Marco Cugiani

Sopra una questione di approssimazione diofantea non lineare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 489–497.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_489_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sopra una questione di approssimazione diofantea non lineare.

di Marco Cugiani (a Milano)

Sunto. - *Si studia l'insieme* I(α) *dei punti di ascissa* $p^2 - q^2\alpha$ ($\alpha > 0$ *irrazionale fisso;* p, q *interi*). *Da tale studio scaturisce, fra altri risultati, una condizione caratteristica perchè l'insieme* I(α) *risulti ovunque denso sull'asse reale, e la conseguente dimostrazione che quest'ultima circostanza è verificata per quasi tutti i numeri* α.

1. Nel presente lavoro ci ripromettiamo di studiare la distribuzione, sopra l'asse reale, dei punti P di ascissa:

$$p^2 - q^2\alpha$$

dove α ê un numero reale, positivo, fisso, mentre p e q percorrono, indipendentemente l'uno dall'altro, l'insieme dei numeri interi. Evidentemente potremo supporre, senza limitazione sostanziale: $p \geq 0$, $q \geq 0$.

Indicheremo con $I(\alpha)$ l'insieme dei punti P, il quale dipenderà evidentemente dal prescelto valore di α.

Questo studio ricorda per analogia quello dell'insieme lineare dei punti di ascissa $p - q\alpha$; com'è ben noto quest'ultimo gode della importante proprietà di essere ovunque denso sopra l'asse reale, se α è irrazionale.

Una prima questione che si presenta quindi spontanea è quella di stabilire se anche l'insieme $I(\alpha)$ goda della stessa proprietà.

Il problema naturalmente ha interesse solo quando α sia irrazionale, come accade nel caso lineare; qui però la risposta non sarà sempre positiva, neanche per α irrazionale, ma dipenderà essenzialmente dalla natura del numero α. Questo nostro studio si ripromette appunto in primo luogo di precisare le condizioni che possono essere imposte al numero α al fine di garantire che l'insieme $I(\alpha)$ sia denso su tutto l'asse.

Non ci risulta che questa questione sia stata finora trattata, essa d'altra parte ci sembra non indegna di attenzione poichè, oltre ad un evidente interesse intrinseco, essa offre, come ci è stato segnalato (1), possibilità di immediatà applicazione ad alcune

(1) Questa segnalazione ci è stata fatta da G. Prodi. A questo proposito si veda: G. Prodi, *Qualche risultato sulle soluzioni periodiche di equazioni del tipo iperbolico*, Comunicazione al 5° Congresso U. M. I. (Pavia, 1955).

questioni relative all'esistenza di integrali periodici in certe equazioni differenziali di tipo iperbolico.

Le risposte a cui siamo pervenuti sono condensate nelle proposizioni che vengono qui di seguito enunciate. La prima di esse riguarda la questione preliminare se l'origine (che appartiene in in ogni caso ad $I(\alpha)$ per $p=0$, $q=0$) sia o meno un punto di accumulazione di $I(\alpha)$.

Le considerazioni relative a questa questione sono legate alla natura della successione dei quozienti parziali dello sviluppo di $\sqrt{\alpha}$ in frazione continua regolare. Sia (gli a_i interi, $a_0 \geq 0$, $a_i \geq 1$ per $i > 0$):

$$\{a_n\} \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

tale successione, sia cioè:

$$\sqrt{\alpha} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

lo sviluppo di $\sqrt{\alpha}$.

La proposizione annunciata può essere allora così formulata (essa verrà dimostrata al n. 3):

TEOREMA 1°. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'origine sia un punto isolato di* $\mathrm{I}(\alpha)$ *è che la successione* $\{a_n\}$ *sia superiormente limitata.*

I numeri α per i quali la corrispondente successione $\{a_n\}$ è limitata li designeremo come numeri del tipo L. I numeri del tipo L costituiscono, come è noto, un insieme di misura nulla (²), ovunque denso sull'asse reale, che ha la potenza del continuo.

