
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UGO CASSINA

Storia ed analisi del “Formulario completo” di Peano. Note II e III.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 10
(1955), n.4, p. 544-574.

Zanichelli

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_544_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Storia ed analisi del « Formulario completo » di Peano.

Note II e III di UGO CASSINA (a Milano) (*)

Sunto. - *L' A.*, in una serie di tre note, fa la storia e l'analisi del « Formulario completo » di G. PEANO, che ha avuto ufficialmente cinque edizioni — dal 1895 al 1908 —, ma i cui primi fascicoli di saggio rimontano al 1892 e che abbraccia in complesso una ventina di lavori, pubblicati da G. PEANO dal 1888 al 1913.

L' A. espone i passi originali di G. PEANO sul progetto e l'attuazione del « Formulario », analizza successivamente i cinque tomi di esso, e termina con l'elenco e la spiegazione sommaria dei simboli dell'ultima edizione e con dati statistici comparativi.

§ 7 - Il tomo V del Formulario.

1. *Sulla lingua usata nei commenti del tomo V del Formulario.* - Appena terminata la quarta edizione del Formulario (marzo 1903), G. PEANO, iniziava i suoi studi sul problema della lingua ausiliaria internazionale, che dovevano portarlo prima al latino sine-flexione e poi all'interlingua, la quale pur differendo assai poco — per quel che riguarda il linguaggio scientifico — dal latino sine-flexione ne differisce notevolmente per la definizione.

Infatti il latino sine-flexione si ottiene dal latino scolastico sopprimendovi ogni flessione grammaticale, per modo che ogni vocabolo sia ridotto al « tema » nominale o verbale.

(*) Per la Nota I vedi questo « Bollettino », giugno 1955, serie III, anno X n. 2, pp. 244-265.

E che la soppressione della grammatica sia possibile, dal punto di vista razionale, pur mantenendo l'intelligibilità del testo, è provato da G. PEANO nella sua celebre Nota del 1903, pubblicata nella « Rivista di matematica » (v. 8, a. 1903, d. 293 = 20 ottobre, p. 74-83) in cui appunto incominciando a scrivere in latino scolastico (che egli conosceva benissimo avendolo adoperato nei suoi « *Arithmetices principia* » del 1889) sopprimendo via via tutta la parte superflua — dal punto di vista razionale — perveniva al latino sine-flexione.

L'idea del latino sine-flexione, come linguaggio, rimontava a G. W. LEIBNIZ, ma era G. PEANO il primo a svilupparla ed a dare ad essa forma scientifica e pratica.

Invece l'interlingua, incominciata a diffondere da G. PEANO dopo la sua nomina a presidente dell'antica accademia del volapük (1908), da lui denominata « *Academia pro Interlingua* » e trasformata in una associazione scientifica libera ad ogni opinione, ha come regola fondamentale il principio di « internazionalità » dei vocaboli.

Infatti ecco le regole per l'interlingua adottate dalla « *Academia pro Interlingua* » dietro proposta di G. PEANO :

I. *Vocabulario. Academia adopta vocabulos commune ad vocabulario etymologico A(nglo), F(ranco), H(ispano), I(taliano), P(ortuguez), R(usso), T(eutico).*

Et vocabulario Latino-Anglo.

Et nomenclatura in usu in Botanica, Zoologia, Chemia, etc.

II. *Orthographia. Omne vocabulo internationale, que existe in latino, habe forma de thema latino.*

Thema es in generale ablativo de nomine, et imperativo de verbo.

III. *Grammatica. Suffixo -s indica plurale. Lice supprime omne elemento grammaticale non necessario.*

IV. *Phonetica. Pronuntiatione de vocabulos latino es conforme ad illo de antiquo latino.*

Ora, se la maggioranza del vocabolario, che così si ottiene per l'interlingua è « latino » (compreso il vocabolario scientifico moderno che è essenzialmente greco-latino), ciò significa soltanto che la civiltà attuale è tutta di origine latina (o greco-latina).

Comunque, per quel che riguarda la matematica e la logica, non vi è differenza sensibile fra il latino sine-flexione e l'interlingua di PEANO, perchè i loro vocabolari praticamente coincidono e coincidono le loro grammatiche essendo entrambe inesistenti

(o quasi). È usato soltanto il suffisso *-s* per il *plurale* (dei nomi) se esso non risulta dal contesto.

Dopo la scoperta del latino *sine-flexione*, G. PEANO volle dimostrare praticamente l'utilità di questa lingua nella redazione dei lavori scientifici rivolti ad un pubblico internazionale, e perciò decise di usarla sistematicamente per la redazione del nuovo tomo del *Formulario*.

Così, oltre ad aumentare in modo cospicuo ed a perfezionare il materiale matematico già raccolto nel *Formulario*, egli si accinse a tradurre in latino *sine-flexione* tutti i commenti, notizie storiche e versioni in linguaggio ordinario delle proposizioni contenute nei tomi precedenti del *Formulario*, ed a redigere in tale lingua i commenti analoghi delle proposizioni nuove.

E poichè, ancor prima di aver formulato in modo esplicito le regole dell'interlingua, egli nella scelta dei vocaboli latini da usare per il linguaggio logico e matematico sentì il bisogno di fare ricorso al principio di internazionalità, si mise a studiare glottologia, ed in particolare l'etimologia, e così preparò le schede del vocabolario che sarebbero state poi aggiunte al tomo V del *Formulario*, costituendone una parte nuova e preziosa.

Il frutto di questa sua attività prodigiosa fu appunto il « *Formulario mathematico*, editio V (Tomo V de *Formulario completo*) », come suona in latino *sine-flexione* il titolo della nuova edizione del *Formulario*, che lo occupò incessantemente fino al 1908.

2. *Sul contenuto del tomo V del Formulario.* - Il tomo V del *Formulario* di PEANO (F. V = F 1908) venne pubblicato in due fascicoli non autonomi: il primo (p. 1-272) nel 1905 e il secondo (p. 273-463) nel 1908; nel 1908 vennero pure pubblicate la prefazione (di pag. XXXVI) ed il volume completo, a cui fu aggiunto un foglio di stampa, di 16 pagine non numerate, contenenti 24 figure relative alle curve studiate nel cap. VIII.

