Luigi Caprioli

Su un criterio per l'esistenza dell'energia di deformazione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 481–483.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_481_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Su un criterio per l'esistenza dell'energia di deformazione.

Nota di Luigi Caprioli (a Bologna)

Sunto. - *Il terzo capoverso del n. 1.*

1. In un lavoro [1] di particolare interesse, pubblicato alcuni anni or sono e nel quale si perviene, fra l'altro, ad una espressione del legame sforzi–deformazione per un corpo elasto–plastico, P. Udeschini ha osservato che in un continuo elastico, anche non isotropo, per il quale sia valida la legge di Hooke, la esistenza di una energia di deformazione è subordinata alla sola ipotesi che sia sempre positivo il lavoro necessario per deformare comunque il corpo (s'intende, entro i limiti di validità della legge di Hooke), a partire dal suo stato naturale non deformato.

Ora, questa osservazione dell'Udeschini ha portata molto più ampia: sarà appunto mostrato, qui di seguito, come da un semplice lemma matematico, di immediata dimostrazione (n. 2), sia possibile ritrovare il risultato di Udeschini e provarne la validità anche quando non si sia verificata la legge di Hooke, (e, in particolare, per un corpo elastoplastico).

Più precisamente, verrà provato (n. 3) che, per la esistenza di una energia di deformazione in un solido anche non elastico e sollecitato in modo che le corrispondenti deformazioni possano ritenersi infinitesime [2] sono sufficienti le sole due ipotesi: – che sia sempre non negativo [3] il lavoro necessario per la deformazione quando quest'ultima sia impressa a partire dallo stato naturale non deformato; – che il tensore degli sforzi dipenda soltanto dal tensore della corrispondente deformazione [4].

Come altro esempio di validità dei criteri illustrati, verrà infine provata (n. 4) la esistenza della energia elettrostatica di un dielettrico di conducibilità nulla, privo di isteresi, non necessariamente isotropo e nel quale il vettore elettrico sia funzione, anche non

[1] P. Udeschini, « Sull'energia di deformazione ». Rendic. Ist. Lombardo di Sc. e Lett., S. III, V. 76, 1942-43.

[2] Non è escluso che le considerazioni oggetto di questa nota possano sussistere anche nel caso di deformazioni finite.

[3] Con questa proposizione, normalmente assunta come principio nella teoria dei continui deformabili (cfr. Udeschini, op. cit.), si esprime, come è ben noto, il fatto, mai smentito dalla comune esperienza, che per deformare un corpo, a partire dal suo stato non deformato, si deve spendere lavoro.

[4] Si esclude, cioè, la presenza di fenomeni di tipo dissipativo.

lineare, del solo vettore spostamento (5); e, analogamente, l'esistenza, dell'energia magnetostatica di una sostanza ferromagnetica priva di isteresi, non isotropa e tale che il vettore magnetico sia funzione, anche non lineare, del solo vettore induzione (6).

2. Si abbia la forma differenziale lineare $\delta F = \Sigma_i A_i \delta x_i$ nelle n variabili x_i e siano le quantità A_i funzioni delle *sole* variabili x_i, definite e continue in un dominio $\mathfrak{D}$ di un n-spazio che penseremo riferito ad un sistema di assi cartesiani x_i. Le A_i possano, cioè, considerarsi le componenti secondo gli assi x_i di un vettore A, che diremo *posizionale*, definito in $\mathfrak{D}$. È facile provare il seguente lemma:

Se esiste in $\mathfrak{D}$ un punto P tale che l'integrale della forma δF esteso ad una qualunque linea l passante per P sia definito in segno (cioè abbia, indipendentemente da l, per es., segno non negativo); e se il vettore A è posizionale nel senso or ora precisato, allora la forma δF è, in $\mathfrak{D}$, un differenziale esatto.

Si osservi, a tale scopo, che l'integrale di δF esteso ad una qualunque linea chiusa c_P di $\mathfrak{D}$ passante per P è nullo; e che tali sono anche gli integrali estesi a linee chiuse (arbitrarie) di $\mathfrak{D}$ non passanti per P (7).

3. Ciò premesso, si consideri un solido deformabile, anche non perfettamente elastico e non necessariamente isotropo; e si ammetta

(5) Queste condizioni possono ritenersi praticamente verificate, se si prescinde dall'isteresi dielettrica, nelle sostanze cosiddette «ferroelettriche», di cui è fatto largo impiego nella tecnica (cfr., ad es., W. P. MASON and R. F. WICK, «Ferroelectrics and the Dielectric Amplifier», P. I. R. E, V. 42, n. 11, 1954). E, d'altra parte, l'ipotesi di isteresi nulla può ritenersi accettabile per questi materiali, specie per frequenze di lavoro non altissime.