Per procedere alla classificazione dei numeri che non sono di tipo L una ulteriore precisazione è necessaria. Vale infatti il seguente:

TEOREMA 2°. – *Esistono numeri* α *tali che l'origine è un punto di accumulazione di* $\mathrm{I}(\alpha)$, *mentre si può determinare un intorno destro dell'origine in cui non cade alcun punto di* $\mathrm{I}(\alpha)$ (*diremo allora che l'origine è un punto di accumulazione solo da sinistra di* $\mathrm{I}(\alpha)$.

Analogamente esistono numeri α *tali che l'origine è un punto di accumulazione solo da destra di* $\mathrm{I}(\alpha)$.

Questa proposizione (che verrà dimostrata al n. 3) ci induce a classificare come numeri di tipo M' ed M'' rispettivamente quei

(²) Per la facile dimostrazione si può vedere: G. H. HARDY & E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3ª ed., Oxford, Clarendon Press (1954), alla pag. 166.

numeri α tali che l'origine è un punto di accumulazione solo da sinistra o solo da destra di $I(\alpha)$.

Chiameremo infine numeri di tipo N quei numeri α tali che in ogni intorno, sia destro che sinistro, dell'origine cadono infiniti punti di $I(\alpha)$.

Come vedremo (sempre al n. 3) i numeri di tipo M', così come quelli di tipo M'', si possono facilmente caratterizzare; essi formano un insieme ovunque denso che ha la potenza del continuo. Vale d'altra parte il seguente:

TEOREMA 3°. – *L'insieme dei numeri di tipo* M', *così come quello dei numeri di tipo* M'', *ha misura nulla.*

Da questa proposizione (dimostrata al n. 4) segue immediatamente il fatto notevole che *quasi tutti* i numeri reali sono del tipo N.

Noi chiameremo poi insiemi del tipo L, M', M'', N, gli insiemi $I(\alpha)$ corrispondenti a numeri α appartenenti rispettivamente ai quattro tipi suddetti.

Possiamo allora enunciare nel modo seguente una proposizione (dimostrata al n. 5) che fornisce una risposta esauriente alla questione della densità degli insiemi $I(\alpha)$:

TEOREMA 4°. – *Ogni insieme del tipo* M' *è denso su tutto il semiasse a sinistra dell'origine; ogni insieme del tipo* M'' *è denso su tutto il semiasse a destra dell'origine. Infine ogni insieme del tipo* N *è denso su tutto l'asse reale.*

Dalle cose dette segue la notevole conseguenza che:
per quasi tutti i numeri α *l'insieme* $\mathrm{I}(\alpha)$ *è ovunque denso sull'asse reale.*

Cercheremo infine di dare qualche informazione circa la distribuzione dei punti degli insiemi di tipo L, o circa quella degli insiemi di tipo M' od M'' rispettivamente sul semiasse positivo o su quello negativo.

Qualche luce a questo proposito può venire dalla seguente proposizione (dimostrata alla fine del n. 5):

TEOREMA 5°. – *Ogni insieme* $\mathrm{I}(\alpha)$ *ammette sempre almeno un punto di accumulazione nell'intervallo* $(\mathrm{c}, 2\sqrt{\alpha}+1)$, *ed un altro nell'intervallo* $(-2\sqrt{\alpha}-1, -\mathrm{c})$, *dove* $\mathrm{c}>0$ *è una costante che dipende eventualmente da* α.

Se poi γ *è l'ascissa di un punto di accumulazione di* $\mathrm{I}(\alpha)$, *tali sono anche i punti di ascissa* $\mathrm{n}^2\cdot\gamma$, *con* n *intero qualunque.*

2. Formuleremo in primo luogo alcuni lemmi che ci saranno utili nel seguito.

LEMMA A. - *Se* p/q *non è una ridotta dello sviluppo di* $\sqrt{\alpha}$ *in frazione continua si ha sempre:* $|p^2 - q^2\alpha| \geq \sqrt{\alpha}/2$, *se* $q \neq 0$.

