Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Le trasformazioni puntuali fra spazi sovrapposti nei casi particolari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 513–521.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_513_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Le trasformazioni puntuali fra spazi sovrapposti nei casi particolari.

Nota di Francesco Speranza (a Bologna)

Sunto. - *Si classificano e si studiano le trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti nelle coppie di punti corrispondenti che presentano particolarità.*

1. *Coppie di punti corrispondenti particolari e loro specie.*

In una precedente Nota [1] ho esaminato una trasformazione puntuale T fra spazi sovrapposti nell'intorno di una coppia generica $(A, \bar{A})$. Indicata con Ω l'omografia subordinata da T fra le stelle A e $\bar{A}$, ho considerato due successioni di spazi S_k ed $\bar{S}_k$ $(1 \leq k \leq r-1)$, essendo $S_1 \equiv \bar{S}_1 \equiv A\bar{A}$; S_{k+1} $(\bar{S}_{k+1})$ il congiungente S_k ed $\Omega^{-1}S_k$ $(\bar{S}_k$ ed $\Omega\bar{S}_k)$. Per definire le due successioni debbo necessariamente supporre $S_k \neq \Omega^{-1}S_k$, $\bar{S}_k \neq \Omega\bar{S}_k$ per ogni $k < r-1$. Dico « particolare » la coppia $(A, \bar{A})$ quando non sono verificate le condizioni precedenti.

Ora risulta subito che *la coppia* $(A, \bar{A})$ *è particolare quando, e solo quando, vi sono spazi uniti in* Ω.

Se la minima dimensione degli spazi uniti in Ω è $k = r - p$, dirò che la coppia è *particolare di specie* p. V'è allora un solo S_{r-p} unito; se ve ne fossero due, infatti, essi avrebbero in comune

[1] Cfr. il presente volume di questo Bollettino, a pag. 61.

almeno un S_{r-p-1} che sarebbe unito, contro l'ipotesi che $r-p$ sia il minimo indice per cui si ha uno spazio unito.

Ω subordina in S_{r-p} un'omografia Ω_{r-p} generica [nel senso che la coppia $(A, \bar{A})$ è generica, come precisato più sopra, rispetto ad Ω_{r-p}]: infatti le ipotesi di genericità sono verificate per $k < r-p$. Ω subordina fra gli iperpiani passanti per S_{r-p} (costituenti un Σ_{p-1} dello spazio duale) una omografia γ, dallo studio della quale si può ricavare un'ulteriore classificazione dei casi particolari di specie p. L'omografia γ può essere generale o particolare (2) secondo che la stella che contiene i sistemi fondamentali è Σ_{p-1} o no.

Si noti che, poichè l'imporre ad un S_{r-p} di essere unito comporta p condizioni, il luogo delle coppie di specie p è una V^*_{r-p} (quando non invada una V_h^* di dimensione maggiore), immersa nelle V_k^* $(k > r-p)$ (3).

2. *Luogo Γ delle intersezioni di rette corrispondenti in Ω e incidenti.*

Anzitutto, essendo Ω_{r-p} generica, Γ si spezza in una C^{r-p} razionale normale di S_{r-p}, e in una parte residua, che ora esamino cominciando dal caso $p=1$.

Considero un generico S_{r-1}. Se chiamo corrispondenti punti di intersezione con S_{r-1} di rette corrispondenti in Ω, ottengo un'omografia, i cui punti uniti sono le intersezioni di Γ con S_{r-1}. Di questi, $r-1$ sono dovuti a C^{r-1}, e quindi la parte residua, avendo una sola intersezione con S_{r-1}, è una retta s. Se poi l'S_{r-1} considerato contiene s, l'omografia ha come elementi uniti i punti di s e altri $r-2$ punti: quindi s è incidente a C^{r-1}.

