BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

E. BAIADA, C. VINTI

Un'applicazione della definizione di integrale per stabilire un passaggio al limite sotto il segno.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 460–464.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_460_0>

Un' applicazione della definizione di integrale per stabilire un passaggio al limite sotto il segno.

Nota di E. BAIADA e C. VINTI (a Palermo)

Sunto. - *Mediante la definizione di integrale di* RIEMANN *si dimostra che le espressioni:*

$$\int_a^b dy \int_{y-d}^{y+d} M(t)dt\,, \quad \int_a^b K(y)dy \int_{y-d}^{y+d} M(t)dt\,;$$

per la prima nelle sole ipotesi che M(t) *sia non negativa ed integrabile, per la seconda nella ipotesi che* K(y) *ed* M(t) *siano a quadrato sommabile, si comportano come un infinitesimo del primo ordine in* d.

In alcune nostre considerazioni circa l'esistenza della soluzione di una equazione alle derivate parziali del primo ordine, ci siamo serviti del comportamento delle espressioni:

$$\int_a^b dy \int_{y-d}^{y+d} M(t)dt\,, \quad \int_a^b K(y)dy \int_{y-d}^{y+d} M(t)dt\,,$$

per la prima nelle ipotesi che $M(t)$ sia una funzione non negativa ed integrabile [1] nell'intervallo $(a - 2d,\ b + 2d)$, per la seconda nelle ipotesi che $K(y)$ ed $M(t)$ siano a quadrato sommabile sull'intervallo $(a - 2d,\ b + 2d)$, e precisamente del fatto che esse si comportano come un infinitesimo del primo ordine in d.

Riferendoci alla prima espressione, è manifesto che, se ci fosse consentito calcolare:

$$\lim_{d \to 0} \int_a^b dy\, \frac{1}{d} \int_{y-d}^{y+d} M(t)dt\,,$$

con un passaggio al limite sotto il segno di integrale, la proposizione sarebbe immediata, ma per fare ciò bisognerebbe usare un teorema

[1] In qualunque senso, per esempio in quello di LEBESGUE, infatti a noi basta che la funzione integrale di $M(t)$ sia additiva e continua.

per il passaggio al limite sotto il segno di integrale ([2]) e un teorema di densità, teoremi, questi, sempre piuttosto elaborati.

Facciamo vedere ([3]) che si può ottenere lo stesso risultato ricorrendo a semplici considerazioni di carattere totalmente elementare.

Osservando che la funzione $\frac{1}{d}\int\limits_{y+d}^{y+d} M(t)dt$, è continua quindi integrabile in (a, b), secondo RIEMANN, basta allora applicare opportunamente la definizione di integrale perchè la proposizione venga subito dimostrata.

1. Supponiamo $d = \frac{b-a}{n}$, dove n sia un intero positivo: in caso contrario sia (a', b') con $a' < a < b < b'$, un intervallo di minima ampiezza tale che $\frac{b'-a'}{n} = d$ (è chiaro che $a - a' < d$ e $b' - b < d$).

Consideriamo suddivisioni di (a', b') in $n.m$ parti uguali dove m sia un intero positivo arbitrario, e scegliamo in ogni intervallo di ciascuna di queste suddivisioni, il valore della funzione integranda uguale per esempio a quello assunto dalla $f(y) = \frac{1}{d}\int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt$ nel primo estremo dell'intervallo stesso.

In seguito a tale scelta, se denotiamo con δ_r un intervallo di ampiezza δ, essendo $\delta = \frac{d}{m}$, per calcolare $\int\limits_{a'}^{b'} dt \, \frac{1}{d}\int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt$, si dovrebbero, tra le altre, calcolare le somme di CAUCHY-RIEMANN seguenti:

$$\sum_{r=1}^{n.m} \delta f r = \frac{b'-a'}{n \cdot m}\left[\frac{1}{d}\int\limits_{a'-d}^{a'+} M(t)dt + \frac{1}{d}\int\limits_{a'-d+\delta}^{a'+d+\delta} M(t)dt + \dots + \frac{1}{d}\int\limits_{a'-d+(m-1)\delta}^{a'+d+(m-1)\delta} M(t)dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{d}\int\limits_{a'}^{a'+2d} M(t)dt + \dots + \frac{1}{d}\int\limits_{a'+d}^{a'+3d} M(t)dt + \dots + \frac{1}{d}\int\limits_{a'+(n-1)d+(m-1)\delta}^{b'+(m-1)\delta} M(t)\,dt \right]; \tag{1}$$

([2]) Nelle ipotesi date per la $M(t)$, nessun teorema usuale di passaggio al limite sotto il segno di integrale può essere applicato.

([3]) Le stesse considerazioni valgono evidentemente per le espressioni:

$$\int\limits_a^b dy \int\limits_y^{y+d} M(t)dt, \quad \text{e} \quad \int\limits_a^b K(y)dt \int\limits_y^{y+d} M(t)dt\,.$$

e, poichè l'integrale esiste, queste somme devono tendere al valore dell'integrale.

Suddividiamo ogni integrale che compare nel secondo membro in $2m$ integrali, ottenuti suddividendo i relativi intervalli di integrazione in $2m$ parti uguali che risulteranno di ampiezza $\delta = \frac{d}{m}$.

Se si osserva allora la somma che così compare nella parentesi quadra, si nota che ogni integrale del tipo

$$\int\limits_{a'+rd+s\delta}^{a'+(r+2)d+s\delta} M(t)dt \qquad (r = -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ s = 1, 2, \ldots, m-1)$$

con un r ed un s fissati, viene a trovarsi ripetuto un certo numero di volte che non supera $2m$. Supponendo di ripetere quegli integrali che non si trovano in tale numero di volte, onde il loro numero arrivi a $2m$, avremo che la quantità in parentesi quadra risulta minore di $2m\frac{1}{d}\int\limits_{a'-d}^{b'+d} M(t)dt$.

