BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Gabriella Manaresi

Ulteriori limitazioni per l'ampiezza di oscillazioni non-lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 537–540.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_537_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Ulteriori limitazioni per l'ampiezza di oscillazioni non-lineari.

Nota di GABRIELLA MANARESI (a Bologna)

Sunto. - *Vedi le prime cinque righe.*

1. In una nota precedente [1] abbiamo trovato alcune limitazioni per la soluzione periodica di speciali equazioni di LIÉNARD nell'incognita x con coefficiente $f(x)$ della $\dot{x}$, simmetrico [2].

Nella presente nota cercheremo di estendere i nostri risultati al caso in cui la $f(x)$ sia dissimmetrica.

Consideriamo dunque l'equazione

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

supporremo $f(x)$ negativa per $-\delta_1 < x < \delta_2$ (con δ_1, δ_2 positive), inoltre $fx)$ uguale a una costante positiva β per $x < -\delta_1$, e ad una costante positiva α per $x > \delta_2$. Queste ultime ipotesi possono, in base ad un teorema del SANSONE, venire sostituite da altre meno restrittive.

La (1) si può scrivere, posto $F(x) = \int_0^x f(x)dx$:

$$\ddot{x} + \dot{F}(x) + \omega^2 x = 0. \tag{2}$$

Per le nostre ipotesi, la $F(x)$ sarà una funzione nulla per $x = 0$, decrescente nell'intervallo $(-\delta_1, \delta_2)$, lineare crescente con coefficiente angolare α e β rispettivamente per $x > \delta_2$, $x < -\delta_1$. Perciò essa si annullerà in due punti $-h_1$ e h_2 in generale non simmetrici.

Potremo scrivere, rispettivamente per $x > \delta_2$ e $x < -\delta_1$:

$$F(x) = \alpha(x - h_2) \tag{3}$$ $$F(x) = \beta(x + h_1). \tag{4}$$

(1) G. MANARESI, *Su alcune limitazioni per l'ampiezza delle oscillazioni non-lineari*, Rendiconti Accademia delle Scienze di Bologna, Serie XI - Tomo II (1954-55) pagg. 184-89.

(2) Nella nota citata e nella presente si considerano equazioni di LIÉNARD con una sola soluzione periodica.

I valori minimo e massimo di $F(x)$, si avranno, rispettivamente, per $x = \delta_2$ e $x = -\delta_1$, cioè saranno $F(-\delta_1) = K_1$ e $F(\delta_2) = -K_2$ ($K_1 > 0$ $K_2 > 0$).

Diremo poi M il più grande fra K_1 e K_2 quindi nell'intervallo, (h_1 h_2) sarà $|F(x)| < M$.

2. Nel caso di $f(x)$ simmetrica, con un metodo dovuto a MIZOHATA e YAMAGUTI, abbiamo, nella nota citata, costruito una superficie σ, del piano x, $y = x + F(x)$, entro cui rimane l'unica soluzione periodica della (1); vedremo di costruire una superficie analoga, adatta per il caso dissimmetrico.

A questo scopo, nel piano x, y, costruiamo le linee c_1, c_2, c_3, c_4, rispettivamente di equazioni:

$$y^2 + \omega^2(x^2 - d_1^2) = \Gamma^2 \tag{5}$$

$$y \mp \Gamma = a(x + d_1) \tag{6}$$

$$[y - a(d_1 + d_2)]^2 + \omega^2(x^2 - d_2^2) = \Gamma^2 \tag{7}$$

dove a, d_1, d_2, Γ sono costanti positive da determinarsi in modo opportuno.

Sia c la curva chiusa formata rispettivamente per $x < -d_1$, $x > d_2$ dalle parti reali di c_1, e c_3 e per $-d_1 < x < d_2$ dalle c_2 e c_4.

Ora, affinchè essa coincida con il contorno di un'area σ, debbono essere verificate le condizioni, rispettivamente su c_2, c_4, c_3, c_1, che in base alle stesse considerazioni della nota precedente risultano:

$$-ay + aF(x) - \omega^2 x < 0 \tag{8}$$

$$ay - aF(x) + \omega^2 x < 0 \tag{9}$$

$$-\omega x^2[F(x) - a(d_1 + d_2)] < 0 \tag{10}$$

$$-\omega^2 x F(x) < 0. \tag{11}$$

Sceglieremo sempre $d_1 > h_1$, $d_2 > h_2$. L'ultima disuguaglianza è perciò certamente soddisfatta. Le (8), (9), (10) si possono rispettivamente sostituire con le inequazioni:

$$-a\Gamma + aM + \omega^2 d_1 < 0 \tag{12}$$

$$a[a(d_1 + d_2) - \Gamma] + aM + \omega^2(d_1 + d_2) < 0 \tag{13}$$

$$\alpha(d_2 - h_2) - a(d_2 + d_1) > 0. \tag{14}$$

Ovviamente la (13) comprende la (12) ed è soddisfatta se:

$$\Gamma > a(d_1 + d_2) + \frac{\omega^2(d_1 + d_2)}{a} + M. \tag{15}$$

Ragionando come nella nota citata, si trova che il secondo membro di (15) risulta minimo se $a = \omega$. Quindi, ponendo $a = \omega$, la (15) diventa:

$$\Gamma > 2\omega(d_1 + d_2) + M. \tag{16}$$

Supposto ora α e β superiori ad ω, si ha che (14) è soddisfatta se:

$$d_2 > \frac{\alpha h_2 + \omega d_1}{\alpha - \omega} \tag{17}$$

quindi risulta $d_2 > h_2$ come si era supposto.