Se $p > 1$, suppongo dapprima che vi sia un numero finito di S_{r-p+1} uniti in γ: la coppia $(A, \bar{A})$, considerata come appartenente ad uno di essi, è particolare di 1ª specie, e il luogo relativo all'S_{r-p+1} si spezza in C^{r-p} ed in una retta dell'S_{r-p+1}. Γ è quindi una varietà pura, spezzata in C^{r-p} ed in alcune rette (se un S_{r-p+1} va contato h volte, converrò di contare altrettante volte la retta relativa).

(2) Cfr. BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, (Principato, Messina, (1923); pag. 77.

(3) Le condizioni analitiche perchè la coppia considerata sia particolare si trovano nella nota di L. CANTONI, *Sulle trasformazioni puntuali fra spazi sovrapposti nell'intorno di un punto unito*, a pag. 214 del presente volume di questo Bollettino. Sopprimendo nella matrice $p-1$ righe a partire dall'ultima, si hanno le condizioni affinchè la coppia considerata sia particolare di specie p almeno.

Se esiste un sistema lineare ∞^k di S_{r-p+1} uniti in γ, si ha una retta per ogni S_{r-p+1}; al variare di questo, la retta descrive un S^*_{k+1} (eventualmente da contare più d'una volta, secondo le solite convenzioni). Γ è dunque in tale caso una varietà impura.

Abbiamo visto che gli spazi S^*_{k+1} sono incidenti a C^{r-p}; essi sono inoltre indipendenti. Infatti, considerato un iperpiano che ne contenga almeno due, essi sono spazi fondamentali per l'omografia subordinata sull'iperpiano, e quindi, per il teorema di C. SEGRE, sghembi. Si ha

$$\Sigma\, k_i \leq p - m \ (^4) \qquad\qquad (1 \leq i \leq m)$$

dove k_i è la dimensione dell'i^{esimo} sistema di S_{r-p+1} uniti.

Se in un sistema Σ_k di S_{r-p+1} uniti confluiscono dei sistemi di dimensione minore, si converrà che in S^*_{k+1} siano immersi i relativi spazi, componenti di Γ.

Quando gli indici k_i sono tutti nulli, Ω subordina su un iperpiano che contenga α rette s_i di Γ, l'S_{l_i} osculatore a C^{r-p} nella sua intersezione con s_i, ed altri β spazi S_{m_h} osculatori a C^{r-p} un'omografia del tipo (secondo le notazioni di PREDELLA):

$$[(1\ \underbrace{0 \ldots 0)}_{l_1}\ (1\ \underbrace{0 \ldots 0)}_{l_2} \ldots (1\ \underbrace{0 \ldots 0)}_{l_\alpha}\ \underbrace{(0 \ldots 0)}_{m_1} \ldots \underbrace{(0 \ldots 0)}_{m_\beta}\ 0 \ldots 0]$$

Se invece qualche indice k_i è diverso da zero (e quindi Γ è impura), Ω subordina su un iperpiano contenente $S^*_{k_1+1}, \ldots, S^*_{k_\gamma+1}$, gli spazi $S_{l_1}, \ldots, S_{l_\gamma}$ osculatori a C^{r-p} nelle intersezioni con i detti spazi, ed altri β spazi $S_{m_1}, \ldots, S_{m_\beta}$ osculatori a C^{r-p} un'omografia del tipo

$$[(k_1 + 1\ \alpha_1{}^1 \ldots \alpha_1{}^{\lambda_1}\ \underbrace{0 \ldots 0)}_{l_1} \ldots (k_\gamma + 1\ \alpha_\gamma{}^1 \ldots \alpha_\gamma{}^{\lambda_\gamma}\ \underbrace{0 \ldots 0)}_{l_\gamma}\ \underbrace{(0 \ldots 0)}_{m_1} \ldots \underbrace{(0 \ldots 0)}_{m_\beta}\ 0 \ldots 0]$$

dove gli indici $\alpha_j{}^i$ dipendono dagli spazi subordinati a Γ che cadono in $S^*_{k_j+1}$.