Infatti, qualunque sia la coppia p, q, si ha sempre:

$$|p - q\sqrt{\alpha}| \cdot (p + q\sqrt{\alpha}) = |p^2 - q^2\alpha|, \tag{1}$$

$$p + q\sqrt{\alpha} \geq q\sqrt{\alpha}. \tag{2}$$

Se poi p/q non coincide con alcuna ridotta dello sviluppo di $\sqrt{\alpha}$ in frazione continua, avremo (3):

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{\alpha}\right| \geq \frac{1}{2q^2} \quad ; \quad |p - q\sqrt{\alpha}| \geq \frac{1}{2q}$$

e ne segue immediatamente il nostro asserto.

D'ora in poi designeremo con: p_0/q_0, $p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n, \ldots$ la successione delle ridotte dello sviluppo di $\sqrt{\alpha}$ in frazione continua ($p_0 = a_0$, $q_0 = 1$; $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $p_1 = a_1$; ecc.). Vale il seguente;

LEMMA B. - *Se la successione* $\{a_n\}$ *ammette una sottosuccessione:*

$$\{a_{u_i}\} \qquad a_{u_1}, a_{u_2}, \ldots, a_{u_i}, \ldots$$

(gli u_i interi, $1 \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_i < \ldots$) *limitata superiormente* ($a_{u_i} \leq k$ per ogni i), *per tutte le coppie del tipo* p_{u_i-1}, q_{u_i-1} *vale la relazione:*

$$|p^2_{u_i-1} - q^2_{u_i-1}\alpha| > \frac{\sqrt{\alpha}}{k+2}.$$

Abbiamo infatti:

$$\left|\frac{p_{u_i-1}}{q_{u_i-1}} - \sqrt{\alpha}\right| > \left|\frac{p_{u_i-1}}{q_{u_i-1}} - \frac{p_{u_i+1}}{q_{u_i+1}}\right| = \frac{a_{u_i+1}}{q_{u_i-1} \cdot q_{u_i+1}},$$

e risulta:

$$q_{u_i+1} = a_{u_i+1} q_{u_i} + q_{u_i-1} = a_{u_i+1}(a_{u_i} q_{u_i-1} + q_{u_i-2}) +$$
$$+ q_{u_i-1} < a_{u_i+1}(k q_{u_i-1} + q_{u_i-1}) + q_{u_i-1} =$$
$$= a_{u_i+1}(k+1) q_{u_i-1} + q_{u_i-1} \leq a_{u_i+1}(k+2) q_{u_i-1};$$

se ne deduce:

$$\left|\frac{p_{u_i-1}}{q_{u_i-1}} - \sqrt{\alpha}\right| > \frac{a_{u_i+1}}{a_{u_i+1}(k+2) q^2_{u_i-1}} = \frac{1}{(k+2) q^2_{u_i-1}}.$$

(3) Si veda ad es.: HARDY & WRIGHT, op. cit., il teorema 184, pag. 153.

Otteniamo così la relazione:

$$|p_{u_i-1} - q_{u_i-1}\sqrt{\alpha}| > \frac{1}{(k+2)q_{u_i-1}}.$$

Di qui, tenendo conto delle (1) e (2), valide per ogni coppia p, q, segue immediatamente il nostro lemma.

Dimostriamo infine il:

LEMMA C. - *Se la successione* $\{a_n\}$ *ammette una sottosuccessione:*

$\{a_{s_i}\}$ $$a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_i}, \ldots$$

non limitata superiormente, allora l'origine è un punto di accumulazione per l'insieme dei punti di ascissa: $p^2_{s_i-1} - q^2_{s_i-1}\alpha$.

