Bollettino Unione Matematica Italiana

Bruno Pini

Teoremi di unicità per problemi generalizzanti i problemi biarmonici fondamentali interno ed esterno.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 465–473.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_465_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Teoremi di unicità per problemi generalizzanti i problemi biarmonici fondamentali interno ed esterno.

Nota di Bruno Pini (a Cagliari)

Sunto. - *Si prova l'unicità della soluzione del problema biarmonico fondamentale nel piano, qualora i dati siano funzioni di quadrato sommabile da intendersi raggiunti in media.*

Sia D un dominio piano limitato di contorno esterno C_0 e di contorni interni C_i, $i = 1, 2, \dots, n$; le curve C_0 e C_i siano dotate di tangente e curvatura continue. Indicandone con s_0 ed s_i gli archi, siano

$$(1)\qquad \begin{array}{llll} x = x_0(s_0), & y = y_0(s_0) & 0 \leq s_0 \leq l_0 & \\ x = x_i(s_i), & y = y_i(s_i), & 0 \leq s_i \leq l_i, & i = 1, 2, \dots, n, \end{array}$$

le loro equazioni parametriche riferite agli archi.

Indichiamo poi con $C_{0,t}$ e $C_{i,t}$ le curve

$$(2)\qquad \begin{array}{llll} x = x_0(s_0) - ty_0'(s_0), & y = y_0(s_0) + tx_0'(s_0) & 0 \leq s_0 \leq l_0 & \\ x = x_i(s_i) + ty_i'(s_i), & y = y_i(s_i) - tx_i'(s_i), & 0 \leq s_i \leq l_i, & 0 \leq t \leq h, \\ & & & i = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Nella presente Nota dimostriamo che *se esiste una funzione $u(x, y)$ tale che*

$$(3)\qquad \Delta\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad D - \mathfrak{F}D$$

$$(4)\qquad \lim_{t \to 0+} \sum_{0}^{n}{}_i \int_{C_{i,t}} \left[(u - f_{0,i})^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - f_{1,i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - f_{2,i}\right)^2\right] ds_{i,t} = 0,$$

essendo $f_{0,i}$, $f_{1,i}$, $f_{2,i}$, per $i = 0, 1, 2, \dots, n$, tre funzioni dell'arco s_i di quadrato sommabile su $0 \leq s_i \leq l_i$, essa è necessariamente unica.

Se le funzioni assegnate su $\mathfrak{F}D$ sono la traccia in media quadratica di una funzione $F(x, y)$ dotata delle derivate parziali seconde di quadrato sommabile su D, l'unicità che ci interessa è contenuta in un risultato di S. Sobolev (1).

Prescindendo da tale restrizione, si può anche giungere al risultato desiderato servendosi di certe formule di maggiorazione

(1) S. Sobolev, *Su un problema limite per le equazioni poliarmoniche*, «Mat. Sbornik», 2 (1937) (in russo).

del modulo di una funzione biarmonica [2]; però supponendo il dominio semplicemente connesso e stellato rispetto a un suo punto interno, e ammettendo la conoscenza (almeno da un certo punto di vista qualitativo) della funzione di GREEN relativa al primo problema biarmonico; oppure servendosi di altri ragionamenti [3] che presuppongono la conoscenza della soluzione del primo problema biarmonico.

Nelle righe che seguono, ammettendo di conoscere soltanto la soluzione del problema ordinario per il cerchio e certe proprietà delle funzioni armoniche, la dimostrazione dell'unicità della soluzione per il problema biarmonico generalizzato è conseguita trasportando certi ragionamenti di C. MIRANDA [4] dal caso della convergenza puntuale a quello della convergenza in media.

Tali ragionamenti si prestano anche a provare l'unicità della soluzione per un problema esterno; la condizione all'infinito è di tipo globale e costituisce una naturale estensione di certe condizioni puntuali sotto le quali è stato trattato il problema esterno [5].

1. Nel presente n. 1 supponiamo, per semplicità di notazioni, che D sia semplicemente connesso; i ragionamenti che seguono sussistono però inalterati se D è molteplicemente connesso. La $\mathfrak{F}D$ sia una curva C dotata di tangente e curvatura continue, di cui

$$x = \bar{x}(s), \qquad y = \bar{y}(s), \qquad 0 \leq s \leq l,$$

sia la rappresentazione parametrica rispetto all'arco.