3. *Riferimenti intrinseci.*

Sia $(A, \bar{A})$ una coppia di specie p di una trasformazione T. Assumo S_{r-p} come spazio $x_2 = \ldots = x_{p+1} = 0$; poichè Ω_{r-p} è generica, posso fissare in S_{r-p} il riferimento come nel caso generale (^{5}). Posto $X_k = \dfrac{x_k}{x_{r+1}}$, $\bar{X}_i = \dfrac{\bar{x}_i}{\bar{x}_1}$, le equazioni di T sono:

$$\bar{X}_i = F_i(X_k) \qquad (1 \leq i - 1,\ k \leq r). \tag{1}$$

(^{4}) Cfr. op. cit. in (^{2}), l. c.
(^{5}) Cfr. l. c. in (^{1}).

Dagli sviluppi in serie di MAC LAURIN delle F_i, troncati ai termini di 1° grado, si hanno le equazioni, in coordinate omogenee, di Ω:

$$\overline{X}_i = \sum_{1}^{r}{}_k\, a^k{}_{i-1}\, X_k \qquad (2 \leq i \leq r+1). \tag{2}$$

In conseguenza delle posizioni fatte, il quadro dei coefficienti $a^k{}_{i-1}$ ha l'aspetto

$$\left\| \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} a_1^2 \ . \ . \ . \ a_1^{p+1} \\ \cdots\cdots \\ a_p^2 \ . \ . \ . \ a_p^{p+1} \end{array} & \\ (-1)^{r-p} & \begin{array}{c} a_{p+1}^2 \ . \ . \ a_{p+1}^{p+1} \end{array} & \\ & \begin{array}{c} a_{p+2}^2 \ . \ . \ a_{p+2}^{p+1} \\ \cdots\cdots \\ a_r^2 \ . \ . \ . \ a_r^{p+1} \end{array} & \begin{array}{ccc} (-1)^{r-p} & & \\ & \ddots & \\ & & (-1)^{r-p} \end{array} \end{array} \right\|$$

Tratterò separatamente il caso in cui γ è generale, e il caso in cui γ è particolare.

a) Caso in cui γ è generale.

Si hanno m sistemi di S_{r-p+1}, ed altrettanti di S_{r-1}, uniti in Ω: siano essi Σ_{h_k} e Ψ_{h_k} (ciascun sistema Ψ ha la stessa dimensione h_k del sistema Σ coniugato). Per ipotesi la stella di appartenenza dei sistemi Σ_{h_k} è la stella di sostegno S_{r-p}, e quindi si ha $\sum_{1}^{m}{}_k(h_k+1)=p$(6).

Il luogo Γ è costituito da una varietà pura od impura, a componenti semplici, che si spezza nella C^{r-p} relativa ad S_{r-p} ed in m spazi $S^*{}_{h_k+1}$.

Scelgo i rimanenti vertici della piramide fondamentale come segue:

$$A_2, \ldots, A_{h_1+2} \text{ in } S^*{}_{h_1+1}; \ldots; A_{\sum_1^{i-1} h_k+i+1}, \ldots, A_{\sum_1^{i} h_k+i+1}$$

$$\text{in} \quad S^*{}_{h_i+1}; \ldots; A_{\sum_1^{m-1} h_k+m+1}, \ldots, A_{\sum_1^{m} h_k+m+1} \equiv A_{p+1} \text{ in } S^*{}_{h_m+1}.$$

Dopo queste scelte, il sistema Σ_{h_i} è individuato dagli h_i+1 spazi $x_2 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_{p+1} = 0$, e il sistema Ψ_{h_i} dagli h_i+1 iperpiani $x_j = 0$ $(\sum_1^{i-1} h_k + i + 1 \leq j \leq \sum_1^{i} h_k + i + 1)$.

(6) Cfr. op. cit. in (2), l. c.