Osserviamo dapprima che:

$$\left|\frac{p_{s_i-1}}{q_{s_i-1}} - \sqrt{\alpha}\right| < \frac{1}{q^2_{s_i-1}};$$

da cui si deduce

$$\frac{p_{s_i-1}}{q_{s_i-1}} < \sqrt{\alpha} + \frac{1}{q^2_{s_i-1}} < 2\sqrt{\alpha},$$

per i abbastanza grande; ne risulta:

$$(3) \qquad p_{s_i-1} + q_{s_i-1}\sqrt{\alpha} = q_{s_i-1}\left(\frac{p_{s_i-1}}{q_{s_i-1}} + \sqrt{\alpha}\right) < 3\sqrt{\alpha}\, q_{s_i-1}.$$

Fissato K arbitrariamente grande, scegliamo i in guisa che sia $a_{s_i} > K$, risulterà:

$$q_{s_i} = a_{s_i} q_{s_i-1} + q_{s_i-2} > K q_{s_i-1}$$

e quindi:

$$\left|\frac{p_{s_i-1}}{q_{s_i-1}} - \sqrt{\alpha}\right| < \frac{1}{q_{s_i-1}q_{s_i}} < \frac{1}{Kq^2_{s_i-1}};$$

$$(4 \qquad |p_{s_i-1} - q_{s_i-1}\sqrt{\alpha}| < \frac{1}{Kq_{s_i-1}}.$$

La (3), la (4) e la (1) ci danno:

$$|p^2_{s_i-1} - q^2_{s_i-1}\alpha| < \frac{3\sqrt{\alpha}}{K}$$

Il nostro asserto è così dimostrato.

3. Risulta facilissimo adesso dimostrare il teorema 1°.

Sia α un assegnato numero del tipo L; l'insieme dei punti di $I(\alpha)$ pei quali $q = 0$ si riduce all'insieme dei punti di ascissa p^2;

fra essi ritroviamo l'origine per $p = 0$, degli altri il più vicino all'origine è il punto 1.

Nel caso $q \neq 0$ i lemmi A e B ci garantiscono che la minima distanza di un punto di $I(\alpha)$ dall'origine è maggiore della quantità: $\sqrt{\alpha}/(k+2)$, che dipende solo da α.

Se invece α non è del tipo L il lemma C ci garantisce che l'origine è un punto di accumulazione di $I(\alpha)$.

Il teorema 1° è così dimostrato; esso è perfezionato dalla seguente:

Osservazione. – Nel caso di un numero α del tipo L chiamiamo $\delta(\alpha)$ l'ampiezza del massimo intervallo sull'asse reale in cui non cadono punti di $I(\alpha)$. Dalla dimostrazione del teorema 1° risulta:

$$\delta(\alpha) > \frac{\sqrt{\alpha}}{k+2}.$$

Ora, fissato $K > 0$ arbitrario, scegliamo α tale che si abbia $a_0 > K(k+2)$. Sarà allora:

$$\delta(\alpha) > \frac{\sqrt{\alpha}}{k+2} > \frac{a_0}{k+2} > K.$$

Abbiamo dunque che: *fissato* K *arbitrario esiste una infinità* (che ha la potenza del continuo) *di numeri* α *tali che* $\delta(\alpha) > K$.

L'intervallo che garantisce questa limitazione conviene cercarlo a sinistra dell'origine per evitare la presenza dei punti di ascissa p^2.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema 2°, che risulta anch'essa assai semplice; noi dimostreremo anzi la più precisa affermazione:

l'insieme dei numeri M′ *coincide con quello dei numeri* α *per i quali la successione* $a_0, a_2, a_4, \ldots$ *dei quozienti parziali di indice pari è superiormente limitata, mentre la successione* $a_1, a_3, a_5, \ldots$ *dei quozienti di indice dispari non è limitata.*

Si avrà infatti per il lemma B:

$$p^2_{2n+1} - q^2_{2n+1}\alpha > \frac{\sqrt{\alpha}}{k+2} > 0$$

(il primo membro è positivo essendo $p_{2n+1}/q_{2n+1} > \sqrt{\alpha}$) poichè abbiamo supposto che la successione $a_0, a_2, \ldots$ sia limitata. In caso contrario si avrebbe, per ogni $\varepsilon > 0$ e per qualche n, in virtù del lemma C: $0 < p^2_{2n+1} - q^2_{2n+1}\alpha < \varepsilon$, e il numero α non sarebbe del tipo M'.