Una corona di altezza h, abbastanza piccola, attorno a C e appartenente a D, è suscettibile della rappresentazione

$$x = \bar{x}(s) - t\bar{y}'(s), \qquad y = \bar{y}(s) + t\bar{x}'(s), \qquad 0 \leq s \leq l, \qquad 0 \leq t \leq h.$$

Chiamiamo C_t la curva corrispondente a un fissato valore di t.

Proviamo che *se u è una funzione biarmonica in $D - C$ tale che*

$$\lim_{t \to 0+} \int_{C_t} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - f_1\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - f_2\right)^2\right] ds_t = 0, \tag{5}$$

[2] L. E. PAYNE ed H. F. WEINBERGER, *New bounds in harmonic and biharmonic problems*, « Journal of Math. and Phys. », XXXIII (1955).

[3] B. PINI, *Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale*. In corso di stampa nei « Rend. Sem. Mat. Padova ».

[4] C. MIRANDA, *Formole di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche in due variabili*, « Giornale di Mat. di BATTAGLINI », 78 (1948-49).

[5] K. SCHRÖDER, *Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung* $\Delta\Delta U = 0$, « Math. Zeit. » 48 (1942-43); in particolare il § 7.

risulta

$$\lim_{t \to 0+} \int_{C_t} | u\Delta u | \, ds_t = 0.$$

A causa delle ipotesi di regolarità fatte su C, esiste un numero positivo R tale che, comunque si prenda un punto $Q(s)$ su C, detto P il punto $\bar{x}(s) - R\bar{y}'(s)$, $\bar{y}(s) + R\bar{x}'(s)$, il cerchio $\mathfrak{D}(P, R)$ di centro P e raggio R appartiene tutto a D e la circonferenza corrispondente $\mathcal{C}(P, R)$ ha il solo punto Q in comune con C.

Essendo Q un arbitrario punto di C, consideriamo il sistema di coordinate polari (ρ, φ) di centro P e asse polare $\overrightarrow{PQ}$.

Fissiamo un numero positivo $r < R$.

Per comodità indichiamo con $\mathcal{C}'(P, r)$ e $\mathcal{C}''(P, r)$ le semicirconferenze appartenenti a $\mathcal{C}(P, r)$ e corrispondenti a $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$.

Sia ora $\bar{Q}$ un punto, fissato una volta tanto, di C; $\bar{T}$ il punto $(r, \bar{\varphi})$ di $\mathcal{C}(\bar{P}, r)$.

Se R ed $R - r$ sono abbastanza piccoli, possiamo ammettere che ogni C_t passante per un punto di $\mathcal{C}'(\bar{P}, r)$ incontri una qualunque $\mathcal{C}'(P, r)$ in un sol punto $A(\varphi, r)$.

Se s è l'ascissa curvilinea di Q su C, sarà $\varphi = \varphi(\bar{\varphi}, s)$; si può supporre che φ sia una funzione crescente di $\bar{\varphi}$ e che esistano due numeri positivi m ed M tali che $m < d\varphi/d\bar{\varphi} < M$ al variare di s da 0 ad l e di r in un intorno sinistro di R; inoltre, per un fissato numero positivo $\sigma < \pi$ il $\min \varphi(\sigma, s)$ si mantenga maggiore di una certa quantità positiva mentre il $\max \varphi(\sigma, s)$ sia infinitesimo insieme a σ, al variare di s e di r nel modo detto sopra.

Possiamo anche supporre che, detta Q' la proiezione ortogonale di A su C (in un intorno di Q), la lunghezza δs dell'arco $\widehat{QQ'}$ di C, fissati comunque r in un intorno sinistro di R e $\bar{\varphi}$ in un intorno dello zero, sia una funzione crescente di s tale che $d\delta s/ds$ sia limitata su $0 \leq s \leq l$.

Ora, posto, per $\rho < r$,

$$\alpha = \rho/r, \qquad l^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi,$$

si ha [6]

$$\Delta u(\rho, 0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} [F'(T) - F'(T_0)] \frac{d}{d\varphi} \left[\lg l^2 - \frac{1 - \alpha^2}{l^2} \right] d\varphi + \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{\pi r} \int_0^{\pi} G(T) \frac{1 - \alpha^2}{l^2} \, d\varphi + \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} [G(T) - G(T_0)] \left[\left(\frac{1 - \alpha^2}{l^2} \right)^2 - \frac{1 + \alpha^2}{l^2} \right] d\varphi,$$

[6] In tutto il presente n. 1 ci serviamo di certi risultati contenuti nel § 1 della Memoria citata in [4], senza peraltro specificarli singolarmente.

ove con T e T_0 s'intendono i punti (r, φ) ed $(r, 0)$ di $\mathcal{C}(P, r)$; con F, F', G i valori di u, $\partial u/\partial\varphi$, $\partial u/\partial\rho$.