F. V è diviso nelle seguenti parti:

Præfatione, p. V-XVI, Tabula de symbolos, p. XVII-XIX, Indice alphabetico et abbreviationes, p. XIX-XXIII.

Bibliographia, p. XXIV-XXXV.

I. *Logica-mathematica*, p. 1-24; II. *Arithmetica*, p. 25-70;

III. *Algebra*, p. 71-162; IV. *Geometria*, p. 163-208;

V. *Limites*, p. 209-272; VI. *Calculo differentiale*, p. 273-336;

VII. *Calculo integrale*, p. 337-386; VIII. *Applicationes ad geometria et complemento*, p. 387-459.

Indice de fasciculo I et II, p. 461-463.

Nell'analisi seguente mi soffermerò essenzialmente sulle differenze rispetto al tomo IV, e sulle parti che hanno il carattere di novità in senso assoluto.

La Bibliografia è, in sostanza, ancora quella di F. IV, redatta da G. VACCA, salvo alcune aggiunte e la disposizione alfabetica dei nomi.

Il cap. I (*Logica-mathematica*) non contiene tutta la parte di logica usata in F. V, perchè anche qui, come in F. IV, sono rinviate all'inizio di capitoli successivi le parti di logica di cui si avrà bisogno nei capitoli stessi. Inoltre, in F. V, la logica matematica è considerata come strumento: quindi vi è solo la successione delle definizioni e proposizioni e nessun accenno a teorie matematiche della logica. Sono invece conservate le citazioni storiche e bibliografiche.

In questo cap. I sono chiariti, col linguaggio ordinario, l'uso delle lettere variabili e dei segni di punteggiatura (punti e parentesi), i concetti di « definizione » e di « dimostrazione », ed i simboli primitivi di logica, i quali, in F. V, sono i seguenti:

$$= \supset \cap \text{Cls } \varepsilon ; \varepsilon - \cup .$$

Fra i simboli di logica, che non figuravano in F. IV ma invece (sotto altra forma) in F. 1897, sono i segni $\cap \cup$, che estendono la nozione di prodotto e somma logica alle classi di classi. Di essi sarà fatto uso essenzialmente nella teoria delle classi variabili e nella teoria dei sistemi di equazioni differenziali (cap. VIII).

I capitoli II (*Arithmetica*) e III (*Algebra*) comprendono in sostanza i capitoli analoghi di F. IV, ma anche i capitoli IV, V, VI, VIII e parte dei capitoli VII e IX.

Tuttavia, in F. V, mancano alcune parti di aritmetica e di algebra, che si trovano in F. IV e nel libro « Aritmetica generale ed Algebra », del 1902, dedotto da esso: in particolare mancano le osservazioni sui sistemi di numerazione, le regole per le operazioni aritmetiche, varie proprietà relative alla rappresentazione decimale dei numeri interi, il paragrafo sui numeri perfetti, ed alcune proposizioni sui determinanti, per i quali viene rinviato esplicitamente ad F. IV.

Si trovano invece in più in F. V (rispetto ai tomi precedenti) la dimostrazione del teorema di VANDERMONDE sui coefficienti binomiali generici, la successione dei numeri A collegata coi numeri di BERNOULLI, i polinomi bernoulliani e molte proposizioni aggiunte qua e là.

Le idee primitive dell'aritmetica sono (come nei tomi precedenti, da F. 1898 in poi) quelle di « numero » (intero assoluto), di « zero »,

e di « successivo », per le quali G. PEANO continua a fare uso dei simboli $N_0, 0 +$.

Sono conservate in parte le osservazioni critiche sui principii dell'aritmetica ma non sono riportati i passi originali di R. DEDEKIND e H. GRASSMANN, che figuravano in F. 1898 (p. 2) e F. IV (p. 36).

L'estensione successiva del concetto di numero è fatta come in F. IV, secondo le idee esposte da G. PEANO in F. 1889, F. 1898 e F. 1901. Cioè i numeri relativi ed i numeri razionali sono definiti come particolari « operazioni »; dopo di che, definito per astrazione il concetto di limite superiore di una classe di razionali, i numeri reali assoluti sono introdotti come limiti superiori di classi di razionali non vuote e limitate.

Cap. IV (*Geometria*). Corrisponde al cap. X di F. IV. Le idee primitive della geometria sono ancora quelle di « punto », la relazione di « equidifferenza fra coppie di punti » (che porta alla nozione di « vettore ») e quella di prodotto « interno » (o « scalare ») di due vettori, per i quali, G. PEANO, fa uso dei simboli « $p - \times$ » (gli ultimi due in senso nuovo).

Tuttavia, in F. V, sono accennate alcune altre teorie possibili della geometria, per es.: quella fondata sulle nozioni di « punto », « segmento » e « movimento » (sviluppata da G. PEANO nel 1889 e nel 1894), e quella fondata sui concetti di « punto » e « distanza » (sviluppata in alcuni lavori di G. PEANO del 1902 e di M. PIERI del 1899 e 1908).

Pur essendo contenuto anche in F. IV, un cenno particolare merita il calcolo geometrico, svolto nell'indirizzo di GRASSMANN-PEANO, con numerose applicazioni geometriche e meccaniche.

Il cap. V (*Limites*) contiene parti dei cap. VII-X di F. IV, con aggiunte e miglorie varie. Per es. la dimostrazione ed il commento del teorema sul calcolo del limite di una serie di funzioni, le dimostrazioni del teorema di CAUCHY sulle serie (nel campo reale od immaginario), di teoremi vari sui complessi funzioni continue di una variabile reale, e sulla curva di PEANO.

In generale il paragrafo sulle serie è notevolmente aumentato con aggiunte di numerose proposizioni di LEIBNIZ, EULER, DELAMBRE; ecc. e con lo sviluppo in serie di un grande numero di funzioni speciali.