Detti ora ρ, ε, η, tre numeri positivi e del resto arbitrari, soddisferemo le ipotesi $d_1 > h_1$ e le (16) e (17) ponendo:

$$d_1 = h_1 + \rho$$

$$d_2 = \frac{\alpha h_2 + \omega(h_1 + \rho)}{\alpha - \omega} + \varepsilon$$

$$\Gamma = 2\omega\left(\frac{\alpha(h_1 + h_2) + \alpha\rho}{\alpha - \omega}\right) + M + \eta.$$

3. Ciò posto, ricerchiamo i valori minimo e massimo $-x_m$ e x_M ($x_m > 0$, $x_M > 0$ come è noto) assunti dalla soluzione periodica $x(t)$ di (1).

Supponiamo $x_m > h_1$; in questo caso nell'istante t_m in cui x assume il valore minimo $-x_m$, si ha $\dot{x}(t_m) = 0$ e $F(-x_m) = y$.

Ora se $x < -x_m < -h_1$, $|y| < \Gamma$ si ha:

$$x_m = \frac{-y}{\beta} + h_1 < \frac{\Gamma}{\beta} + h_1 = \frac{2\omega\alpha(h_1 + h_2 + \rho)}{\beta(\alpha - \omega)} + \frac{M}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} + h_1.$$

Ora, per l'arbitrarietà di ρ, η segue:

$$x_m \leq \frac{2\omega\alpha(h_1 + h_2)}{\beta(\alpha - \omega)} + \frac{M}{\beta} + h_1$$

relazione ovviamente soddisfatta nell'ipotesi $x_m < h_1$.

Si è così trovato un valore maggiorante per x_m; per trovare un analogo valore per x_M, basta osservare che $-x_M$ è il minimo di $-x$ e che ponendo nella (2) $-x$ in luogo di x, l'equazione rimane la stessa, salvo lo scambio di h_1 con h_2, α con β, K_1 con K_2.

Si ha così:

$$x_M < \frac{2\omega\beta(h_1 + h_2)}{\alpha(\beta - \omega)} + \frac{M}{\alpha} + h_2. \tag{18}$$

4. Quando $h_1 < h_2$, si può trovare un valore maggiorante per x_m, forse più comodo di quello ottenuto nel numero precedente, se invece $h_1 > h_2$, converrebbe scambiare x in $-x$ e si troverebbe un valore maggiorante per x_M.

In questo caso conviene supporre $d_1 = d_2 = d$, $d > h_1$ e ragionando come nella nota precedente, si trova che la superficie limitata dalla (c) è una superficie σ, se $a = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ e se valgono le relazioni:

$$d = \frac{\alpha h_2}{\alpha - \omega\sqrt{2}} + \varepsilon \tag{19}$$

$$\Gamma = \frac{2\sqrt{2}\,\omega\alpha h_2}{\alpha - \sqrt{2}} + M + \eta \tag{20}$$

supposto ovviamente $\alpha > \omega\sqrt{2}$. Da (19) risulta $d > h_2$ e quindi anche di h_1 come deve essere.

Ciò posto, ricerchiamo il valore minimo $-x_m$ assunto dalla soluzione periodica di (1).

Come si è già visto, dovrà essere:

$$|x_m| < \frac{\Gamma}{\beta} + h_1$$

o anche sostituendo a Γ il valore dato da (20) e tenendo conto dell'arbitrarietà di η.

$$|x_m| \leq \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{2\sqrt{2}\,\omega h_2}{\alpha - \omega\sqrt{2}} + \frac{M}{\beta} + h_1 .$$

Cerchiamo infine con questo metodo un valore maggiorante per x_M. Supposto $x_M > h_2$ e tenendo presente che la corrispondente y deve essere positiva, si trova:

$$x_M = \frac{y}{\alpha} + h_2$$

e poichè $|y| < \Gamma + 2ad$, per l'arbitrarietà di η e ε si ha:

$$|x_M| \leq \frac{3\sqrt{2}\,\omega h_2}{\alpha - \omega\sqrt{2}} + \frac{M}{\alpha} + h_2$$

limitazione ovviamente valida anche se $x_M < h_2$ e che, in qualche caso, può essere più conveniente della (18).