Per comodità indichiamo il secondo membro di (7) con

$$\int_0^{2\pi} \Phi(T, T_0, \varphi)d\varphi.$$

Indicando con P' il punto $\bar{x}(s) - (R-\rho)\bar{y}'(s)$, $\bar{y}(s) + (R-\rho)\bar{x}'(s)$, si ha

$$\int_{C_{R-\rho}} |\, u(P')\Delta u(P') \,|\, ds_{R-\rho} \leq \int_{C_{R-\rho}} |u(P')| \int_0^{\pi} |\, \Phi \,|\, d\varphi ds_{R-\rho} + \int_{C_{R-\rho}} |u(P')| \int_{\pi}^{2\pi} |\, \Phi \,|\, d\varphi ds_{R-\rho}; \tag{8}$$

poichè i ragionamenti sul primo e secondo integrale a secondo membro di (8) sono gli stessi, possiamo limitarci a considerare il primo.

Al variare di s da 0 ad l, per $\sigma \leq \bar{\varphi} \leq \pi$, le quantità

$$\frac{1+\alpha^2}{l^2}, \quad \left(\frac{1-\alpha^2}{l^2}\right)^2, \quad \frac{d}{d\varphi}\left[\lg l^2 - \frac{1-\alpha^2}{l^2}\right]$$

sono limitate; perciò, in base alla (5) e a note diseguaglianze integrali, si ha che

$$\int_{C_{R-\rho}} |u(P')| \int_{\sigma}^{\pi} |\, \Phi \,|\, \frac{d\varphi}{d\bar{\varphi}}\, d\bar{\varphi} ds_{R-\rho} \underset{\rho \to r \to R}{\longrightarrow} 0\,.$$

Si ha poi

$$\int_{C_{R-\rho}} |u(P')| \int_0^{\sigma} |\, \Phi \,|\, \frac{d\varphi}{d\bar{\varphi}}\, d\bar{\varphi} ds_{R-\rho} < \tag{9}$$

$$< \frac{1}{\pi r^2}\int_{C_{R-\rho}} \int_0^{\sigma} \frac{d}{d\varphi}\left[\lg l^2 - \frac{1-\alpha^2}{l^2}\right] \frac{d\varphi}{d\bar{\varphi}} |\, u(P') \,| \left|\frac{\partial}{\partial\varphi} u(A) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(T_0)\right| d\bar{\varphi} ds_{R-\rho} +$$

$$+ \frac{1}{\pi r}\int_{C_{R-\rho}} \int_0^{\sigma} \frac{1-\alpha^2}{l^2} \frac{d\varphi}{d\bar{\varphi}} \,|\, u(P') \,|\, \left|\frac{\partial}{\partial\rho} u(A)\right| d\bar{\varphi} ds_{R-\rho} +$$

$$+ \frac{1}{\pi r}\int_{C_{R-\rho}} \int_0^{\sigma} \left[\frac{1+\alpha^2}{l^2} + \left(\frac{1-\alpha^2}{l^2}\right)^2\right] \frac{d\varphi}{d\bar{\varphi}} |\, u(P') \,| \left|\frac{\partial}{\partial\rho} u(A) - \frac{\partial}{\partial\rho} u(T_0)\right| d\bar{\varphi} ds_{R-\rho}$$

$\left(\text{per } 0 < \varphi < \pi \text{ è } \dfrac{d}{d\varphi}\left[\lg l^2 - \dfrac{1-\alpha^2}{l^2}\right] > 0\right)$.

Indicando con $\bar{l}^2$ il valore di l^2 qualora si ponga $\bar{\varphi}$ al posto di φ, si ha che $l^2/\bar{l}^2 \to 1$ per $\bar{\varphi} \to 0$, uniformemente al variare di ρ in un intorno sinistro di r.

Allora, poichè

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma \frac{1-\alpha^2}{\bar{l}^2}\, d\bar{\varphi} < 1\,,$$

si riconosce immediatamente che, a causa della (5), il secondo integrale a secondo membro della (9) tende a zero per $\rho \to r \to R$.