Naturalmente, come da F. 1899 in poi, la teoria dei limiti è fondata sul concetto di limite introdotto alla maniera di PEANO (1892-1894); e cioè: definizione della classe limite (Lm) d'una successione (o funzione reale di variabile reale) — classe che esiste sempre, che contiene massimo e minimo, ecc. — e deduzione del

limite ordinario (lim) quando la classe precedente contiene un solo elemento. È riportata anche la definizione usuale del limite ordinario (p. 232) ed il passo di O. BONNET (1871) ove essa trovasi per la prima volta sotto forma completa e precisa.

Cap. VI (*Calcolo differenziale*). Contiene parte dei cap. VII-XI e delle « Additions » di F. IV, con molte aggiunte.

Per esempio la dimostrazione del teorema di derivazione di una serie (p. 295), del teorema di LAGRANGE (sul resto nella serie di TAYLOR), dei teoremi di CAUCHY sulle serie di potenze con commenti storici e riproduzione di passi originali.

Fra i paragrafi aggiunti sono da segnalare i seguenti:

Sui rapporti incrementali successivi (o funzioni interpolari) ed il loro legame con le differenze finite; sulla funzione interpolante ed i relativi teoremi di NEWTON e di CAUCHY; sulla funzione intera di grado finito (nel campo immaginario) e sulle sue radici; sul resto nella divisione di due funzioni intere di grado finito e sulla scomposizione di una funzione razionale; sui polinomi di LEGENDRE; sulla serie di LAGRANGE per la risoluzione delle equazioni, in particolare dell'equazione di KEPLERO; sulle prime applicazioni meccaniche del calcolo: moto di un punto pesante, moto centrale, punto pesante in un mezzo resistente, moto armonico (con vari passi originali di GALILEO e di NEWTON).

Inoltre: la teoria delle derivate parziali, con i teoremi sulla derivazione della funzione composta e sulla commutabilità delle derivate parziali, ed importanti osservazioni sulle notazioni in uso; la derivata di un numero complesso di ordine m funzione di un numero complesso di ordine n (o sostituzione generica, p. 330) — ispirata da JACOBI e GRASSMANN — ma qui data sotto forma intrinseca (senza passare attraverso alle coordinate ed ai determinanti);

la dimostrazione dei teoremi essenziali che collegano la nozione di figura tangente (Tang) per una figura qualsiasi — introdotta da G. PEANO nel 1903, generalizzando la nozione analoga introdotta fin dal 1887 — con le ordinarie nozioni di « retta tangente » ad una linea descritta da un punto funzione di una variabile reale, e di « piano tangente » ad una superficie descritta da un punto funzione di due variabili reali, e le osservazioni relative;

la derivata del « potenziale » — inteso come una quantità funzione di un punto variabile —, definita direttamente, in modo analogo alla definizione della derivata di un complesso funzione di un complesso, e dimostrazioni delle principali proprietà, seguite dal confronto con le definizioni ordinarie di « gradiente », di « pa-

rametro differenziale del primo ordine » e di « nabla » (∇) di HAMILTON.

Cap. VII (*Calcolo integrale*). Corrisponde a parte dei cap. VII-XI di F. IV. Il concetto di integrale è introdotto — come nei tomi precedenti, a partire da F. 1899 — alla maniera indicata da G. PEANO fin dal 1884 e sviluppata nel 1895.

Sono aggiunte le dimostrazioni delle formule di quadratura dei trapezi e di CAVALIERI-SIMPSON, con i relativi resti, determinati da G. PEANO nel 1887, ed esempi di applicazioni numeriche effettive. Invece sono tralasciate alcune delle formule di COTES riportate in F. IV (p. 187).

La nozione di « arco » (o lunghezza) di una linea, descritta da un punto funzione di una variabile reale, è definita alla maniera di PEANO (1887) — cioè con il solo concetto di limite superiore — ma qui è esposta sotto una nuova forma simbolica e sono aggiunte le dimostrazioni dei teoremi principali in proposito.

È osservato inoltre come la nozione di « variazione limitata » di JORDAN non sia che un'ovvia variante di detta nozione di « arco » (p. 371).

È aggiunto il concetto di « lunghezza media » (indicata con il simbolo « long ») di un insieme di numeri reali — che corrisponde all'incirca al concetto di « misura esterna » di LEBESGUE, ma nella cui definizione non si fa ricorso alle infinite scelte arbitrarie — e ne è fatta applicazione nell'enunciato simbolico del celebre teorema di LEBESGUE-VITALI sulla condizione di integrabilità (a proposito del quale, in F. V, p. 376, si legge: « *mirabile transformatione de criterio de integrabilitate* »).

Le lunghezze, aree e volumi delle figure rettilinee, piane o spaziali sono trattate come in F. IV; sono però introdotti i simboli « area » ed « arc » (per l'area di una figura di volume nullo, e la lunghezza di una figura di area nulla) al fine di evitare le omonimie che colà erano sfuggite.

In conclusione, dal raffronto del cap. VII di F. IV (calcolo infinitesimale) e dei cap. VI (calcolo differenziale) e VII (calcolo integrale) di F. V, risulta che, in F. IV, si ha più che altro una miscellanea di formule con poche dimostrazioni, invece in F. V si hanno dei trattati organici di calcolo differenziale ed integrale con dimostrazioni, osservazioni storico-critiche, esercizi.

Cap. VIII (*Applications ad geometria et complemento*). Le applicazioni geometriche sono dedicate allo studio di oltre 25 curve notevoli, la maggioranza delle quali era stata già studiata da G. PEANO in F. IV (§ 85.2).

La redazione attuale è dovuta a G. PAGLIERO, allora assistente di G. PEANO.

Le curve sono supposte descritte da un punto funzione di una variabile reale e studiate facendo uso del calcolo vettoriale, di qualche nozione di calcolo geometrico e del calcolo differenziale ed integrale.

Vengono determinati: retta tangente, retta normale, centro di curvatura, raggio di curvatura, lunghezza area e volume di alcune figure di rotazione collegate con la curva, ed i teoremi principali relativi alla curva in esame.