Il secondo membro della (1) è allora maggiorato da:

$$\frac{1}{d}\,\frac{b'-a'}{n\cdot m}\,2m\int\limits_{a'-d}^{b'+d} M(t)dt = 2\int\limits_{a'-d}^{b'+d} M(t)dt.$$

Poichè le somme di Riemann $\sum\limits_{r=1}^{n\cdot m} \delta f_r$ tendono all'integrale: $\int\limits_{a'}^{b'} dy\,\frac{1}{d}\int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)\,dt$, avremo:

$$\int\limits_{a}^{b} dy \int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)\,dt \leq \int\limits_{a'}^{b'} dy \int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)\,dt \leq 2d \int\limits_{a-2d}^{b+2d} M(t)dt. \tag{2}$$

Con lo stesso ragionamento si ottiene:

$$\int\limits_{a}^{b} dy \int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)\,dt \geq 2d \int\limits_{a+2d}^{b-2d} M(t)\,dt, \tag{3}$$

basta denotare, nell'ipotesi che non si possa supporre $d = \frac{b-a}{n}$

con (a'', b''), $a < a'' < b'' < b$, un intervallo di massima ampiezza tale che $\dfrac{b''-a''}{n} = d$, e, dopo avere suddiviso ogni integrale che compare a secondo membro della (1) in $2m$ integrali, come fatto precedentemente, trascurare quegli integrali del tipo:

$$\int\limits_{a''+rd+s\delta}^{a''+(r+2)d+s\delta} M(t)dt \quad , \quad (r=-1, 0, 1, \ldots, n-1; \ s=1, 2, \ldots, m-1),$$

che non sono ripetuti $2m$ volte. La somma a secondo membro della (1) viene allora ad essere maggiorata da

$$\frac{1}{d}\,\frac{b''-a''}{n\cdot m}\, 2m \int\limits_{a''+d}^{b''-d} M(t)\,dt.$$

Dalla (2) e (3) segue

$$\lim_{d\to 0} \int\limits_a^b dy\, \frac{1}{d} \int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt = 2\int\limits_a^b M(t)dt. \tag{4}$$

Mediante ulteriori considerazioni che qui omettiamo perchè non hanno carattere così elementare come quelle che precedono, è possibile dimostrare la relazione (4) anche nel caso che $M(t)$ non sia sempre non negativa.

2. Con analogo metodo dimostriamo che:

$$\int\limits_a^b K(y)dy \int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt,$$

supposto $K(y)$ ed $M(t)$ funzioni a quadrato sommabile sull'intervallo $(a-2d, b+2d)$, è maggiorata da un infinitesimo del primo ordine in d.

In virtù della disuguaglianza di SCHWARZ possiamo scrivere:

$$\int\limits_a^b K(y)dy \int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt = d\int\limits_a^b K(y)dy\,\frac{1}{d}\int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt \leq$$

$$\leq d\sqrt{\int\limits_a^b K^2(y)\,dy}\;\sqrt{\int\limits_a^b \frac{1}{d^2}\left[\int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt\right]^2 dy,}$$

e per il calcolo dell'integrale $\int\limits_a^b \frac{1}{d^2}\left[\int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt\right]^2 dy$ procediamo come fatto precedentemente.

Indicando con δ_r un intervallo di ampiezza δ, essendo δ la quantità $\frac{d}{m}$, con f_r il valore della funzione $\frac{1}{d^2}\left[\int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt\right]^2$ nel primo estremo dell'intervallo δ_r, e con a', b' le stesse quantità del numero precedente, si ha:

$$\sum_{=1}^{n\cdot m} \delta f_r = \frac{b'-a'}{n\cdot m}\left\{\frac{1}{d^2}\left[\int\limits_{a'-d}^{a'+d} M(t)dt\right]^2 + \frac{1}{d^2}\left[\int\limits_{a'-d+\delta}^{a'+d+\delta} M(t)dt\right]^2 + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{d^2}\left[\int\limits_{a'+(n-1)d+(m-1)\delta}^{b'+(m-1)\delta} M(t)dt\right]^2\right\},$$

ed applicando ancora la disuguaglianza di SCHWARZ a ciascun termine entro la parentesi graffa, si ottiene:

$$\sum_{r=1}^{n\cdot m} \delta f_r \leq \frac{b'-a'}{n\cdot m}\,\frac{1}{d^2}\left\{2d\int\limits_{a'-d}^{a'+d} M^2(t)dt + 2d\int\limits_{a'-d+\delta}^{a'+d+\delta} M^2(t)dt + \dots + \right.$$

$$\left. + 2d\int\limits_{a'+(n-1)d+(m-1)\delta}^{b'+(m-1,\delta} M^2(t)dt\right\}.$$

Suddividendo ora ciascun integrale che compare a secondo membro di quest'ultima relazione in $2m$ integrali, analogamente a quanto è stato fatto nel numero **1.**, segue:

$$\sum_{r=1}^{m\cdot m} \delta f_r \leq 4\int\limits_{a'-d}^{b'+d} M^2(t)dt \leq 4\int\limits_{a-2d}^{b+2d} M^2(t)dt.$$

In definitiva abbiamo quindi:

$$\int\limits_a^b K(y)dy \int\limits_{y-d}^{y+d} M(t)dt \leq 2d\sqrt{\int\limits_a^b K^2(y)dy}\sqrt{\int\limits_{a-2d}^{b+2d} M^2(t)dt}.$$