Per $\rho \to r$ si ha

$$\int_0^\sigma \left(\frac{1-\alpha^2}{\bar{l}^2}\right)^2 d\bar{\varphi} = 0\left(\frac{1}{r-\rho}\right) = \int_0^\sigma \frac{1+\alpha^2}{\bar{l}^2}\, d\bar{\varphi}\,.$$

Posto $u(s,\,t) = u(\bar{x}(s) - t\bar{y}'(s),\ \bar{y}(s) + t\bar{x}'(s))$, da

$$u(s,\,t) - u(s,\,t_1) = \int_{t_1}^t \frac{\partial u}{\partial \tau}\, d\tau\,,$$

si trae

$$\int_{C_t} [u(s,\,t) - u(s,\,t_1)]^2 ds_t \leq (t - t_1)\int_{C_t}\int_{t_1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]_{C_\tau} d\tau ds_t\,;$$

di qui, facendo tendere t_1 a zero e ponendo $R-\rho$ al posto di t si ha

$$\left(\int_{C_{R-\rho}} u^2 ds_{R-\rho}\right)^{1/2} = 0(R-\rho)\,.$$

È poi

$$\frac{\partial}{\partial\rho}u(A) - \frac{\partial}{\partial\rho}u(T_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}u(A) - \frac{\partial}{\partial x}u(T_0)\right]\alpha_A + \left[\frac{\partial}{\partial y}u(A) - \frac{\partial}{\partial y}u(T_0)\right]\beta_A +$$
$$+ (\alpha_A - \alpha_{T_0})\frac{\partial}{\partial x}u(T_0) + (\beta_A - \beta_{T_0})\frac{\partial}{\partial y}u(T_0)$$

essendo α_A e β_A i coseni direttori del raggio $\overrightarrow{PA}$; α_{T_0} e β_{T_0} quelli di $\overrightarrow{PT_0}$. Inoltre si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}u(A) - \frac{\partial}{\partial x}u(T_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}u(A) - f_1(Q')\right] + [f_1(Q') - f_1(Q)] + \left[f_1(Q) - \frac{\partial}{\partial x}u(T_0)\right],$$

e una relazione analoga mutando x con y ed f_1 con f_2.

Approssimando in media f_i (s) con una successione di funzioni continue, per le proprietà, specificate più indietro, di δs, si riconosce che l'integrale

$$\int_0^l [f_i(s+\delta s) - f_i(s)]^2 ds \qquad (i = 1,2)$$

si può rendere arbitrariamente piccolo prendendo σ sufficientemente piccolo.

Pertanto, per la (5) e per note diseguaglianze integrali, l'integrale

$$\int_{C_{R-\rho}} \left[\frac{\partial}{\partial\rho} u(A) - \frac{\partial}{\partial\rho} u(T_0)\right]^2 ds_{R-\rho},$$

e quindi il terzo integrale a secondo membro della (9), si può rendere arbitrariamente piccolo se σ si prende opportunamente piccolo ed r sufficientemente prossimo ad R.

Poichè, infine, per $\rho \to r$, si ha

$$\int_0^\sigma \frac{d}{d\varphi}\left[\lg l^2 - \frac{1-\alpha^2}{l^2}\right] d\varphi = 0\left(\frac{1}{r-\rho}\right),$$

considerazioni analoghe a quelle fatte sopra, si applicano anche al primo integrale a secondo membro della (9).

Resta così provato l'asserto.

2. Supponiamo ora che D sia il dominio di cui si è detto all'inizio. Sia

$$(4') \qquad \lim_{t \to 0+} \sum_0^n {}_i \int_{C_{i,t}} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - f_{1,i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - f_{2,i}\right)^2\right] ds_{i,t} = 0 .$$

Posto $\gamma_i = x_i' y_i'' - x_i'' y_i'$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, si ha

$$(10) \qquad \frac{d}{dt} \sum_0^n {}_i \int_{C_{i,t}} u^2 ds_{i,t} = - \int_{C_{0,t}} \gamma_0 u^2 ds_{0,t} + \sum_1^n {}_i \int_{C_{i,t}} \gamma_i u^2 ds_{i,t} -$$

$$- 2 \iint_{D_t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\Delta u\right] dxdy ,$$

indicando con D_t il doninio limitato di contorno esterno $C_{0,t}$ e di contorni interni $C_{i,t}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ne segue

$$(11) \ \frac{d}{dt} \sum_0^n {}_i \int_{C_{i,t}} u^2 ds_{i,t} < N \sum_0^n {}_i \int_{C_{i,t}} u^2 ds_{i,t} + 2 \iint_{D_t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - u\Delta u\right] dxdy ,$$

essendo $N > \max(1 + |\gamma_i| h)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, per $0 \leq t \leq h$.