Ecco l'elenco delle curve studiate: parabola, ellisse, iperbole, parabola di ordine razionale, linea esponenziale, catenaria, trattrice, senoide, tangentoide, curva della luce, spira mirabile, spirale di ordine m , spirale di Archimede, spirale iperbolica, cochleotide, spirale-senoide, cicloide propria, allungata ed accorciata, evolvente del cerchio, asteroide, epicicloide, lumaca di PASCAL, cardioide, cissoide di DIOCLE.

Vengono poi stabilite proprietà generali delle podarie, delle conoidi e delle curve inverse di una curva data, e studiate inoltre la conoide di NICOMEDE e l'elica.

I paragrafi successivi di F. V contengono la parte più nuova del Formulario e — in maggioranza — nuova in senso assoluto.

Nei paragrafi di complemento alla teoria dei complessi di ordine n , G. PEANO, incomincia con l'enunciare e dimostrare il teorema fondamentale relativo all'esistenza della « intersezione » di un insieme di classi di complessi di ordine n , soddisfacenti a certe condizioni (p. 410, P. 2).

Dapprima tratta il caso in cui l'insieme (di classi di complessi) sia numerabile, poi quello in cui abbia la potenza del continuo: precisamente che sia descritto di una classe (di complessi) funzione di una variabile reale positiva.

La dimostrazione di PEANO — del tutto nuova — è di carattere costruttivo: cioè si costruisce effettivamente un elemento comune a tutte le classi dell'insieme, ed in questa dimostrazione non si fa uso — per la prima volta — del principio delle infinite scelte arbitrarie, che invece era esplicito od implicito in tutte le dimostrazioni pubblicate prima.

G. PEANO aggiunge notizie critiche e bibliografiche sul teorema e poi lo trasforma in vari modi, venendo ad ottenere come corollario il teorema dell'esistenza della « classe limite » (Lm) d'una successione di complessi, classe limite definita generalizzando la defini-

zione già da lui data nel caso delle successioni reali di variabile reale.

Come corollario immediato della teoria esposta, G. PEANO, ottiene (p. 413) una proposizione di G. CANTOR, sulle proprietà « distributive » delle classi di complessi. Proposizione, anche questa, che, fino alla comparsa di questo tomo del Formulario, era stata ottenuta solo mediante le infinite scelte arbitrarie.

Segue un paragrafo sulla derivata « generale » (p. 414) di un complesso funzione di una variabile reale. Alla definizione, data sotto forma intrinseca (cioè senza fare ricorso a coordinate), seguono le principali proprietà (estensione del teorema del valor medio, collegamento con la nozione di continuità, ecc.).

Il § 30, del cap. VIII, di F. V, è dedicato alla teoria delle equazioni differenziali a derivate ordinarie.

In esso, G. PEANO, espone (p. 417-426) la dimostrazione completa del suo teorema esistenziale sui sistemi di equazioni differenziali a derivate ordinarie.

La dimostrazione, pur coincidendo essenzialmente con quella pubblicata nei « Math. Annalen. » del 1890 (= F. 1890) contiene — come ho già avvertito — migliorie varie: nella forma e nella prova delle singole parti.

Dal punto di vista della forma osservo, anzitutto, che il teorema è dimostrato per valori iniziali generici (e non entrambi *nulli*, com'era fatto in F. 1890), il che permette di vedere bene tutte le quantità che entrano in gioco; osservo poi che le notazioni, oltre ad aver assunto la forma definitiva di F. 1899, sono semplificate, eliminando alcuni simboli superflui.

Dal punto di vista della sostanza osservo:

1) La dimostrazione di una proprietà essenziale delle classi B (F. V, P. 3.2 = F. 1890, § 3, P. 4) — che si presentano nella soluzione approssimata del sistema — è ora ottenuta in modo molto più semplice mediante l'uso del ben noto teorema di CAUCHY sull'annullamento di una funzione reale di variabile reale continua, che assume due valori di segno contrario, e non con l'uso di due lemmi riposti (studiati nel § 3 di F. 1890), interessanti in sé ma non necessari nella questione.

2) L'introduzione delle classi A — che si presentano nella costruzione di una soluzione (esatta) del sistema di equazioni differenziali —, ed il loro studio, è fatto sistematicamente mediante le proprietà delle classi di classi: in particolare, ogni A , è definita come « intersezione » di un particolare insieme di classi (di complessi di ordine n); e la dimostrazione che una tal classe contiene

sempre qualche elemento (cioè « esiste » dal punto di vista logico) è fatta mediante il teorema della « esistenza » della « intersezione » di un tale tipo di insieme di classi, cioè della proposizione su cui ho richiamato l'attenzione poc' anzi (p. 410, P. 2).

Invece, in F. 1890, nella dimostrazione di questa stessa proposizione, si invocava il teorema di G. CANTOR — sulle proprietà « distributive » delle classi — che, in quell'epoca (come ho già detto), era stato ottenuto solo mediante le infinite scelte arbitrarie; quindi, anche nella dimostrazione di PEANO, era implicito l'uso di queste scelte infinite.

3) È semplificata la dimostrazione della compatibilità delle condizioni che definiscono la funzione g atta a soddisfare il sistema di equazioni differenziali assegnato. In particolare è semplificata notevolmente la dimostrazione delle proprietà che permettono la definizione di g per tutti i valori della variabile non appartenenti al campo Z (costituito da ogni punto di divisione dell'intervallo x^{1-y} — in cui si ritiene definita la funzione g — in un numero, eguale ad una potenza di 2, di parti eguali).

Sempre, nel cap. VIII di F. V, seguono ora (p. 427-429) il teorema sulle condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione del sistema di equazioni differenziali in esame; esempi vari, e numerose notizie storico-bibliografiche. Poi la teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti *variabili* (p. 431), dell'equazione di BERNOULLI ed il teorema di PEANO (1887) sull'integrazione dei sistemi di n equazioni differenziali *lineari* in cui i coefficienti sono funzioni reali e *continue* della variabile t , in un determinato intervallo.

