
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ADRIANO BARLOTTI

Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 10
(1955), n.4, p. 498-506.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_498_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo.

Nota di ADRIANO BARLOTTI (a Firenze) (*)

Sunto. - Si indica un'estensione, agli spazi lineari finiti di dimensione tre e di ordine p^h con $p \neq 2$, di un teorema sulle ovali dei piani lineari finiti, dimostrato recentemente da B. SEGRE.

1. Indichiamo con S_2 un piano lineare finito di ordine q cioè uno spazio lineare, di dimensione due, sopra un campo di GALOIS, γ , avente la caratteristica p e l'ordine $q = p^h$ (1).

Se chiamiamo *ovale* ogni serie di $q + 1$ punti di S_2 , di cui tre non risultino mai allineati, è ben noto che ogni conica non singolare di S_2 è un'ovale. Nell'ipotesi che risulti $p \neq 2$ questo risultato si può invertire. Vale cioè il teorema: *quando sia $p \neq 2$, ogni ovale di S_2 è una conica.* Questa interessante proprietà, espressa come congettura da P. KUSTAAHEIMO (2) nel caso particolare $h = 1$, è stata dimostrata recentemente da B. SEGRE (3) in modo semplice ed elegante.

Nella presente nota vogliamo mostrare come questo risultato si possa opportunamente estendere agli spazi lineari finiti di dimensione tre.

2. Detto S_3 uno spazio lineare finito, di dimensione tre e di ordine q , sopra il campo γ , ricordiamo che le quadriche non singolari di S_3 si dividono in due tipi a seconda che risultino o no rigate. Una quadrica non rigata (o a punti ellittici) contiene $q^2 + 1$ punti, e gode della proprietà che ogni retta di S_3 la incontra al più in due punti. Le quadriche rigate (o a punti iperbolici) sono costi-

(*) Pervenuta in redazione il 9 giugno 1955.

(1) Cfr., p. es., B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, Zanichelli, Bologna, 1948, vol. I, § 17. Per uno studio sintetico dei piani grafici finiti si veda G. ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite*, lezioni raccolte da G. ZACHER, Liguori, Napoli, 1952, cap. VI.

(2) Cfr. G. JARNEFELT e P. KUSTAAHEIMO, *An observation on finite geometries*, Den 11. Skandinaviske Matematikerkongress i Trondheim 1949, pp. 166-182.

(3) Cfr. B. SEGRE, a) *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », serie VIII, vol. XVII, 1954, pp. 141-142, b) *On ovals of finite linear plane*, « Canadian Journ. of Math. », (in corso di stampa).

tuite invece da $q^2 + 2q + 1$ punti. Ogni retta che incontri una di esse in più di due punti le appartiene per intero. Il numero massimo di punti che una tale quadrica ha in comune con un piano è $2q + 1$ (e questi $2q + 1$ punti risultano allora disposti lungo due rette).

Accanto a questi due tipi di quadriche vanno collocati i coni (o quadriche a punti parabolici). Un cono possiede $q^2 + q + 1$ punti, e possiamo ripetere per esso quanto abbiamo detto sopra per le quadriche a punti iperbolici, a proposito del comportamento, nei loro confronti, delle rette e circa il numero massimo dei punti contenuti in un piano.

Le proprietà ora enunciate valgono a caratterizzare, per $p \neq 2$, le quadriche di S_3 . Infatti, proveremo i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. - *Un insieme, I , di $q^2 + 1$ punti di S_3 , di cui tre non risultino mai allineati, è una quadrica a punti ellittici.*

TEOREMA 2. - *Un insieme, I , di $q^2 + 2q + 1$ punti di S_3 , tale che se una retta ha in comune con esso più di due punti vi giace per intero, o è una quadrica rigata (e allora nessun piano dello spazio contiene più di $2q + 1$ punti dell'insieme), o è costituito da un piano e da una retta non appartenente al piano.*

TEOREMA 3. - *Un insieme, I , formato da $q^2 + q + 1$ punti, e tale che ogni retta sulla quale siano situati più di due punti dell'insieme è tutta contenuta nell'insieme, è un piano, o un cono del secondo ordine (e in quest'ultimo caso ogni piano contiene al massimo $2q + 1$ punti di I).*