Imponendo che alla retta $x_1 = ... = x_{k-1} = x_{k+1} = ... = x_r$ corrisponda in Ω la retta $x_2 = ... = x_{k-1} = x_{k+1} = ... = x_{r+1}$ si ha

$$a^k_{i-1} = \delta^k_i \, a_k \qquad (1 \leq i-1 \leq r\,;\ 2 \leq k \leq p+1) \tag{3}$$

dove $\delta^k_i = 1$ se $i = k$; $= 0$ se $i \neq k$.

Ma, affinchè i sistemi Σ_{h_i} siano costituiti da spazi uniti, dev'essere $a_2 = ... = a_{h_1+2}\,; ...\,; a_{\sum_1^{i-1} h_k + i + 1} = ... = a_{\sum_1^{i} h_k + i + 1}\,; a_{\sum_1^{m-1} h_k + m + 1} = ... = a_{p+1}$. Indicherò con $\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_m$ questi m valori comuni. Le equazioni di Ω diventano:

$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{X}_j = \alpha_i X_j & \left(\sum_1^{i-1} h_k + i + 1 \leq j \leq \sum_1^{i} h_k + i + 1\,;\ 1 \leq i \leq m\right) \\ \overline{X}_{p+2} = (-1)^{r-p} X_1 & \\ \overline{X}_{k+1} = (-1)^{r-p} X_k & (p+2 \leq k \leq r). \end{array}\right. \tag{4}$$

Le α_i sono m invarianti proiettivi, i cui rapporti danno gli invarianti di γ; un altro significato geometrico è dato dalle intersezioni degli spazi $S^*_{h_i}$ con C^{r-p}.

Cerchiamo ora le equazioni di Γ. Consideriamo due rette corrispondenti in Ω, di equazioni:

$$X_1 : \lambda_1 = ... = X_r : \lambda_r$$

e

$$X_2 : (-1)^{r-p} \alpha_1 \lambda_2 = ... = X_{p+1} : (-1)^{r-p} \alpha_m \lambda_{p+1} = ... = X_{r+1} : \lambda_r$$

la condizione d'incidenza è espressa dall'annullarsi della matrice

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_2 & ... & \lambda_{h_1+2} & ... & \lambda_{p+1} & \lambda_{p+2} & \lambda_{p+3} ... \lambda_r \\ (-1)^{r-p}\alpha_1\lambda_2 & ... & (-1)^{r-p}\alpha_1\lambda_{h_1+2} & ... & (-1)^{r-p}\alpha_m\lambda_{p+1} & \lambda_1 & \lambda_{p+2} ... \lambda_{r-1} \end{array} \right\|$$

Se $\lambda_2 = ... = \lambda_{p+1} = 0$, si ottiene un punto della C^{r-p}. Supposto che non tutti i parametri $\lambda_2, ..., \lambda_{p+1}$ siano nulli, essi dovranno annullarsi tutti, all'infuori di $\lambda_{\sum_1^{i-1} h_k + i + 1}, ..., \lambda_{\sum_1^{i} h_k + i + 1}$.

Se ne ricavano le equazioni di $S^*_{h_i+1}$.

$$\begin{array}{ll} X_1 = (-1)^{r-p} \alpha_i^{r-p}; \; X_2 = ... = X_{\sum_1^{i-1} h_k + i} = X_{\sum_1^{i} h_k + i + 2} = ... = X_{p+1} = 0 & \\ X_j = (-1)^{(r-p)(r-j+1)} \alpha_i^{r-j+1}. & (p+2 \leq j \leq r). \end{array} \tag{5}$$

Le intersezioni di $S^*_{h_i+1}$ con C^{r-p} corrispondono ai valori

$\frac{\lambda}{\mu} = (-1)^{r-p}\alpha_i$ del parametro $\frac{\lambda}{\mu}$ relativo a C^{r-p} (7). Tali punti danno un significato geometrico agli invarianti α_i.