Di questo teorema è esposta la dimostrazione semplicissima data da G. PEANO, nella sua Nota del 1887, mediante la teoria dei complessi di ordine n e delle sostituzioni lineari su di essi, svolta in detta Nota. Nella bibliografia sull'argomento, riportata in F. V, G. PEANO, accenna ai lavori posteriori (1891-94) sulla stessa questione, dovuti ad E. PICARD e ad altri.

Com'è noto, E. PICARD (1891) chiama metodo delle « approssimazioni successive » il metodo seguito da G. PEANO nella dimostrazione del suo teorema, metodo che, invece, G. PEANO, più propriamente, preferirebbe dire delle « integrazioni successive ». Ma che questo metodo conduca, nel caso in esame, a serie sempre convergenti, fu osservato da E. L. LINDELÖF ed E. PICARD solo nel 1894, mentre il lavoro di G. PEANO — che fu pubblicato anche in francese nei « Math. Annalen » del 1888 (v. 32) — è del 1887 (20 febbraio).

Seguono alcuni brevi paragrafi dedicati agli integrali ellittici (di 1^a e 2^a specie), al prodotto di due serie, alle funzioni di variabile immaginaria (di cui sono enunciati i teoremi essenziali di A. CAUCHY), ed allo sviluppo in serie di FOURIER (p. 434-436).

Sono poi enunciati e dimostrati i teoremi sui « limiti » — limite ordinario, massimo e minimo limite — di integrali funzioni di un parametro, e quelli sulla derivata di un integrale e sulla commutazione delle integrazioni.

Il § 38, del cap. VIII di F. V, è dedicato alla teoria dell'integrale *multiplo* e delle sue applicazioni. G. PEANO fa uso della teoria dei complessi di ordine n e la funzione — di cui vuol definire l'integrale (superiore, inferiore od ordinario) è considerata come una quantità funzione di un complesso di ordine n .

La prima definizione simbolica dell'integrale multiplo era stata data da G. PEANO in F. III (1901, p. 163), e riportata tal quale in F. IV (p. 206). Qui, in F. V (p. 441), G. PEANO, aggiunge nuove proposizioni tolte da J. PIERPONT (1905).

Segue il teorema di LAGRANGE-JACOBI sul cambiamento di variabili nell'integrale multiplo (p. 442) e l'introduzione del concetto di integrale di « campo »: cioè l'estensione della nozione di integrale — superiore, inferiore o proprio — ad una funzione definita in una qualsiasi classe u di punti (purchè non vuota e limitata). E tale funzione può essere sia una quantità reale, che un punto, o vettore, o complesso di ordine n .

Come applicazione sono enunciati i teoremi che danno il volume — esterno ed interno — di una qualsiasi figura u (non vuota e limitata) mediante un integrale di campo, teoremi che corrispondono alla scomposizione di u in strati sferici o cilindrici. Poi (p. 445) la formula che dà l'area del triangolo sferico — che figura anche in F. IV — con le notizie storiche relative. Infine le formule di PEANO (1890) e di DAINELLI (1878) che danno per difetto o per eccesso il volume e l'area dell'ellissoide, e le formule di VIVIANI che danno il volume, l'area e l'arco delle figure collegate con il suo problema famoso.

Vi sono poi due articoli dedicati ai centri di gravità ed ai momenti d'inerzia, con varie proposizioni di ARCHIMEDE, GALILEO, EULER, ecc.

Segue (p. 448) l'introduzione della « variazione » di un integrale — secondo il metodo esposto da G. PEANO nelle sue « Lezioni » del 1893 e ripreso nel 1897 — cioè considerando le « variazioni » come « derivate », e la dimostrazione del teorema di EULER (1744) sull'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine,

a cui soddisfa una funzione che rende massimo o minimo un dato integrale.

Poi, viene calcolata la variazione della lunghezza di un arco di curva — pensata descritta da un punto mobile — ed esposta la nozione di geodetica ed altri teoremi notevoli. Anche qui la trattazione è intrinseca, cioè non si ricorre a coordinate e si fa uso del calcolo vettoriale.

Nel § 39 del cap. VIII di *F. V.*, che è l'ultimo del libro, sono studiate le sostituzioni lineari sui vettori (od *omografie vettoriali*). In particolare sono definiti gli « invarianti » ed il « vettore », e viene fatta la scomposizione di ogni omografia (vettoriale) nella somma di due omografie: quella che ora noi chiamiamo la « dilatazione » e l'omografia « assiale » della omografia assegnata. G. PEANO accenna al significato cinematico e geometrico di tali trasformazioni, ed alla quadrica — che ora noi diciamo « indicatrice » — di una omografia.

Introduce — come caso particolare della derivata di un complesso di ordine m funzione di un complesso di ordine n — la derivata di un punto o vettore funzione di un punto o vettore, che risulta perciò un'omografia vettoriale; ed espone vari teoremi su tale omografia (p. 456), aggiungendo anche indicazioni storiche e bibliografiche ed accenni alle varie notazioni in uso.

Segue l'introduzione degli integrali di « linea » e di « superficie », con l'accento al loro significato meccanico e l'enunciato e la dimostrazione dei teoremi di STOKES (1854) e di OSTROGRADSKI-GAUSS (1828-1840).

Infine vengono date le definizioni dei « continui » di ordine 1, 2 e 3 — come particolari insiemi di punti — ed enunciate le proposizioni che affermano che ogni figura convessa (con più di un punto) è un continuo di ogni ordine, che il toro è un continuo di ordini 1 e 3 e non di ordine 2, e che il solido esterno ad una sfera è un continuo di ordini 1 e 2 e non di ordine 3.

Le ultime proposizioni del libro esprimono, sotto forma analitica precisa, i teoremi di meccanica relativi al « lavoro » di una forza di vettore u nel caso di un campo « irrotazionale », ed al « flusso » di un vettore u , attraverso una superficie, nel caso di un campo « solenoidale ».