Ora, supposta u biarmonica, è

$$\Delta\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - u\Delta u\right] = \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0 .$$

Dunque $(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 - u\Delta u$ è una funzione subarmonica. Allora, detta v_τ la funzione armonica in $D_\tau - \mathfrak{F}D_\tau$ che coincide con $|(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 - u\Delta u|$ su $\mathfrak{F}D_\tau$, si ha, supposto $t > \tau$,

$$\iint\limits_{D_t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - u\Delta u\right] dxdy \leq \iint\limits_{D_t} v_\tau \, dxdy . \tag{12}$$

Sia ora v la funzione armonica in $D - \mathfrak{F}D$ tale che

$$\lim_{t \to 0+} \sum_{0}^{n}{}_i \int\limits_{C_{i,t}} | v - (f^2_{1,i} + f^2_{2,i}) | \, ds_{i,t} = 0 \ \text{(}^7\text{)}. \tag{13}$$

Essendo v e v_τ armoniche in $D_\tau - \mathfrak{F}D_\tau$, si ha

$$\sum_{0}^{n}{}_i \int\limits_{C_{i,t}} | v - v_\tau | \, ds_{i,t} \leq e^{N(t-\tau)} \sum_{0}^{n}{}_i \int\limits_{C_{i,\tau}} | v - v_\tau | \, ds_{i,\tau} .$$

Quindi, tenendo presente la (4′) e la (13) si ha, per una ε positiva arbitraria,

$$\sum_{0}^{n}{}_i \int\limits_{C_{i,t}} | v - v_\tau | \, ds_{i,t} < \varepsilon$$

purchè si prenda τ abbastanza piccolo e $\tau \leq t \leq h$.

Fissato un t ed un δt (> 0) tali che $t + \delta t < h$, sarà anche

$$\iint\limits_{D_t - D_{t+\delta t}} | v - v_\tau | \, dxdy < \varepsilon .$$

Detto allora P un arbitrario punto della corona $D_{t+1/3\delta t} - D_{t+2/3\delta t}$ ed r un numero positivo $\leq \delta t/3$, dalla

$$v(P) - v_\tau(P) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\mathfrak{D}(P,r)} (v - v_\tau) \rho \, d\rho \, d\theta ,$$

ove $\mathfrak{D}(P, r)$ indica il cerchio di centro P e raggio r, si deduce che v_τ per $\tau \to 0$ converge a v uniformemente nella corona $D_{t+1/3\delta t} -$ $- D_{t+2/3\delta t}$ e quindi in definiva uniformemente in tutto D_t.

(7) Cfr. B. Pini, *Osservazioni su un problema generalizzato di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine ellittiche e paraboliche.* In corso di stampa nei « Rend. Acc. Naz. Lincei ».

Se allora si fa tendere τ a zero, dalla (12) si trae

$$\iint\limits_{D_t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2-u\Delta u\right]dxdy\leq\iint\limits_{D_t}vdxdy\,. \tag{12'}$$

Dalla (11) e dalla (12′) segue

$$\frac{d}{dt}\,e^{-Nt}\sum_{0}^{n}{}_i\int\limits_{C_{i,t}}u^2ds_{i,t}<2e^{-Nt}\iint\limits_{D_t}vdxdy<2\iint\limits_{D}vdxdy \tag{14}$$

(la v essendo ovviamente non negativa). Integrando la (14) tra t_0 e t e facendo tendere t_0 a zero, si ha

$$\sum_{0}^{n}{}_i\int\limits_{C_{i,t}}u^2ds_{i,t}<2t\,e^{Nt}\iint\limits_{D}vdxdy\,: \tag{14'}$$

Di qui segue subito *l'unicità della soluzione del problema* (3)-(4).