3. Occupiamoci dapprima del teorema 1. Nelle ipotesi fatte sussistono le seguenti proprietà:

a) *Nessun piano può contenere più di $q + 1$ punti di I .*

b) *Se un piano contiene due punti di I , ad esso appartengono $q + 1$ punti di I , che, per il teorema di Segre-Kustaanheimo (cfr. n. 1), formano una conica.*

c) *Detto P un qualsiasi punto di I , fra i piani per P ve ne è uno (solo) che non contiene altri punti di I oltre P .*

La a) corrisponde al seguente teorema, stabilito da R. C. BOSE (*): in un piano lineare finito di ordine q (con q dispari), se un

(*) Cfr. R. C. BOSE, « Mathematical theory of factorial design », Sankhya, Vol. VIII, pp. 107-166.

insieme contiene più di $q + 1$ punti, in esso vi sono sempre almeno tre punti allineati.

La *b*) si riconosce subito nel seguente modo. Detta r la retta che unisce quei due punti, un piano per r non può contenere più di $q - 1$ punti fuori di r [*a*]. Ma poichè i piani per r sono $q + 1$, e:

$$(q + 1)(q - 1) + 2 = q^2 + 1,$$

se sopra un piano per r fossero situati meno di $q + 1$ punti di I , ve ne dovrebbe essere un altro con più di $q + 1$, e ciò è impossibile.

Per la *c*) consideriamo un piano, α , per P , secante I secondo una conica Γ , e diciamo t la tangente a Γ in P . Intanto è ovvio che, se esiste un piano che non contenga altri punti di I oltre P , esso dovrà passare per t . D'altra parte ogni piano per t che contenga, oltre P , un ulteriore punto di I , contiene $q + 1$ punti di I [*b*]. Dei $q + 1$ piani per t , q esauriscono i $q^2 + 1$ punti di I ; il $(q + 1)$ -esimo è quello di cui dovevamo provare l'esistenza. Chiameremo questo piano il *piano tangente* ad I in P .

Dopo aver premesso queste osservazioni possiamo stabilire il nostro teorema. Supponiamo in un primo momento $q \geq 5$. Sia α_1 un piano secante I secondo una conica, Γ_1 , e indichiamo con A_1, A_2, \dots, A_5 cinque punti di essa. Prendiamo poi un altro piano, α_2 , ($\equiv \alpha_1$) per A_1 e A_2 e chiamiamo B_1, B_2, B_3 tre punti, diversi da A_1 e A_2 della conica, Γ_2 , formata dai punti di I che giacciono su α_2 . La Γ_2 sarà tangente in A_1 (in A_2) alla retta determinata su α_2 dal piano tangente ad I in A_1 (in A_2). Consideriamo infine un terzo piano α_3 passante per un punto, C , di I fuori di α_1 e di α_2 , per A_1 e per A_2 . Il piano α_3 taglierà I secondo una conica, Γ_3 , tangente in A_1 (in A_2) all'intersezione di α_3 con il piano tangente ad I in A_1 (in A_2).

La quadrica, Q_2 , passante per i nove punti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2, B_3, C$, contiene ovviamente le coniche Γ_1 e Γ_2 . Essa dovrà di conseguenza esser tangente alle tangenti a Γ_1 e Γ_2 in A_1 , cioè al piano tangente ad I in A_1 . Pertanto la sezione Σ di Q_2 con α_2 , avrà per tangente in A_1 l'intersezione di tale piano tangente con α_2 , cioè la tangente a Γ_2 in A_1 . Analogamente si vede che Σ ha anche in A_2 la stessa tangente di Γ_3 . Da ciò segue facilmente che Σ coincide con Γ_3 , onde Q_2 contiene (oltre a Γ_1 e Γ_2) anche Γ_3 .

Preso ora un qualunque punto P di I , si consideri un piano, α , per la retta PA_1 che non passi nè per A_2 , nè per alcuna delle tangenti in A_1 a Γ_1, Γ_2 , o Γ_3 ⁽⁵⁾.

(5) Tale piano esiste certamente, perchè $q \geq 5$.