3. *Osservazioni riassuntive su F. V.* — Il lettore, che mi ha seguito fin qui, non avrà difficoltà ad approvare le dichiarazioni del matematico polacco E. STAMM (1932) ⁽³⁾, che ritiene il « Formu-

(3) E. STAMM, *Josef Peano*, « Wiadomości matematyczne », 36 (1933), p. 3.

lario mathematico » (ed. V) « un'opera classica nella letteratura matematica di ogni secolo » e di « valore inestimabile per gli studiosi di matematica »; o quella da me fatta, nel mio primo studio della produzione scientifica di G. PEANO (4), cioè che esso è « una miniera inesauribile di ogni scienza ». Giudizio che confermavo nel necrologio, da me pubblicato in « Schola et Vita », subito dopo la morte del Maestro (1932) (5).

Ora, dopo il nuovo studio accurato del « Formulario mathematico » ed. V, fatto per la redazione di questo lavoro, non posso che confermare detto giudizio.

Anzi, debbo dire che, quanto più si approfondisce lo studio del tomo V del Formulario, tanto più si rimane presi dallo stupore e colmi di riverenza per l'uomo che è riuscito a condensare in modo magistrale in un libro di modesta mole una parte così grande dello scibile matematico: logica matematica, aritmetica, algebra, teoria delle equazioni algebriche, geometria elementare; calcolo geometrico, vettoriale, omografico e dei quaternioni; calcolo delle differenze, calcolo differenziale ed integrale; elementi del calcolo delle probabilità, del calcolo delle variazioni e della teoria delle equazioni differenziali, con applicazioni allo studio delle curve principali, agli elementi di geometria differenziale, al calcolo delle lunghezze aree e volumi, baricentri e momenti d'inerzia, ed agli elementi di cinematica e meccanica razionale.

E le proposizioni raccolte attorno a queste discipline sono circa 4200, tutte scritte sotto forma simbolica *completa*, cioè con l'enunciato esplicito delle condizioni di validità ed il significato delle lettere che in esse figurano. Della maggioranza delle proposizioni sono citate le fonti e spesso i passi originali degli autori che le hanno scoperte.

E degli autori citati — circa 300 e molti citati decine e decine di volte (per es. EULER 126 volte, EUCLIDE 69, CAUCHY 69, ecc.) — sono riportate notizie biografiche e bibliografiche; e dei concetti fondamentali è fatta la storia e la critica e sono confrontate le varie notazioni in uso.

Nel volume è inserito un vocabolario di oltre 524 vocaboli di logica e matematica, e di ogni vocabolo è data l'etimologia e la forma in latino sine-flexione, francese, italiano, inglese e tedesco, e spesso in spagnolo, portoghese e russo; con notizie sulle leggi

(4) U. CASSINA, *Giuseppe Peano*, in « Collectione de scripto in honore de prof. G. Peano », Supplem. ad « Schola et Vita », 27 agosto 1928.

(5) Cfr. l. c. (4), p. 142.

fonetiche che regolano la trasformazione dei vocaboli nelle lingue indo-europee e l'analisi dei vocaboli composti fino a risalire alle radici indo-europee primitive, e molte altre notizie interessanti.

Ma non soltanto un'enciclopedia di logica, di matematica, di storia della matematica e di linguistica, è questo libro, perchè — come ho già osservato — le circa 4200 proposizioni contenute in esso sono ordinate sistematicamente e molte di esse sono dimostrate in modo esplicito — ed in più modi — mediante le precedenti, cosicchè dal Formulario (ed. V) è possibile estrarre dei veri trattati di Aritmetica e di Algebra, di Geometria, di Calcolo differenziale ed integrale, ecc. (non di Logica, per cui bisogna invece ricorrere alle edizioni precedenti del Formulario, perchè nell'attuale la logica è solo strumento e non fine a se stessa).

4. *La scrittura ideografica.* — Vediamo ora di renderci conto del come sia stato possibile concentrare in 463 pagine, di cui oltre 50 dedicate al vocabolario o bianche, le circa 4200 proposizioni di cui ho detto, con le relative dimostrazioni, note storiche, biografiche e bibliografiche, con piccole tavole numeriche ed esempi di calcoli numerici effettivi, con la pubblicazione di tutte le cifre allora note dei numeri principali (707 di « π », 346 di « e », 282 di « $\text{Log}_{10} e$ », 263 di « γ », ecc.), con la tabella dei primi 30 numeri di Bernoulli, ecc.

La possibilità della concentrazione in un volume, di così modesta mole, di un materiale così vasto è dovuto alla forma « ideografica » che viene data alle singole proposizioni (ed alle dimostrazioni), cioè alla loro completa trascrizione simbolica; ma in cui i « simboli » sono « ideogrammi », cioè di significato (logico o matematico) invariabile ovunque si trovino e non già semplici abbreviazioni di vocaboli.

E tal fine è raggiunto, essenzialmente, mediante i simboli di logica matematica, fissati da G. PEANO negli anni dal 1888 al 1899.

Questi simboli di logica matematica, che nell'uso comune non superano la ventina, hanno permesso a G. PEANO di ridurre notevolmente anche il numero dei simboli di matematica necessari per la scrittura delle sue proposizioni, numero che ammonta a 209. Di questi, però, 19 sono i simboli di aritmetica e di algebra ben noti 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 + \times - / > < \geq \leq $\sqrt{\quad}$, ed i rimanenti 190 permettono di esprimere le diverse migliaia di simboli e vocaboli tecnici usati comunemente.

I simboli sono stati scelti in modo da evitare omonimie; quindi in particolare i segni di logica hanno forma diversa da quelli di matematica. E la forma dei simboli è tale da permetterne la facile composizione in ogni tipografia: ciò perchè i caratteri tipografici sono tutti dello stesso corpo e quindi la composizione si fa disponendoli in fila su una sola linea.

Tuttavia i simboli di « operazione » (o di « funzione » generica), come per es. $+$ $-$ \times $/$ dell'aritmetica e « sin cos log » della trigonometria e dell'algebra, sono via via usati in senso diverso: ciò corrisponde ai successivi ampliamenti del campo di applicabilità delle operazioni rappresentate da essi. E la cosa è possibile — ed invece di inconvenienti porta vantaggi — perchè i nuovi significati non sono mai in contraddizione con gli antichi, e l'operazione — nel nuovo campo di applicabilità — gode di proprietà molto simili a quelle che aveva nel vecchio campo.

