Bollettino
Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Sul complemento della funzione gamma incompleta nel calcolo simbolico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 484–488.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_484_0>

Sul complemento della funzione gamma incompleta nel calcolo simbolico.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina)

Sunto. - *Si esprime il prodotto dei complementi di due funzioni gamma incomplete, a parametri diversi, con una formula di calcolo simbolico operante su funzioni ipergeometriche di* GAUSS.

1. In una recente nota (¹) di L. POLI si trovano — senza dimostrazione — le due formule di calcolo simbolico

$$\frac{2\log(t+1)}{t+2} \supset p[e^p E_i(-p)]^2, \tag{1}$$

$$\frac{1}{(t+2)\sqrt{t+1}} \supset \frac{\pi}{2} p[e^p E_{rfc}(\sqrt{p})]^2, \tag{2}$$

dove

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

sta per

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt,$$

ed

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt,$$

$$E_{rfc}(x) = 1 - E_{rf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

sono la funzione esponenzialintegrale e la funzione degli errori complementare.

D'altra parte, introdotto il complemento della funzione gamma incompleta

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha)\left[1 - \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}\, {}_1F_1(1;\, \alpha+1;\, x)\right],$$

e tenuto presente che

$$E_i(-p) = -\Gamma(0, p),$$

$$E_{rfc}(\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}, p\right),$$

(¹) L. POLI, *Quelques images symboliques*, « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », LXVIII, (1954), pp. 13-22.

le (1) e (2) si possono presentare nella forma

$$(1') \qquad \frac{2 \log (t+1)}{t+2} \supset p[e^p\Gamma(0, p)]^2,$$

$$(2') \qquad \frac{2}{(t+2)\sqrt{t+1}} \supset p\left[e^p\Gamma\left(\frac{1}{2}, p\right)\right]^2.$$

Ma così scritte, esse spingono alla ricerca di altra trasformazione avente al secondo membro l'espressione

$$pe^{2p}\Gamma(\alpha, p)\Gamma(\beta, p).$$

E precisamente sarà quì assegnata la formula

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \frac{t^{1-\alpha-\beta}}{(t+1)(t+2)}\left[{}_2F_1\left(1, 1-\alpha; 2-\alpha-\beta; \frac{t}{t+1}\right) + \right. \\ &\left. + {}_2F_1\left(1, 1-\beta; 2-\alpha-\beta; \frac{t}{t+1}\right)\right] \supset pe^{2p}\Gamma(\alpha, p)\Gamma(\beta, p), \end{aligned}$$

con $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $p > 0$.

Sarà pure dedotto qualche altro caso particolare notevole, diverso da (1) e (2).

2. Prendiamo le mosse dalla nota formula

$$\frac{t^{-\alpha}}{t+1} \supset \Gamma(1-\alpha)pe^p\Gamma(\alpha, p) \qquad \alpha < 1,$$

e applichiamo il teorema della « *Faltung* ». Si ha

$$\frac{t^{-\alpha}}{t+1} * \frac{t^{-\beta}}{t+1} \supset \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)pe^{2p}\Gamma(\alpha, p)\Gamma(\beta, p),$$

con

$$\frac{t^{-\alpha}}{t+1} * \frac{t^{-\beta}}{t+1} = \int_0^t \frac{u^{-\alpha}}{u+1} \frac{(t-u)^{-\beta}}{t-u+1} du.$$

E poichè

$$\frac{1}{(u+1)(t-u+1)} = \frac{1}{t+2}\left(\frac{1}{u+1} + \frac{1}{t-u+1}\right),$$

il precedente integrale — che denotiamo per brevità con $f_{\alpha\beta}(t)$ — si può scrivere

$$f_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{t+2}\int_0^t u^{-\alpha}(t-u)^{-\beta}\left(\frac{1}{u+1} + \frac{1}{t-u+1}\right) du.$$

Facciamo $u = tz$ e si ha

$$f_{\alpha\beta}(t) = \frac{t^{1-\alpha-\beta}}{t+2}\int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}\left(\frac{1}{tz+1} + \frac{1}{1+t-tz}\right) dz.$$

Successivamente

$$f_{\alpha\beta}(t)=\frac{t^{1-\alpha-\beta}}{t+2}\int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}(1+tz)^{-1}dz+$$

$$+\frac{t^{1-\alpha-\beta}}{t+2}\int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}(1+t-tz)^{-1}dz.$$

Sostituiamo nel primo integrale z con $1-z$, e perveniamo alla

$$f_{\alpha\beta}(t)=\frac{t^{1-\alpha-\beta}}{(t+1)(t+2)}\left[\int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}\left(1-\frac{t}{t+1}z\right)^{-1}dz+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 z^{-\beta}(1-z)^{-\alpha}\left(1-\frac{t}{t+1}z\right)^{-1}dz\right].$$

Introducendo la funzione ipergeometrica di Gauss con la relazione

$$\int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}(1-xz)^{-a}dz=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ x),$$

risulta

$$f_{\alpha\beta}(t)=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}\,\frac{t^{1-\alpha-\beta}}{(t+1)(t+2)}\,\cdot$$

$$\cdot\left[{}_2F_1\left(1,\ 1-\alpha;\ 2-\alpha-\beta;\ \frac{t}{t+1}\right)+{}_2F_1\left(1,\ 1-\beta;\ 2-\alpha-\beta;\ \frac{t}{t+1}\right)\right],$$

e quindi vale la (3).