Questo piano sega Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 , fuori di A_1 in tre punti distinti, e quindi la sua intersezione con Q_2 è una conica che passa per questi, per A_1 , ed è tangente in A_1 all'intersezione di α con il piano tangente ad I in A_1 . Ma questa conica è formata da tutti i punti comuni ad I e ad α , e quindi P appartiene a Q_2 .

Resta da provare che i punti di I esauriscono Q_2 , cioè che Q_2 non è nè a punti parabolici nè a punti iperbolici. Ma ciò è immediato, poichè, togliendo da una quadrica di uno di tali tipi rispettivamente, q o $2q$ punti, all'insieme residuo appartengono sempre (almeno) delle terne di punti allineati, e ciò va contro le ipotesi fatte per l'insieme I .

Consideriamo ora il caso $q=3$. Sia r una retta che non contiene alcun punto di I . Dei quattro piani per r , due, α_1 e α_2 , segano I secondo una conica, mentre gli altri due, α_3 e α_4 , sono tangenti ad I . Indichiamo con Q_2 la quadrica passante per i nove punti di I che stanno su α_1 , α_2 e α_3 . Poichè fra questi nove punti non ve ne sono tre allineati, Q_2 è a punti ellittici ⁽⁶⁾ e quindi, oltre i nove punti di cui sopra, possiede solo un ulteriore decimo punto P . Dobbiamo allora mostrare che P coincide con il punto P' di I situato su α_4 .

Per questo, detto R il punto di I situato su α_3 , si noti che P' non può stare sul piano tangente a Q_2 in R , altrimenti questo piano, contenendo due punti di I , ne dovrebbe contenere altri due [b] che però, oltre ad I , apparterrebbero anche a Q_2 . Allora la RP' non è tangente a Q_2 , e dato che non giace su α_3 , è una delle nove rette per R non appartenenti a questo piano. Poichè inoltre non può coincidere con una delle otto rette che vanno da R ai punti di I situati su α_1 e α_2 , si ha che RP' deve incontrare Q_2 , oltre che in R , in un ulteriore punto che non potendo stare nè in α_1 nè in α_2 , stà in α_4 e quindi è P' . Ne segue che Q_2 coincide con I .

Nella precedente dimostrazione abbiamo ripetutamente fatto uso del teorema di SEGRE-KUSTAAHEIMO, e quindi per la validità di essa è essenziale l'ipotesi $p \neq 2$. Resta però da vedere se tale condizione è effettivamente necessaria per poter senz'altro asserire che l'insieme I è una quadrica, oppure no.

Per $q=p=2$ si costruisce subito un insieme I che non è una quadrica. Infatti in tal caso ogni retta dello spazio contiene esattamente tre punti. Togliendo dai 15 punti dello spazio 10 punti,

⁽⁶⁾ Infatti si riconosce subito che nel caso $q=3$ un insieme di nove punti appartenenti a un cono o a una quadrica a punti iperbolici contiene sempre almeno tre punti allineati.

di cui 6 appartenenti ad un piano, si ottiene un insieme I che non è una quadrica.

Per $q=4$ invece, ogni insieme di 17 punti, di cui mai tre risultino allineati è una quadrica. Infatti in tale caso ogni ovale contiene cinque punti ed è quindi una conica. Inoltre, come vedremo nel numero seguente sussistono ancora le $a)$, $b)$ e $c)$ e si può quindi ripetere la dimostrazione effettuata nel caso in cui è q dispari e ≥ 5 .

Quando lo spazio sia di ordine $q-2^n$ con $n > 2$ non sappiamo dire se ogni insieme I è o no una quadrica. Nel numero seguente proveremo per tali insiemi alcune proprietà le quali oltre a dar luogo, nel caso $q=4$ alla validità delle $a)$, $b)$, $c)$, e quindi anche al teorema 1, possono forse risultare utili anche a risolvere la questione nel caso generale.

4. Supponiamo che lo spazio S_3 sia di ordine $q=2^n$ (con $n > 1$) e indichiamo ancora con I un insieme di q^2+1 punti, tale che tre punti dell'insieme non risultino mai allineati.

Sia P un qualunque punto di I . Delle q^2+q+1 rette per P , q^2 incontrano ulteriormente I ; le restanti $q+1$ che hanno in comune coll'insieme solo il punto P , saranno dette rette tangenti ad I in P . Vogliamo mostrare che *queste tangenti giacciono tutte in un medesimo piano* che dunque non contiene altri punti di I oltre P . A tale piano daremo il nome di *piano tangente* ad I in P .