Dalle equazioni canoniche di Ω si ricavano immediatamente le equazioni delle ∞^{r+1} omografie che subordinano, fra le stelle A, $\bar{A}$, la Ω, e da queste le loro equazioni caratteristiche:

$$\Pi_1^m{}_k(\rho - \alpha_k)^{h_k+1} \cdot [\rho^{r-p+1} - \lambda_1\rho^{r-p} - \Sigma_{p+2}^{r+1}{}_k\, (-1)^{(r-p)(r-k+1)}\lambda_k\rho^{r-k+1}] = 0$$

essendo le $\lambda_k (1 \leq k \leq r+1)\, r+1$ parametri (le omografie tangenti si hanno per $\lambda_{r+1} = 1$).

La radice α_i dà, per qualsiasi gruppo di valori delle λ_k, almeno un punto unito di $S^*{}_{h_i+1}$, da contarsi $h_i + 1$ volte.

D'altra parte solo le radici α_k possono abbassare ad $r-1$ la caratteristica del determinante caratteristico $A(\rho)$, e tale caratteristica non è mai minore di $r - h_k - 1$. Perchè ciò avvenga α_k dev'essere radice almeno $(h_k + 2)$–pla (cioè radice dell'equazione residua) ed inoltre $\lambda_{\sum_1^{k-1} h_j+k+1} = \ldots = \lambda_{\sum_1^{k} h_j+k+1} = 0$. Posso ancora imporre ad α_k di annullare le prime $r-p$ derivate dell'equazione residua, cioè di essere radice $(r - p + h_k + 2)$–pla dell'equazione caratteristica. Per ognuna delle omografie soddisfacenti a queste condizioni $S^*{}_{h_k+1}$ è luogo di punti uniti, ed in esso confluiscono altri punti uniti, ciascuno da contarsi un certo numero di volte. Si hanno perciò m classi di omografie per le quali $S^*{}_{h_k+1}$ è luogo di punti uniti, mentre altri $m-1$ punti uniti cadono negli spazi $S^*{}_{h_i+1}$ $(i \neq k)$.

I loro invarianti forniscono nuovi significati geometrici delle quantità α_i.

Per terminare di fissare il riferimento, suppongo che fra i numeri $h_i + 1$ ve ne siano n distinti, e siano $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ $(n \leq m)$, con $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n$. Se vi sono $r - \varepsilon_n$ rette caratteristiche uscenti da A, distinte fra di loro e dagli spigoli già fissati della piramide fondamentale, fra queste ne considero $r - \varepsilon_{n-1}$; fra queste ultime ne considero $r - \varepsilon_{n-2}$, ecc.. Ciascuno di questi n gruppi di rette individua uno spazio $S^{**}{}_{r-\varepsilon_j}$; considerate le sue intersezioni con gli $S^*{}_{h_i+1}$ per i quali $h_i + 1 = \varepsilon_j$, le assumo come vertici A_i $(2 \leq i \leq p)$. In quanto al punto unità, si conosce già l'S_p per esso e per i vertici $A_2, \ldots, A_{p+1}$; supposto che esistano altre $r-p$ rette caratteristiche per A, distinte fra loro e dagli spigoli della piramide fondamentale, assumo l'intersezione dell'S_{r-p} che le contiene con S_p come punto unità.

(7) Cfr. l. c. in (1).

È stato già fatto rilevare [cfr. l. c. in (1)] che, per $r \geq 4$, fra le rette caratteristiche sussistono dei legami (8), ma tali legami non pregiudicano la scelta fatta.

b) Caso in cui γ è particolare.

Indico ancora con $\Sigma_1 \dots \Sigma_{h_m}$ gli m sistemi di S_{r-p+1} uniti in γ; la stella d'appartenenza è però subordinata a quella che ha per sostegno S_{r-p}. Si ha perciò $\sum_1^m (h_k + 1) = q < p$. Il luogo Γ si spezza nella C^{r-p} ed in m spazi $S^*_{h_i+1}$.

