neq 0$) e k è una costante.

Dal teorema dimostrato e dalle proprietà viste nei nn. precedenti segue anche:

I. *Dato uno strato di quadriche proiettivamente deformabile in senso debole esso ammette infinite deformazioni dipendenti da otto funzioni arbitrarie di una variabile.*

II. *Le trasformazioni fra due spazi che sono deformazioni proiettive in senso debole di uno strato di quadriche dipendono da dodici funzioni arbitrarie di una variabile* ([14]).

([14]) Di queste trasformazioni si possono scrivere equazioni parametriche in forma esplicita. Basterà, facendo uso delle costruzioni indicate nel n. 6, scrivere le equazioni parametriche di due strati generici, adoperando parametri diversi per i due strati, e quindi applicare ad un sistema una generica trasformazione di parametri del tipo (34).