Bollettino
Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Nuove regole di calcolo simbolico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 541–543.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_541_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Nuove regole di Calcolo simbolico.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina)

Sunto. - *Si stabiliscono nuove regole operatorie di Calcolo simbolico, relative alla trasformazione di* LAPLACE *e a quella, più generale, di* MEIJER.

1. Nel calcolo simbolico ordinario è noto che la scrittura

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

sta per

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt.$$

In questa nota mi propongo di stabilire dapprima la regola operatoria generale $\left(\frac{d}{dx} \equiv D_x\right)$

$$t^{n(1-u)}(t^u D_t)^n f(t) \supset (-1)^n (p^u D_p)^{n-1} p^{n-(n-1)u} D_p \varphi(p), \tag{1}$$

che per $u \neq 1$ si può utilmente scrivere nella forma

$$t^{n(1-u)} D^n_{t^{1-u}} f(t) \supset (-1)^n D^{n-1}_{p^{1-u}} p^{n(1-u)} D_{p^{1-u}} \varphi(p), \tag{2}$$

estensibile ancora nell'altra

$$t^{n(1-u)+\nu}(t^u D_t)^n f(t) \supset (-1)^{n+\nu} p D_p^{\nu+1}(p^u D_p)^{n-1} p^{(n-1)(1-u)} \varphi(p). \tag{3}$$

E si vedrà poi che le (1) e (2) valgono ancora per la più generale trasformazione di MEIJER [1]

$$f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \varphi(p),$$

con

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}pt} W_{k+\frac{1}{2},m}(pt)(pt)^{-k-\frac{1}{2}} f(t)dt$$

e $W_{k,m}(x)$ funzione di WHITTAKER.

[1] J. P. JAISWAL, *On Meijer transform*, « Mathematische Zeitschrift », 55, (1952), pp. 385-398; *A note on Meijer transform*, « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », LXVI, (1952), pp. 55-60; *On Meijer transform*, II, idem, pp. 131-151; *Two properties of Meijer transform*, Ganita (Lucknow, India), 3, (1952), pp. 85-90.

2. Prendiamo le mosse dalla formula operatoria

$$(tD_t)^n f(t) \supset (-1)^n (pD_p)^n \varphi(p),$$

e consideriamo i due sviluppi su operatori differenziali ([2])

$$x^{n(1-u)}(x^u D_x)^n = \sum_1^n {}_m \, p_{n,m}^{(u)} (xD_x)^m$$

$$(-1)^n (x^u D_x)^n x^{n(1-u)} = \sum_0^n {}_m \, (-1)^m p_{n+1,m+1}^{(u)} (xD_x)^m.$$

Si ha subito

$$\left[\sum_1^n {}_m \, p_{n,m}^{(u)} (tD_t)^m\right] f(t) \supset \left[\sum_1^n {}_m \, (-1)^m p_{n,m}^{(u)} (pD_p)^m\right] \varphi(p).$$

Il primo membro è uguale a $t^{n(1-u)}(t^u D_t)^n f(t)$.

Il secondo è successivamente uguale a

$$-(pD_p)\left[\sum_0^{n-1} {}_r \, (-1)^r p_{n,r+1}^{(u)} (pD_p)^r\right] \varphi(p),$$

$$(-1)^n (pD_p) \cdot (p^u D_p)^{n-1} p^{(n-1)(1-u)} \cdot \varphi(p),$$

e con lecita permutazione di operatori, a

$$(-1)^n (p^u D_p)^{n-1} p^{n-(n-1)u} D_p \varphi(p).$$

Così risulta provata la (1).

D'altra parte per $u \neq 1$ è

$$t^u D_t = (1-u) D_{t^{1-u}},$$

e operando tale sostituzione nella (1) si perviene alla (2).

Inoltre, applicando alla (1) la nota regola

$$t^\nu f(t) \supset (-1)^\nu p D_p^\nu \left[\frac{\varphi(p)}{p}\right],$$

si ha al secondo membro

$$(-1)^\nu p D_p^\nu \left\{ \frac{(-1)^n}{p} (p^u D_p)^{n-1} p^{n-(n-1)u} D_p \right\} \varphi(p),$$

e successivamente

$$(-1)^{n+\nu} p D_p^\nu \frac{1}{p} \cdot (p^u D_p)^{n-1} p^{(n-1)(1-u)} \cdot pD_p \cdot \varphi(p),$$

$$(-1)^{n+\nu} p D_p^\nu \frac{1}{p} \cdot pD_p (p^u D_p)^{n-1} p^{(n-1)(1-u)} \cdot \varphi(p),$$

$$(-1)^{n+\nu} p D_p^{\nu+1} (p^u D_p)^{n-1} p^{(n-1)(1-u)} \varphi(p).$$

Così risulta stabilita la (3).

([2]) L. TOSCANO, *Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati*, « Annali di Matematica pura e applicata », (IV), XIV, (1935-36), pp. 287-297.

3. A provare la generalità delle precedenti formule basta assegnare valori particolari alla u.

La (1) e la (3) per $u = 0$, e la (1) per $u = 2$, conducono a tre formule assegnate da L. POLI [3] senza dimostrazione. Le prime due si scrivono immediatamente. Per la terza si ha

$$t^{-n}(t^2D_t)^n f(t) \supset (-1)^n (p^2D_p)^{n-1} p^{2-n} D_p \varphi(p).$$

E poichè

$$(t^2D_t)^n = t^n D_t^{n-1} t^n D_t,$$

segue

$$\begin{aligned} D_t^{n-1} t^n D_t f(t) &\supset (-1)^n p^{n-1} D_p^{n-2} p^{n-1} D_p p^{2-n} D_p \varphi(p) \\ &\supset (-1)^n p^{n-1} \cdot D_p^{n-2} p^{n-2} \cdot p D_p \cdot p^{2-n} D_p \varphi(p) \\ &\supset (-1)^n p^n D_p^n \varphi(p). \end{aligned}$$

Altra formula interessante è la

$$t^{2n} D_{t^2}^n f(t) \supset (-1)^n D_{p^2}^{n-1} p^{2n} D_{p^2} \varphi(p);$$

che segue immediatamente dalla (2) per $u = -1$.

4. Le (1) e (2), fondate sulle regole

$$(tD_t)^n f(t) \supset (-1)^n (pD_p)^n \varphi(p)$$

$$\sum_1^n {}_m f_m(t) \supset \sum_1^n {}_m \varphi_m(p),$$

e su proprietà di operatori differenziali indipendenti dalla trasformazione, valgono ancora per la trasformazione di MEIJER, in quanto anche per questa ultima sussistono le suddette regole.

5. Le (1), (2), (3) si possono applicare con vantaggio nella formazione di formulari per il calcolo simbolico.

(3) L. POLI, *Quelques images symboliques*, « Annales de la Société Scientifique de Bruxelles », LXVIII, (1954), pp. 13-22.