Procedendo come in a) si trova

$$a^k_{i-1} = \delta^k_i a_k \quad (2 \leq k \leq q + 1\,;\ 1 \leq i - 1 \leq r).$$

In quanto ai restanti coefficienti a^k_{i-1}, si noti che le $x_2, \dots, x_{p+1}$ possono considerarsi come coordinate omogenee nel sistema ∞^{p-1} di S_{r-p+1} di sostegno S_{r-p}. Imponendo allora che si corrispondano opportunamente gli spazi contenenti S_{r-p}, si possono rendere nulli tutti i detti coefficienti per valori degli indici tali che $p + 2 \leq$ $\leq i \leq r + 1$; $q + 2 \leq k \leq p + 1$, mentre quelli restanti divengono tali che l'equazione di γ assume forma canonica.

Fra i coefficienti a^k_{i-1} vi sono m invarianti proiettivi [(cfr. a)], i cui rapporti sono gl'invarianti di γ. Le equazioni degli $S^*_{h_k+1}$ si trovano operando come in a). Per le omografie che subordinano la Ω fra le stelle A, $\bar{A}$ valgono considerazioni analoghe a quelle già svolte. Mediante le rette caratteristiche si può terminare di fissare il riferimento.

4. *I riferimenti intrinseci nel caso dello S_3.*

In questo numero fisso i riferimenti nell'ipotesi $r = 3$, seguendo, per quanto concerne l'intorno del 2° ordine, metodi diversi da quelli indicati nel n. 3, per altro assai semplici.

Si hanno i seguenti casi:

Caso generale: la trattazione rientra in quella svolta nel l. c. in (1).

Caso di specie 1: v. più sotto.

Caso di specie 2: γ è una proiettività; se non è identica, v. più sotto; se γ è identica, v. op. cit. in (1), n. 5.

Se $p = 1$, supposto che i piani osculatori alle curve corrispondenti in T alle rette S_1 ed $\Omega^{-1}S_1$ non siano indeterminati, e siano distinti dai piani già fissati, li assumo come piani $x_4 = 0$, $x_2 = x_3$: il riferimento è fissato. Se le equazioni di T, dopo la normalizza-

(8) Il caso $p = r - 1$ e γ del tipo [1], cioè identica, è già stato trattato nel lavoro cit. in (1).

zione del 1° ordine, sono

$$\bar{X}_2 = \alpha_1 X_2 + \Sigma\, a_{(2)}^{ij} X_i X_j + [3]\,;\ \bar{X}_3 = X_1 + \Sigma\, a_{(3)}^{ij} X_i X_j + [3]\,;$$
$$\bar{X}_4 = X_3 + \Sigma\, a_{(4)}^{ij} X_i X_j + [3]$$

le ipotesi precedenti si traducono nelle $a_{(2)}^{1} \neq 0$, $a_{(2)}^{33} a_{(3)}^{33} \neq 0$, e la normalizzazione porta alle seguenti equazioni canoniche di T:

$$(6)\qquad \begin{cases} \bar{X}_2 = \alpha_1 X_2 + \Sigma\, a_{(2)}^{ij} X_i X_j + [3]\,; \\ \bar{X}_3 = X_1 + X_1\gamma_1 + X_2\delta_1 + a_{(2)}^{33} X_3^2 + [3]\,; \\ \bar{X}_4 = X_3 + X_2\varphi_1 + X_3\psi_1 + [3] \end{cases}$$

dove δ_1 e φ_1 (γ_1 e ψ_1) sono forme lineari in X_1, X_2, X_3 (X_1, X_2). Il punto unità — e quindi anche il riferimento — può scegliersi in 2 modi equivalenti. Si hanno 16 invarianti fra i coefficienti del 2° ordine.