Si considerino i $q+1$ piani passanti per una, t , delle rette tangenti ad I in P . Nessuno di quei piani può contenere $q+2$ punti di I (7), quindi ciascuno di essi contiene oltre P , al più q punti di I .

Un semplice computo mostra che uno almeno dei piani per t , che nel seguito indicheremo con α , contiene effettivamente q punti di I oltre P (8); essi, insieme a P , formano un'ovale, Γ . È noto che nelle nostre ipotesi le $q+1$ tangenti a Γ passano tutte per un medesimo punto, Q (9).

(7) Si ricordi che un insieme piano di $q+2$ punti, tale che tre punti dell'insieme non appartengano mai ad una medesima retta, non ammette rette tangenti. Cfr. B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Annales Academiae Scientiarum Fennicae, (A), n. 134, Helsinki, 1952, § 1, 4°.

(8) Infatti se ciascuno dei piani per t contenesse solo $q-1$ punti di I oltre P , l'insieme consterebbe di $(q-1)(q+1)+1=q^2$ punti.

(9) Cfr. loco cit. in (7).

Le rette che uniscono Q con i punti di I non possono essere tutte tangenti ad I , altrimenti aggiungendo Q ai punti di I si avrebbe un insieme di $q^2 + 2$ punti, dei quali tre non risultano mai allineati, ciò che, come è noto ⁽¹⁰⁾, non è possibile. Sia allora r una retta per Q che incontra I in due punti A e B . Si riconosce facilmente che ciascuno dei $q + 1$ piani passanti per r contiene esattamente $q + 1$ punti di I . Infatti nessuno di quei piani può contenere $q + 2$ punti di I , poichè ognuna delle rette lungo cui essi incontrano il piano α contiene un solo punto di I [cfr. (?)]. Inoltre non può nemmeno accadere che uno di quei piani contenga, oltre A e B , meno di $q - 1$ punti di I poichè:

$$(q + 1)(q - 1) + 2 = q^2 + 1.$$

Ne segue quindi che ogni piano per r taglia I lungo un'ovale.

Si riconosce ora subito che tutte le rette per Q che incontrano I , e non appartengono ad α , sono delle secanti di I , cioè incontrano l'insieme I in due punti. Supponiamo infatti che una di esse, s , sia tangente ad I . Il piano, β , che contiene r ed s taglia I secondo un'ovale di cui due tangenti (s e la retta comune ad α e β) passano per Q . Ciò è impossibile perchè per Q passa anche la retta r che invece incontra la medesima ovale in due punti.

Siamo finalmente in grado di provare l'esistenza del piano tangente ad I in P . Un piano per t (diverso da α) che contenga oltre P un ulteriore punto, P_1 , di I , contiene $q + 1$ punti di questo insieme: basta per questo osservare che la retta QP_1 è una secante. Ma allora q dei piani per t esauriscono i $q^2 + 1$ punti dell'insieme. Rimane un piano che non contiene, oltre P , alcun punto di I . Resta così provata in generale la c).

Una conseguenza immediata del fatto che in ogni punto dell'insieme I esiste un piano tangente è che *nessun piano può contenere $q + 2$ punti di I* . Infatti se esistesse un piano, β' , contenente $q + 2$ punti di I , il piano tangente ad I in uno di questi dovrebbe tagliare β' lungo una retta contenente due punti di I [cfr. (?)] e ciò è assurdo. È dunque dimostrata nel caso generale anche la a).

Dopo aver stabilito questa proprietà si può ripetere quanto è detto nel n. 3 per provare la prima parte della b), cioè, in

⁽¹⁰⁾ Un insieme di punti di cui tre non risultino mai allineati può contenere al più $q^2 + 1$ punti. Cfr. loco cit. in (?), § 2, 6°.

generale, se un piano contiene due punti di I , esso sega I secondo un'ovale. E quindi nel caso $q = 4$, vale anche tutta la b).

Mostriamo ora che da un punto, H , non appartenente ad I escono $q + 1$ tangenti di I che appartengono tutte ad un medesimo piano.