D'altra parte nelle nostre ipotesi sarà, per il lemma C:

$$-\varepsilon < p^2_{2n} - q^2_{2n}\alpha < 0 \qquad (p_{2n}/q_{2n} < \sqrt{\alpha})$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e per qualche n, mentre se fosse limitata la successione $a_1, a_3, a_5, \ldots$ sarebbe $p^2_{2n} - q^2_{2n}\alpha < -\sqrt{\alpha}/(k+2)$, e di nuovo il numero α non sarebbe del tipo M'.

Tenendo conto del lemma A la nostra affermazione è così dimostrata. Una affermazione perfettamente simmetrica vale evidentemente per i numeri del tipo M'' e ne risulta in particolare dimostrato il teorema 2°. Implicitamente risulta anche provato che i numeri M', così come gli M'', costituiscono un insieme ovunque denso che ha la potenza del continuo.

Anche per i numeri α dei tipi M' ed M'' si può considerare l'ampiezza $\delta(\alpha)$ del massimo intervallo in cui non cadono punti di $I(\alpha)$. Nel caso dei numeri M'' si possono ancora fare su $\delta(\alpha)$ considerazioni perfettamente analoghe a quelle fatte nel caso dei numeri L; per i numeri M' le considerazioni riescono leggermente più complicate per la presenza dei punti di ascissa p^2, tuttavia, poichè questi punti si diradano allontanandosi dall'origine, si giunge anche qui alla conclusione che per ogni K fisso esiste una infinità (che ha la potenza del continuo) di numeri M' pei quali si ha $\delta(\alpha) > K$.

4. Dimostriamo adesso il teorema 3°.

Consideriamo i numeri α del tipo M', o quelli del tipo M'', e cominciamo col dimostrare che formano un insieme di misura nulla i corrispondenti numeri $\sqrt{\alpha}$.

Dopo quanto abbiamo visto al n. precedente questa asserzione risulta una immediata conseguenza del seguente:

LEMMA D. – *Fissata comunque una successione crescente di numeri interi positivi:*

$$\{ i_r \} \qquad i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$$

consideriamo l'insieme dei numeri ξ *tali che nel loro sviluppo in frazione continua:*

$$\xi = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

la successione:

$$\{ a_{i_r} \} \qquad a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}, \ldots$$

risulti superiormente limitata. Orbene l'insieme dei numeri ξ *cosiffatti è di misura nulla.*

La dimostrazione di questo lemma si può ottenere modificando lievemente, ed in modo ovvio, quella del teorema citato alla nota (²), o si può del resto trovare in una nota di F. BERNSTEIN (⁴).

In forza di questo lemma D risulta dimostrato che l'insieme dei numeri $\sqrt{\alpha}$ con α del tipo M' (oppure del tipo M'') è di misura nulla (la successione $\{i_r\}$ sarà quella degli interi positivi pari per gli M' e quella dei dispari per gli M'').

Il passaggio dai numeri $\sqrt{\alpha}$ ai numeri α è immediato.

Da: $0 \leq a < \sqrt{\alpha} < b$, segue ovviamente:

$$0 \leq a^2 < \alpha < b^2, \quad \text{e risulta} \quad b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Fissato comunque $H > 0$, consideriamo gli α nell'intervallo $(0, H)$; i corrispondenti $\sqrt{\alpha}$ staranno in $(0, \sqrt{H})$. Perciò se un $\sqrt{\alpha}$ è racchiuso in un intervallo (a, b) il corrispondente α sarà racchiuso in (a^2, b^2) e si potrà sempre fare in modo che l'ampiezza di quest'ultimo non superi l'ampiezza di (a, b) moltiplicata per la costante $2\sqrt{H} + 1$.

Il nostro teorema è così completamente dimostrato.