Se $p = 2$, suppongo dapprima che γ sia una proiettività generica (non parabolica); le equazioni di T sono del tipo:

$$\bar{X}_2 = \alpha_1 X_2 + \Sigma\, a_{(2)}^{ij} X_i X_j + [3]\,;\ \bar{X}_3 = \alpha_2 X_3 + \Sigma\, a_{(3)}^{ij} X_i X_j + [3]\,;$$
$$\bar{X}_4 = - X_1 + \Sigma\, a_{(4)}^{ij} X_i X_j + [3].$$

Considero le calotte σ_2, σ'_2 corrispondenti in T^{-1} alle calotte dei piani $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ di centro $\bar{A}$. Supposto che le loro tangenti asintotiche non siano indeterminate, e siano distinte fra di loro e dalla retta S_1 le assumo come rette:

$$x_1 = x_2 = 0\,;\ x_1 = x_3,\ x_2 = 0\,;\ x_1 = x_3 = 0\,;\ x_3 = 0,\ x_1 = x_2\,.$$

Si hanno le equazioni canoniche:

$$(7)\qquad \begin{cases} \bar{X}_2 = \alpha_1 X_2 + a_{(2)}^{11} X_1 (X_1 - X_3) + X_2\varphi_1 + [3] \\ \bar{X}_3 = \alpha_2 X_3 + a_{(3)}^{11} X_1 (X_1 - X_2) + X_3\psi_1 + [3] \\ \bar{X}_4 = - X_1 + [2] \end{cases}$$

dove φ_1, ψ_1 sono forme lineari in X_1 X_2, X_3. Il tetraedro può fissarsi in 8 modi equivalenti, ed il punto unità in 2. Si hanno 14 invarianti fra i coefficienti del 2° ordine, e le 7 rette caratteristiche ne danno un significato geometrico.

Supposto invece che γ sia parabolica, per normalizzare l'intorno del 1° ordine posso imporre che in Ω si corrispondono i piani $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$; $x_2 = 0$ e $\alpha_1 x_2 = x_3$, dove α_1 è l'unico invariante relativo al 1° ordine. Si hanno equazioni del tipo:

$$\bar{X}_2 = \alpha_1 X_2 + X_3 + \Sigma\, a_{(2)}^{ij} X_i X_j + [3]\,;\ \bar{X}_3 = \alpha_1 X_3 + \Sigma\, a_{(3)}^{ij} X_i X_j + [3]\,;$$
$$\bar{X}_4 = - X_1 + \Sigma\, a_{(4)}^{ij} X_i X_j + [3]\,.$$

Se il piano osculatore in $\bar{A}$ alla curva trasformata della retta S_1 non è indeterminato, nè coincide col piano unito in γ, lo assumo come piano $x_2 = 0$. Considerate poi le tangenti asintotiche delle calotte σ_2. σ'_2 corrispondenti a quelle dei piani $x_2 = 0$, $\alpha_1 x_2 = x_3$, suppongo che quelle relative a σ_2 siano distinte fra di loro e dalla S_1, e fra le altre ve ne sia almeno una distinta da S_1; le assumo come rette

$$x_1 = x_3 = 0\,; \qquad x_3 = 0,\ x_2 = x_1\,; \qquad x_1 = x_2 = 0.$$

Si hanno le equazioni canoniche di T:

$$(8) \qquad \begin{cases} \bar{X}_2 = \alpha_1 X_2 + X_3 + X_2\varphi_1 + X_3\psi_1 + [3] \\ \bar{X}_3 = \qquad\qquad \alpha_1 X_3 + a^{11}_{(3)} X_1(X_1 - X_2) + X_3\gamma_1 + [3] \\ \bar{X}_4 = - X_1 \qquad\quad + [2] \end{cases}$$

dove φ_1 e γ_1 (ψ_1) sono forme lineari in X_1, $X_2 (X_1, X_2, X_3)$. $(\alpha_1^{\cdot} a^{33}_{(2)} = a^{33}_{(3)})$.

La normalizzazione del tetraedro si può fare in quattro modi equivalenti. La scelta del punto unità si può fare in due modi diversi. Vi sono 14 invarianti collegati al 2° ordine.