Per es. il simbolo $+$, introdotto dapprima come primitivo col senso di « successivo » (per modo che « $a +$ » significa « successivo di a ») è definito poi oltre dieci volte: fra numeri interi, razionali, reali (assoluti o con segno), fra numeri cardinali (finiti od infiniti), fra complessi di ordine n , fra sostituzioni lineari, fra punti e vettori, fra vettori, fra quaternioni, ecc.

Se il linguaggio « ideografico » — in cui cioè ogni simbolo è un ideogramma — permette di eliminare centinaia e centinaia di vocaboli tecnici, che si presentano invece necessari nel linguaggio ordinario, permette d'altra parte di distinguere i vari significati logici o matematici di uno stesso vocabolo del linguaggio ordinario.

Per esempio, i simboli $=$ ε \mathfrak{A} \supset servono a distinguere i vari significati logici che nel linguaggio comune sono attribuiti al verbo « essere » (nelle sue varie forme grammaticali); ed i simboli « l l_1 λ δ Lm lim » permettono di distinguere i vari significati matematici attribuiti al vocabolo « limite ».

5. *Sulle note marginali di Peano.* — Le copie dei tomi IV e V del Formulario, da me possedute, — analogamente alle copie già citate dei tomi I, II e III che trovansi legate insieme nella Biblioteca matematica dell'Università di Milano (cfr. § 3) — contengono numerose note marginali in cui vengono corretti errori materiali o fatte aggiunte ed osservazioni varie.

Mi limiterò ad accennare ad alcune di queste note.

A pag. 26 (bianca) sono aggiunti i postulati aritmetici di A. PADOA e di M. PIERI, nell'indirizzo di PEANO; nel margine destro, a

pag. 27, vi è sotto forma simbolica la definizione possibile di N_0 , dedotta dai postulati $\cdot 0 \cdot 1 \cdot 2$.

A pag. 60 è aggiunta la proposizione: « $2^{127} - 1 \in N_p$ », e riportato sotto forma decimale il valore esplicito di questo numero.

A pag. 102 sono sostituiti i simboli E (*entier*) e β (*mantissa*) rispettivamente coi simboli V e M (che, nei lavori successivi sulle approssimazioni numeriche, dovuti a G. PEANO ed alla sua numerosa scuola, saranno generalizzati in V_n e M_n).

A pag. 134 (sul calcolo delle differenze) sono citati i lavori di M. PEYROLERI e di G. PAGLIERO sulle differenze finite e sulle formule sommatorie.

A pag. 146, nella teoria dei determinanti, è introdotto il simbolo Sgn per evitare omonimia col precedente simbolo sgn ; a pag. 223 è aggiunta la citazione di P. MENGOLI sulla divergenza della serie armonica; a pag. 236 è aggiunta la dimostrazione di un teorema sulla convergenza delle serie a termini immaginari; a pag. 368, in margine, è riportato sotto forma esatta di integrale definito il resto nella formula di quadratura di CAVALIERI-SIMPSON, ottenuto da G. PEANO nella sua Nota lineare del 1913, come caso particolare del suo teorema sul « resto » inteso come un particolare operatore lineare.

A pag. 369 sono citati vari lavori dei suoi scolari: P. QUARRA, F. Odone, C. FERRERO sulla determinazione dei resti nelle formule di quadratura.

Eccetera.

Rimando ad un altro mio lavoro ⁽⁶⁾ per alcune osservazioni su alcuni punti del tomo V e chiudo il presente studio con un paragrafo dedicato all'elenco completo dei simboli del tomo V, con la versione in linguaggio ordinario e la spiegazione sommaria ed i confronti coi simboli dei tomi precedenti, per modo che sia facile seguire le varianti dall'una all'altra edizione (a cominciare dalla II) e lo sforzo incessante dell'autore per aumentare e migliorare l'opera ⁽⁷⁾.

⁽⁶⁾ U. CASSINA, *Sul Formulario Mathematico di Peano*, nel volume « In memoria di Giuseppe Peano », studi di vari autori raccolti da A. TERRACINI, Cuneo, Liceo statale, 1955, p. 71-102.

⁽⁷⁾ Per l'esame complessivo dell'opera scientifica di G. Peano, e la bibliografia completa, cfr. U. CASSINA, *L'opera scientifica di Giuseppe Peano*, « Rend. Sem. mat. fis. Milano », 7 (1933), p. 323-389.

§ 8 - Elenco dei simboli e dati statistici.

I. - *Indice dei simboli del tomo V del Formulario.*

OSSERVAZIONE. - I simboli vengono distinti in: segni di « punteggiatura » (di natura prettamente linguistica), in segni di significato « variabile » (o « variabili » logiche) ed in segni di significato « costante »; questi divisi in simboli di *logica* ed in simboli di *matematica*.

I simboli sono elencati nell'ordine in cui si presentano; di essi è data la lettura in linguaggio ordinario e la spiegazione sommaria del significato.

L'indice comprende solo i simboli « semplici »; quelli « composti » si ottengono mediante conveniente « apposizione » (da sinistra a destra) di simboli semplici.

1) *Segni di punteggiatura*

. : :: () [] { }

Essi hanno il solo ufficio di separare le varie parti di una formula o di una proposizione.

2) *Variabili logiche*

a b c d ... x y z

(lettere latine corsive minuscole), indicano enti qualunque.

3) *Simboli di logica* (numero totale: 30)

Cap. I, p. 1-13:

= (è *eguale*). Segno dell'*eguaglianza* (od identità) logica.

Cls (*classe*): è sinonimo di aggregato, insieme, campo, totalità, ecc.