(6) Anche qui, l'ipotesi di isteresi nulla è abbastanza coerente con la esperienza; è noto il frequente impiego, non altrimenti possibile, di trasformatori ed impedenze a nucleo ferromagnetico con bassissime perdite (Permalloy, ecc.) negli amplificatori moderni (anche per frequenze molto alte) e negli amplificatori magnetici.

(7) È infatti, per ipotesi e supposta la linea c_P percorsa in un verso assegnato: $\oint_{c_P} \delta L \geq 0$; ma, per la stessa ipotesi, questa disequazione deve valere anche se c_P è percorsa in verso contrario al precedente; e, d'altra parte, per essere A posizionale, il segno di $\oint_{c_P} \delta L$ cambia insieme a quello di percorrenza della c_P: segue da ciò che deve essere $\oint_{c_P} \delta L = 0$. Detta poi c una linea chiusa di $\mathfrak{D}$ non passante per P, si consideri la linea

che sia sempre non negativo il lavoro necessario per produrre su ogni elemento del corpo ed a partire dal suo stato naturale non deformato ([8]) una deformazione infinitesima (arbitraria). Detti cioè p_{ik}, ξ_{ik} il tensore degli spazi e quello delle deformazioni, sia cioè non negativo l'integrale della forma $\Sigma_{ik} p_{ik} \delta\xi_{ik}$ esteso ad una qualunque linea dello spazio delle ξ_{ik} avente origine nel punto $\xi_{ik} \equiv 0$. Se si ammette, inoltre, che esista nello spazio delle ξ_{ik} un intorno $\mathfrak{D}$ del punto $\xi_{ik} \equiv 0$, nel quale le p_{ik} siano funzioni, anche non lineari, delle sole ξ_{ik}, vale per la forma $\Sigma_{ik} p_{ik} \delta\xi_{ik}$ il lemma del n. 2; essa è pertanto, in $\mathfrak{D}$, un differenziale esatto, dal che segue subito la esistenza di una energia di deformazione. Poichè questo risultato è ovviamente valido anche quando il corpo segue la legge di Hooke, risultano provate le tesi enunciate nel n. 1.

4. Appare ora quasi immediata la estensione dei criteri dianzi accennati anche ad altri campi della Fisica; di qualche interesse possono risultare, fra i numerosi che potrebbero qui citarsi, questi ultimi esempi, tratti dalla Elettrostatica e dalla Magnetostatica:

Si abbia il dielettrico di cui è stato detto nel n. 1; e si ammetta inoltre, in accordo con la comune esperienza, che sia sempre non negativo il lavoro elettrico necessario per polarizzare comunque, a partire dalla polarizzazione nulla, il dielettrico stesso. Sia cioè, ove si indichino con E_i, D_i le componenti in un riferimento cartesiano del vettore elettrico e del vettore polarizzazione rispettivamente, non negativo l'integrale della forma differenziale $\Sigma_i E_i \delta D_i$ esteso ad una qualunque linea dello spazio delle D_i con origine in $D_i \equiv 0$.

La forma $\Sigma_i E_i \delta D_i$ è allora, per il lemma del n. 2, un differenziale esatto e risulta così dimostrata l'esistenza dell'energia elettrostatica del dielettrico.

Con ovvie varianti nei significati dei simboli, il procedimento qui seguito vale anche a dimostrare, sotto ipotesi del tutto analoghe a quelle or ora citate per i dielettrici, la esistenza della energia di magnetizzazione di una sostanza ferromagnetica che verifichi le condizioni dette al n. 1.

chiusa c' costituita dalla c interrotta in un punto Q e da una (arbitraria) linea QP percorsa due volte ed in versi contrari; è ancora, per quanto è stato detto qui sopra: $\oint_{c'} \delta L = 0$; ma è anche, ovviamente $\oint_{c'} = \int_P^Q + \oint_c + \int_Q^P = \oint_c$; dal che segue subito l'asserto del testo.

([8]) Considerazioni analoghe a quelle esposte nel testo potrebbero ripetersi anche, con ovvie varianti, nel caso che la deformazione venisse impressa a partire da uno stato di coazione.