3. Fermo restando il significato di C_i e $C_{i,t}$, $i=1, 2, \dots, n$, indichiamo ora con $C_{0,t}$ la circonferenza di centro l'origine e raggio $1/t$; chiamiamo D il dominio illimitato di frontiera $\sum_1^n{}_i\, C_i$ e D_t il dominio limitato di contorno esterno $C_{0,t}$ e di contorni interni $C_{i,t}$, $i=1, 2, \dots, n$. Vogliamo provare che *esiste al più una funzione* $u(x, y)$ *tale che*

$$\Delta\Delta u=0 \quad \text{in} \quad D-\mathfrak{F}D \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0+}\left\{\sum_{1}^{n}{}_i\int\limits_{C_{i,t}}\left[(u-f_{0,i})^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}-f_{1,i}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-f_{2,i}\right)^2\right]ds_{i,t}+\right. \tag{4''}$$
$$\left.+\frac{1}{t}\int\limits_{C_{0,t}}\left[(u-f_{0,0})^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}-f_{1,0}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-f_{2,0}\right)^2\right]ds_{0,t}\right\}=0\,.$$

Per ciò, basta provare che se $f_{0,i}\equiv f_{1,i}\equiv f_{2,i}\equiv 0$ per $i=0, 1, \dots, n$, allora è $u\equiv 0$.

Per t abbastanza piccolo, associamo ad ogni punto P di $C_{0,t}$ la circonferenza di raggio r e centro P, essendo r un fissato numero positivo. Si ha

$$\Delta u(x, y)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}u(x+r\cos\theta,\ y+r\operatorname{sen}\theta)\,d\theta\,.$$

Da

$$\frac{1}{t}\int\limits_{C_{0,t}}|\,u\Delta u\,|\,ds_{0,t}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi rt}\int_0^{2\pi}\left(\int\limits_{C_{0,t}}u^2ds_{0,t}\right)^{1/2}\left(\int\limits_{C_{0,t}}\left[\frac{\partial}{\partial r}u(x+r\cos\theta,y+r\operatorname{sen}\theta)\right]^2ds_{0,t}\right)^{1/2}d\theta\,,$$

e dalla (4″) ove le $f_{j,i}$ siano sostituite con lo zero, segue intanto che

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \int_{C_{0,t}} | u\Delta u | \, ds_{0,t} = 0 . \tag{15}$$

Ora fissiamo un numero positivo R abbastanza grande e indichiamo con $\bar{C}_0$ e $\bar{C}_{0,t}$ le circonferenze di centro l'origine e raggi R ed $R - t$; chiamiamo $\bar{D}$ il dominio limitato di contorno esterno $\bar{C}_0$ e di contorni interni C_i. Detta $\bar{v}$ la funzione armonica in $\bar{D} - \mathfrak{F}\bar{D}$ tale che

$$\lim_{t \to 0+} \int_{\bar{C}_{0,t}} \left| \bar{v} - \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - u\Delta u \right| \right| d\bar{s}_{0,t} = 0 ,$$

$$\lim_{t \to 0+} \sum_1^n{}_i \int_{C_{i,t}} | \bar{v} | \, ds_{i,t} = 0 ,$$

per la (14′) si ha

$$\sum_1^n{}_i \int_{C_{i,t}} u^2 ds_{i,t} < 2te^{Nt} \iint_{\bar{D}} \bar{v} dxdy .$$

Poichè i valori assegnati come limiti in media a $\bar{v}$ su $\mathfrak{F}\bar{D}$ sono continui, $\bar{v}$ è la funzione armonica in $\bar{D} - \mathfrak{F}\bar{D}$ che è nulla su C_i, $i = 1, 2, \dots, n$, e che su $\bar{C}_0$ coincide con $|(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 - u\Delta u|$; tale funzione è ovviamente non superiore alla funzione $\bar{w}$ armonica nel cerchio limitato da $\bar{C}_0$ e che su $\bar{C}_0$ coincide con $| (\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 - u\Delta u |$.

Perciò

$$\sum_1^n{}_i \int_{C_{i,t}} u^2 ds_{i,t} <$$

$$< 2te^{Nt} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - u\Delta u \right|_{\bar{C}_0} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \theta)} d\varphi) \rho d\rho d\theta =$$

$$= te^{Nt} R^2 \int_0^{2\pi} \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - u\Delta u \right|_{\bar{C}_0} d\theta ,$$

e quest'ultima, per $R \to \infty$, in base all'ipotesi e alla (15), converge a zero.

Di qui l'asserto.