
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ERMANN0 MARCHIONNA

Sopra una disuguaglianza fra i caratteri proiettivi di una superficie algebrica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 10
(1955), n.4, p. 478–480.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_478_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra una disuguaglianza fra i caratteri proiettivi di una superficie algebrica.

Nota di ERMANNO MARCHIONNA (a Milano)

Sunto. - Data una superficie algebrica F si consideri su di essa un fascio lineare di curve di genere $\pi \geq 0$, avente $n > 0$ punti base e δ curve di genere $\pi - 1$. Dall'esame del numero dei cicli bidimensionali indipendenti di F segue $\delta \geq n - 1$; inoltre l'uguaglianza $\delta = n - 1$ costituisce una condizione sufficiente per la razionalità della superficie.

Si deduce poi che le sole superficie di S_r prive di punti multipli (o anche dotate di sole singolarità normali per $r=3$) aventi classe inferiore all'ordine sono il piano, la superficie di VERONESE e le proiezioni generiche di quest'ultima (in particolare la superficie di STEINER).

1. Sopra una superficie F consideriamo un fascio lineare C_λ di curve irriducibili di genere π che abbia $n > 0$ punti base e δ curve il cui genere si abbassi, e precisamente si riduca a $\pi - 1$ per l'acquisto di un punto doppio a tangenti distinte ⁽¹⁾.

Diciamo che sussiste la disuguaglianza

$$(1) \quad \delta \geq n - 1;$$

inoltre quando

$$\delta = n - 1$$

si ha necessariamente $\pi = 0$ (e quindi la superficie è razionale ⁽²⁾).

Per la dimostrazione ricordiamo innanzitutto che i cicli lineari di F si possono ridurre ai cicli lineari di una generica curva C_0 del fascio ⁽³⁾. Ora, poichè i cicli lineari indipendenti su C_0 e su F sono rispettivamente in numero di 2π e $2q$ ⁽⁴⁾ (q : irregolarità di F), si ha

$$q \leq \pi.$$

Ricordiamo poi la formula di PICARD-ALEXANDER

$$(2) \quad \rho + \rho_0 = I + 4q + 2, \quad (5)$$

⁽⁴⁾ Quanto diremo vale tuttavia anche se nel fascio v'è qualche curva che acquisti singolarità più complicate, purchè la si conti secondo le convenzioni abituali. Per queste convenzioni vedi ad es. F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1949, pag. 167 e seguenti.

⁽²⁾ Per un classico teorema di NÖTHER.

⁽³⁾ Cfr. ad es. S. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la Géométrie algébrique*, Gauthier Villars, Paris, 1924, pag. 34.

⁽⁴⁾ Vedi ad es. loco citato in ⁽³⁾, pag. 35.

⁽⁵⁾ Cfr. ed es. loco citato in ⁽³⁾, pag. 144-145.

dove ρ e ρ_0 indicano i numeri dei cicli bidimensionali indipendenti di F , rispettivamente algebrici e trascendenti (ed è notoriamente $\rho \geq 1$, $\rho_0 \geq 0$), ed I è l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE.

Poichè

$$(3) \quad I = \delta - n - 4\pi$$

si ha

$$(4) \quad \rho + \rho_0 = \delta - n - 4\pi + 4q + 2.$$

Orbene, essendo

$$(5) \quad q \leq \pi \quad ; \quad \rho \geq 1 \quad ; \quad \rho_0 \geq 0,$$

dalla (4) si deduce appunto

$$\delta \geq n - 1.$$

Se $\delta = n - 1$ la (4) diventa

$$\rho + \rho_0 = -4\pi + 4q + 1$$

e per le (5) si dovrà avere

$$\pi = q \quad ; \quad \rho = 1 \quad ; \quad \rho_0 = 0.$$

D'altra parte sussiste l'importante disuguaglianza (stabilita da SEVERI ⁽⁶⁾)

$$\rho_0 \geq 2p_g;$$

per cui si conclude che è

$$p_g = 0 \quad ; \quad p_a = -q = -\pi.$$

Ora non può essere $p_a < 0$, in quanto le superficie con genere aritmetico negativo sono riferibili a rigate di genere $p > 0$ (oppure sono superficie ellittiche od iperellittiche) ⁽⁷⁾ ed in tutti i casi darebbero $\rho + \rho_0 \geq 2$ ⁽⁸⁾, il che è assurdo. Ne segue $p_a = -\pi = 0$.