Per $\beta=\alpha$ si ha

$$(3')\qquad \frac{2}{\Gamma(2-2\alpha)}\,\frac{t^{1-2\alpha}}{(t+1)(t+2)}\,{}_2F_1\left(1,\ 1-\alpha;\ 2-2\alpha;\ \frac{t}{t+1}\right)\supset p[e^p\Gamma(\alpha,\ p)]^2.$$

3. Dalla (3′) facendo $\alpha=0$ e tenendo presente che

$${}_2F_1(1,\ 1;\ 2;\ x)=-\frac{\log(1-x)}{x},$$

si ottiene la (1′), e quindi la (1).

Per $\alpha=\frac{1}{2}$ si ottiene la (2′) e quindi la (2).

Con $\alpha=-\frac{1}{2}$ si ha

$$\frac{t^2}{(t+1)(t+2)}\,{}_2F_1\left(1,\ \frac{3}{2};\ 3;\ \frac{t}{t+1}\right)\supset p\left[e^p\Gamma\left(-\frac{1}{2},\ p\right)\right]^2.$$

Ma per la

$$ {}_2F_1\left(a-\frac{1}{2},\ a;\ 2a;\ x\right)=\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{1-2a} $$

è

$$ {}_2F_1\left(1,\ \frac{3}{2};\ 3;\ \frac{t}{t+1}\right)=\frac{4(t+1)}{(1+\sqrt{t+1})^2}. $$

D'altra parte [2]

$$ e^p\Gamma\left(-\frac{1}{2},\ p\right)=-2\frac{d}{dp}\left[e^p\Gamma\left(\frac{1}{2},\ p\right)\right]. $$

E risalendo si ottiene

$$ \frac{(\sqrt{t+1}-1)^2}{t+2}\supset p\left\{\frac{d}{dp}\left[e^p\Gamma\left(\frac{1}{2},\ p\right)\right]\right\}^2. \tag{4} $$

Ancora

$$ \frac{(\sqrt{t+1}-1)^2}{t+2}\supset \pi p\left\{\frac{d}{dp}\left[e^pE_{\prime fc}(\sqrt{p})\right]\right\}^2. \tag{4'} $$

4. Supponiamo ora $\beta\neq\alpha$ e riferiamoci alla (3). Per $\alpha=0$ e $\beta=\frac{1}{2}$ si ha

$$ \frac{\sqrt{t}}{(t+1)(t+2)}\left[{}_2F_1\left(1,\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{t}{t+1}\right)+{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{t}{t+1}\right)\right]\supset $$

$$ \supset\frac{\sqrt{\pi}}{2}pe^{2p}\Gamma(0,\ p)\Gamma\left(\frac{1}{2},\ p\right). $$

Ma per la

$$ {}_2F_1\left(2a,\ 2b;\ a+b+\frac{1}{2};\ x\right)={}_2F_1\left(a,\ b;\ a+b+\frac{1}{2};\ 4x\sqrt{1-x}\right) $$

è

$$ {}_2F_1\left(1,\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{t}{t+1}\right)={}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{4t}{(t+1)^2}\right). $$

Ed essendo

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ x^2\right)=\frac{\operatorname{arcosen} x}{x}, $$

segue

$$ {}_2F_1\left(1,\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{t}{t+1}\right)=\frac{t+1}{2\sqrt{t}}\operatorname{arcosen}\frac{2\sqrt{t}}{t+1}. $$

(2) F. G. Tricomi, *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Cremonese, Roma, 1954, p. 163.

Inoltre per la

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2}\quad x^2\right) = \frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x} $$

è

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{t}{t+1}\right) = \sqrt{\frac{t+1}{t}}\log\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right). $$

E risalendo si conclude

$$ (5)\qquad \frac{1}{(t+2)\sqrt{t+1}}\left[\sqrt{t+1}\,\text{arcosen}\,\frac{2\sqrt{t}}{t+1} + 2\log\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)\right] \supset $$
$$ \supset -\pi p e^{2p} E_i(-p) E_{rfc}(\sqrt{p}). $$

5. Dalla (3), per $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, si ottiene un risultato che può pure dedursi dalla (2) applicando la formula di calcolo simbolico

$$ tf(t) \supset -p\frac{d}{dp}\left[\frac{\varphi(p)}{p}\right]. $$

Seguendo questa via si ha

$$ \frac{t}{(t+2)\sqrt{t+1}} \supset -\frac{\pi}{2}\,p\,\frac{d}{dp}\left[e^{p}E_{rfc}(\sqrt{p})\right]^2, $$

da cui

$$ (6)\qquad \frac{t}{(t+2)\sqrt{t+1}} \supset -\pi p e^{p} E_{rfc}(\sqrt{p})\,\frac{d}{dp}\left[e^{p}E_{rfc}(\sqrt{p})\right]. $$

A partire dalla (3) è

$$ \frac{t}{(t+1)(t+2)}\left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ 1;\ 2;\ \frac{t}{t+1}\right) + {}_2F_1\left(1,\ \frac{3}{2};\ 2;\ \frac{t}{t+1}\right)\right] \supset $$
$$ \supset p e^{2p}\,\Gamma\left(\frac{1}{2},\ p\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2},\ p\right). $$

Intanto

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ 1;\ 2;\ x\right) = \frac{2}{1+\sqrt{1-x}}, $$

$$ {}_2F_1\left(1,\ \frac{3}{2};\ 2;\ x\right) = \frac{2}{\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{1-x})}. $$

E quindi

$$ \frac{2t}{(t+2)\sqrt{t+1}} \supset p e^{2p}\,\Gamma\left(\frac{1}{2},\ p\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2},\ p\right), $$

che equivale alla (6).