5. Dimostriamo ora il teorema 4°.

Possiamo limitarci a dimostrare che se α è del tipo M'' allora $I(\alpha)$ è denso sul semiasse positivo (analoga dimostrazione varrà negli altri casi).

Basterà far vedere che fissato un qualunque numero reale $\beta > 0$, ed un altro numero $\eta > 0$ è sempre possibile trovare una coppia di interi p, q, per cui si ha:

$$|p^2 - \alpha q^2 - \beta| < \eta. \tag{5}$$

Si scelga h_0 intero in modo che risulti: $\eta h_0 > 3\beta$. Per l'ipotesi fatta su α esiste una coppia m, n tale che (m, n interi):

$$0 < m^2 - n^2\alpha < \frac{\beta}{h_0^2}$$

e poniamo

$$m^2 - n^2\alpha = \varepsilon.$$

Risulterà allora, per qualche $h \geq h_0$ (h intero):

$$\beta/(h + 1)^2 < \varepsilon \leq \beta/h^2;$$

(⁴) Si veda: F. BERNSTEIN, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem,* Math. Ann. *71* (1912), 417-439. Più precisamente il teorema 2, pag. 428.

e quindi:

$$\varepsilon h^2 \leq \beta < \varepsilon\ (h+1)^2\ ;$$

ossia:

$$0 < (mh)^2 - (nh)^2\alpha \leq \beta < m^2(h+1)^2 - \alpha n^2(h+1)^2.$$

Se risulta $(mh)^2 - (nh)^2\alpha = \beta$, allora la (5) è certo soddisfatta per: $p = mh$, $q = nh$; in ogni caso avremo:

$$\varepsilon(h+1)^2 - \varepsilon h^2 = \varepsilon(2h+1) \leq \frac{\beta}{h^2}(2h+1) \leq \frac{3\beta}{h} \leq \frac{3\beta}{h_0} < \eta\ ;$$

perciò, posto $p = mh$, $q = nh$, sarà a maggior ragione: $\beta - (p^2 - q^2\alpha) < \eta$, e così il teorema è dimostrato.

Per dimostrare ora il teorema 5° basterà far vedere che tra i due punti: $c > 0$ e $(2\sqrt{\alpha}+1)$ cadono infiniti punti di $I(\alpha)$.

Se α è del tipo N la cosa discende dal teorema 4°, analoga osservazione se α è del tipo M''.

In caso contrario osserviamo che per il lemma B tutti i punti di ascissa: $p^2_{2n+1} - q^2_{2n+1}\alpha$, cadono a destra del punto di ascissa $c = \sqrt{\alpha}/(k+2)$. D'altra parte si ha:

$$0 < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \sqrt{\alpha} < \frac{1}{q^2_{2n+1}}\ ;$$

$$0 < p_{2n+1} - q_{2n+1}\sqrt{\alpha} < \frac{1}{q_{2n+1}}\ ;$$

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \sqrt{\alpha} + \frac{1}{p^2_{2n+1}}\ ;\quad \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} + \sqrt{\alpha} < 2\sqrt{\alpha} + 1\ ;$$

$$p_{2n+1} + q_{2n+1}\sqrt{\alpha} < (2\sqrt{\alpha}+1)q_{2n+1}\ ;$$

$$p^2_{2n+1} - q^2_{2n+1}\alpha < 2\sqrt{\alpha} + 1\ .$$

A sinistra dell'origine valgono ragionamenti analoghi. La prima parte del teorema è così dimostrata.

La seconda parte è quasi ovvia. Infatti fissati n intero ed $\varepsilon > 0$, se γ è un punto di accumulazione, esisterà qualche coppia p, q per cui si ha

$$0 < |p^2 - q^2\alpha - \gamma| < \frac{\varepsilon}{n^2}$$

e quindi:

$$0 < |(pn)^2 - (qn)^2\alpha - \gamma n^2| < \varepsilon\ ;$$

anche γn^2 è dunque un punto di accumulazione.