2. Dai risultati del paragrafo precedente scaturiscono interessanti conseguenze di carattere proiettivo.

Si consideri in S_r una superficie F che per $r > 3$ sia priva di punti multipli e per $r = 3$ sia dotata eventualmente di sole sin-

⁽⁶⁾ Cfr. F. SEVERI, *Osservazioni a proposito di una nota di E. Kähler*, ecc., « Rendiconti del Circolo matem. di Palermo », LVI, 1932, pag. 79.

⁽⁷⁾ Cfr. ad es. l. c. in ⁽⁴⁾, pag. 460-461, o anche F. ENRIQUES (ed L. CAMPEDELLI), *Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero*, Tipografia del Senato, Roma, 1934, pag. 81.

⁽⁸⁾ È noto che, rispetto alle trasformazioni birazionali di F , l'invariante I di ZEUTHEN-SEGRE acquista il valore minimo su un modello di F per cui il genere lineare relativo $p^{(1)}$ abbia il valore massimo, cioè sia il genere lineare assoluto (si ricordi la relazione di NÖTHER $I + p^{(1)} =$

golarità normali (curva doppia nodale con un numero finito di punti tripli, che siano tripli anche per F).

Se C_λ è un fascio generico di sezioni iperpiane di F , allora i numeri n e δ indicano rispettivamente l'ordine e la classe di F ⁽⁹⁾, e π il genere delle sezioni iperpiane.

Pertanto la (1) fornisce un limite inferiore della classe della superficie (in funzione dell'ordine).

Se $\delta = n - 1$, si ha $\pi = 0$; e poichè F possiede sezioni iperpiane razionali, si deduce (da noti teoremi di PICARD e di DEL PEZZO ⁽¹⁰⁾) che essa è una rigata razionale oppure la superficie Φ di VERONESE o una sua proiezione. Ora F non può essere una rigata d'ordine $n > 1$, e di conseguenza nemmeno una proiezione di Φ eseguita su S_4 da un punto di Φ o su S_3 da una retta incidente Φ in uno o due punti (vale a dire una rigata cubica di S_4 , oppure una rigata cubica o una quadrica di S_3); infatti per tutte queste superficie si ha $\delta = n$.

Si conclude che se la classe è inferiore all'ordine, F è un piano, oppure la superficie di VERONESE, o una sua proiezione generica in S_4 od in S_3 (com'è noto quest'ultima è la superficie di STEINER) ⁽¹¹⁾.

$= 12p_a + 9$). È pure noto che per la famiglia delle rigate di genere $p > 0$ ($p_a = -p$) il valore minimo di I è $-4p = 4p_a$. Per le superficie ellittiche ed iperellittiche il genere lineare assoluto vale 1 ed è $p_a = -1$ (cfr. ad es. l. c. in ⁽⁴⁾, pag. 443) cosicchè il valore minimo di I è -4 (cfr. anche G. DANTONI, *Sulla determinazione delle superficie con serie di Severi di ordine nullo o negativo*, « Memorie dell'Acc. d'Italia », volume XIV, n. 4, 1943). Riassumendo: per le superficie con $p_a < 0$ si ha $I \geq 4p_a$; nel nostro caso ($p_a = -q$) si ha $I \geq -4q$. La relazione di PICARD-ALEXANDER dà pertanto $\rho + \rho_0 \geq 2$.

⁽⁹⁾ Notoriamente per classe di F s'intende il numero degli iperpiani di un fascio generico che sono tangenti ad F (in un punto semplice). Si osservi che, se F possiede singolarità qualsiasi, il numero δ delle sezioni iperpiane di un fascio aventi un punto doppio fuori dei punti base non coincide con la classe di F . Ad esempio si faccia acquistare un nodo isolato ad una superficie dello spazio ordinario. Com'è noto le convenzioni per il calcolo della classe e di δ sono tali che la classe diminuisce di 2, mentre δ non muta.

⁽¹⁰⁾ Cfr. ad es. F. CONFORTO, *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939, pagg. 271, 274, 275.

⁽¹¹⁾ Precisamente per il piano si ha $\delta = 0$, $n = 1$; per la superficie di VERONESE e per le sue proiezioni generiche si ha $\delta = 3$, $n = 4$.