Sia h una secante di I che contiene H ⁽¹¹⁾. Consideriamo due piani passanti per h : ciascuno di questi sega I secondo un'ovale. Indichiamo con t_1 e t_2 le tangenti a queste ovali che escono da H . Il piano individuato da t_1 e da t_2 contiene due punti di I e quindi taglia I secondo un'ovale. Da H escono due tangenti a questa (le rette t_1 e t_2), e perciò anche tutte le altre rette di quel piano che passano per H sono tangenti a quell'ovale e di conseguenza anche ad I . Come già precedentemente è stato osservato, da H non può uscire nessun'altra tangente di I ⁽¹²⁾.

Notiamo infine che per un punto, H , non appartenente ad I passano $q + 1$ piani tangenti ad I . Infatti ogni piano tangente ad I che passi per H contiene una retta per H tangente all'insieme I e, viceversa, per ogni retta tangente ad I si può condurre un solo piano tangente al medesimo insieme. Tre di quei piani tangenti non possono mai appartenere ad un medesimo fascio ⁽¹³⁾.

5. Passiamo ora alla dimostrazione del teorema 2.

Osserviamo che se un piano, α , contiene più di $2q + 1$ punti di I , tutti i suoi punti sono di I . Infatti in α stanno almeno due rette, r ed s , di I e un punto, P , fuori di queste. Allora su

⁽¹¹⁾ Si riconosce subito che una tale retta esiste certamente.

⁽¹²⁾ La proprietà ora stabilita si può dimostrare anche in altro modo. Cominciamo con l'osservare che non esistono piani che non contengono punti di I , cioè un piano o è tangente ad I , o taglia I secondo un'ovale. Infatti, sia k una retta che non contiene nessun punto di I . Poichè se un piano contiene due punti di I ne contiene $q + 1$, ed essendo:

$$(q - 1)(q + 1) + 2 = q^2 + 1,$$

risulta che $q - 1$ dei piani per k tagliano I secondo un'ovale, mentre i due restanti sono tangenti ad I .

Allora, dato che i piani tangenti ad I sono tanti quanti i punti di questo insieme, i piani che tagliano I secondo un'ovale risultano in numero uguale ai punti dello spazio che non appartengono ad I . Poichè su ogni piano secante c'è uno e un solo punto da cui escono $q + 1$ tangenti ad I che stanno sul piano stesso, e dato che nessuna retta per quel punto che non appartenga al piano può essere tangente ad I , si ritrova la proprietà che volevamo stabilire.

⁽¹³⁾ Cfr. il primo capoverso della nota ⁽¹²⁾.

ogni retta per P , distinta dalla congiungente P col punto Q comune ad r e s si trovano tre punti di I e perciò ogni tale retta, e di conseguenza anche tutto il piano α , salvo al più i punti della PQ , appartengono ad I . Ma si vede subito che anche i punti della PQ sono in I . Infatti se si unisce un punto, H , di questa retta con un punto, K , di α , fuori di essa, di r e di s , si ottiene una retta su cui giacciono tre punti di I : le intersezioni con r e s , e K . Ma allora tutta la retta HK fa parte di I , che quindi contiene anche H .

Fuori di α l'insieme I possiede ancora q punti. La retta che unisce due di questi incontra α in un terzo punto di I e perciò è tutta formata da punti di I .

Supponiamo invece che nessun piano contenga più di $2q + 1$ punti di I . Al nostro insieme appartengono delle rette: sia r una di esse. Ogni piano per r non può contenere più di $2q + 1$ punti di I , cioè più di q punti di I fuori di r ; e poichè i punti di I sono $q^2 + 2q + 1$, si ha che ogni tale piano contiene, fuori di r , q punti di I , appartenenti necessariamente ad una retta, s_i ($i = 1, \dots, q + 1$).

Si riconosce facilmente che le s_i sono a due a due sghembe. Infatti, si esclude subito che due tali rette possano incontrarsi fuori di r , poichè nel loro piano, che conterrebbe anche r , si verrebbero a trovare più di $2q + 1$ punti di I . Rimane ancora da considerare l'eventualità che due s_i si appoggino in un medesimo punto alla retta r . Intanto è chiaro che per questo punto non possono passare tutte le s_i , poichè allora da esso uscirebbero $q + 2$ rette di I e perciò un piano, non passante per quel punto, incontrerebbe tali rette, e di conseguenza anche I , in (soli) $q + 2$ punti ⁽¹⁴⁾. Supponiamo perciò che due (o più) s_i incontrino la r in un medesimo punto, ma che vi sia almeno una retta s_i , chiamiamola s' , non passante per esso. In tal caso la retta s' incontrerebbe il piano, delle due s_i incidenti, fuori di queste due rette, e quindi si avrebbe ancora un piano contenente più di $2q + 1$ punti di I .

Se ripetiamo il ragionamento partendo invece che dalla r da una qualunque delle rette s_i si trovano altre $q + 1$ rette, r_i ($i = 1, 2, \dots, q + 1$), sghembe fra loro e tra le quali è la r ⁽¹⁵⁾. L'insieme I risulta cioè doppiamente rigato.

⁽¹⁴⁾ E ciò è impossibile poichè, per le ipotesi fatte, $q + 1$ di quei punti dovrebbero essere allineati (cfr. il teorema di BOSE richiamato nel n. 3) e allora, per quanto abbiamo visto sopra, quel piano dovrebbe contenere un'ulteriore retta di I e non un solo punto.

⁽¹⁵⁾ Si noti che partendo da due diverse s_i si trovano sempre le medesime r_i , in quanto ciascuna di queste è incidente a tutte le s_i .

Fissiamo ora su r_1 tre punti, e associamo a questi le intersezioni delle s_i che li contengono con r_2 e r_3 . Si ottengono nove punti per cui passa una quadrica che, poichè contiene r_1, r_2, r_3 e di conseguenza, tutte le s_i , è formata da tutti e soli i punti dell'insieme I e perciò coincide con esso.

Il teorema non vale per $p = 2$. Infatti se consideriamo in un piano $q + 2$ punti, di cui mai tre allineati ⁽¹⁶⁾, e proiettiamo questi da un punto esterno al piano, otteniamo un insieme di $q^2 + 2q + 1$ punti (tale che ogni piano contiene al massimo $2q + 1$ punti dell'insieme), che non costituiscono una quadrica rigata.

6. Consideriamo infine il teorema 3.

Nell'ipotesi che vi sia un piano sul quale si trovino più di $2q + 1$ punti di I , questo insieme coincide con tale piano (cfr. n. 5).

Supponiamo perciò che nessun piano contenga più di $2q + 1$ punti di I . Anche ora ad I appartengono certamente delle rette. Detta r una di queste, fra i $q + 1$ piani passanti per r ve ne sono q che tagliano I secondo un'ulteriore retta. *Queste q rette incontrano la r in un medesimo punto*, V . Infatti due di quelle rette non possono incontrarsi fuori di r (cfr. n. 5). Inoltre due di esse, s ed s' , non possono nemmeno risultare sghembe, poichè in tal caso, mandando da un punto di I , fuori di r , s ed s' , la retta, h , incidente ad s e ad s' , si troverebbe che h , la quale necessariamente è sghemba con r ⁽¹⁷⁾, apparterrebbe ad I , mentre abbiamo visto che uno dei $q + 1$ piani passanti per r non incontra, fuori di questa retta, l'insieme I .

Se ora notiamo che un piano non passante per V taglia I secondo una conica, risulta che I si ottiene proiettando tale conica da V . Ciò è sufficiente per asserire che I è un cono del secondo ordine con il vertice in V .

Il teorema non sussiste in uno spazio finito di caratteristica $p = 2$, se $q > 4$. Infatti in tal caso si hanno in un piano qualsiasi delle ovali che non sono coniche ⁽¹⁸⁾. Proiettando una di queste da un punto esterno al suo piano otteniamo un insieme di $q^2 + q + 1$ punti (dei quali mai più di $2q + 1$ risultano complanari) che, manifestamente non è un cono del secondo ordine.

⁽¹⁶⁾ Cfr. loco cit. in (7).

⁽¹⁷⁾ Se h fosse incidente ad r il piano di queste due rette, contenendo una terza retta di I , verrebbe a incontrare I in più di $2q + 1$ punti.

⁽¹⁸⁾ Cfr. loco cit. in (3) b), n. 4.