\supset (segno della proposizione *universale*). Si può leggere è *contenuto*, *implica*, *si deduce*. Se a_x e b_x sono proposizioni contenenti la variabile x (cioè sono « condizioni » in x) allora la scrittura: $a_x \cdot \supset_x \cdot b_x$ significa: « la a_x , implica qualunque sia x , la b_x ». Se a e b sono classi, allora $a \supset b$ significa « a è contenuta in b », cioè « ogni membro di a è un membro di b ». (Proposizione *universale* — $\kappa\alpha\theta\epsilon\lambda\omicron\upsilon$ — di ARISTOTELE.

ε (segno per la proposizione *singolare*). Si può leggere è *un*, *sono*. Se a è una classe, allora la scrittura $x \varepsilon a$, significa « x è un

membro di a », (Proposizione *singolare* — $\kappa\alpha\theta^2$ ἕκαστον — di ARISTOTELE). Ogni condizione in x è riducibile alla forma $x \varepsilon a$, ove a è una classe; ed ogni proposizione universale del tipo $a \supset b$, ove a e b sono classi, è riducibile alla implicazione: $x \varepsilon a \cdot \supset_x \cdot x \varepsilon b$.

- ∩ (*et*). Segno di *congiunzione* logica (o di *prodotto* logico). Se a e b sono proposizioni, allora $a \cap b$ indica l'affermazione simultanea di a e di b . Se a e b sono classi, allora $a \cap b$ indica la classe *intersezione* (o parte comune) di a e di b .
- ,
- (*virgola*). Se a è una classe, allora la scrittura: $x, y \varepsilon a$, che si può leggere « x ed y sono degli a », è l'abbreviazione della scrittura: $x \varepsilon a \cdot \cap \cdot y \varepsilon a$. Significato analogo ha la scrittura $x, y, z \varepsilon a$. Eccetera.
- ;
- (*punto e virgola, con, poi*). Segno di *collegamento*. La scrittura $a ; b$ indica la *coppia ordinata* (o *diade*), che ha come primo elemento a e come secondo elemento b . Nell'uso comune la scrittura $a ; b$ è spesso sostituita dalla (a, b) .
- ∴ (*tali che*). Segno per la *trasformazione* di una *condizione* in *classe*. Se p_x indica una proposizione in cui figura la variabile x (condizione in x), allora $x \varepsilon (p_x)$ indica la classe formata dagli enti x soddisfacenti (o soluzioni) della condizione p_x .
- (*non*). Segno per la *negazione*. Se a è una proposizione, allora $\text{—}a$ indica la negazione di a (proposizione *contraria* di a). Se a e b sono classi, allora $a \text{—} b$ indica la classe formata dagli elementi di a non appartenenti a b .
- ∪ (*od*). Segno di *affermazione alternativa* (o di *somma* logica). Se a e b sono proposizioni, allora $a \cup b$ indica l'affermazione di almeno una delle proposizioni a e b . Se a e b sono classi, allora $a \cup b$ indica la *somma* (o riunione) delle classi a e b .
- ∆ (*nulla*). Segno per la classe *vuota*.
- ∏ (*esiste*). Segno per la proposizione *particolare*. Se a è una classe, allora la scrittura $\prod a$ significa: « esistono degli a », (cioè: $a \text{—} = \Delta$). Se a e b sono delle classi, allora $\prod (a \cap b)$ può leggersi anche « qualche elemento di a è un b ». (Proposizione *particolare* — ἐν μέρει — di ARISTOTELE).
- ι (*eguale*). Se x è un membro di una classe, allora ιx indica la classe (unitaria) avente come membri il solo x .
- ι (*quel*). Se a è una classe unitaria, allora a indica l'unico membro della classe a .

Cls' (*classe di*). Se a è una classe, allora la scrittura: $b \varepsilon (\text{Cls}' a)$ significa: « b è una classe contenuta in a ».

Cap. III, p. 73-82:

\downarrow (*effe capovolta*). Segno per le funzioni sotto forma di operatori a destra (o *postfunzioni*).

f (*effe*). Segno per le funzioni sotto forma di operatori a sinistra (o *prefunzioni*).

Precisamente, se a e b sono classi, allora la scrittura $g \varepsilon (b f a)$ significa che: « se $x \varepsilon a$, allora qualunque sia $x, (g x) \varepsilon b$ ». Analogamente la scrittura: $h \varepsilon (a \downarrow b)$ significa che: « se $x \varepsilon a$ allora, qualunque sia $x, (xh) \varepsilon b$ ».

sim, rep, idem. Segni per le funzioni *simili*, *reciproche* ed *identiche*.

$|$ (*variando*). Segno che permette di ottenere il segno di prefunzione (o postfunzione) corrispondente ad una data funzione. Esempio: $(\sin x) | x = \sin$.

' ' (*di*). Segni per il campo *immagine* di una funzione, rispettivamente sotto forma di prefunzione o di postfunzione. Esempi: $\sin ' N_0$ indica la classe descritta da $\sin x$ al variare di x nel campo N_0 (dei numeri interi assoluti); $N_0 ' (+3)$ indica la classe descritta da $x + 3$ al variare di x in N_0 ⁽⁸⁾.

: (*virgola e punto, contro*). Se a e b sono classi, allora $a : b$ indica la classe d'ogni diade del tipo $x; y$ ove x è un qualunque elemento di a ed y un qualunque elemento di b .

F (*effe grande*). Segno per le funzioni « definite » (sotto forma di prefunzioni).

Variab (*variabilità*). Segno per individuare il campo di applicabilità (o « variabilità ») di una funzione definita.

Cosicchè, se a e b sono classi, allora il dire che $g \varepsilon (b F a)$ equivale a dire che: $g \varepsilon (b f a) \cdot \cap$. Variab $g = a$.

Funct (*funzione definita*). Indica l'insieme delle funzioni definite (sotto forma di prefunzioni).

$^{-1}$ (*inverso*). Segno per la funzione *inversa*.

\cap (*intersezione*). Se k è una classe di classi, allora $\cap k$ indica

(8) Ne risulta che i simboli di logica \downarrow hanno lo stesso valore dei simboli f . I primi sono relativi alle funzioni sotto forma di operatori a destra (*postfunzioni*), i secondi alle funzioni sotto forma di operatori a sinistra (*prefunzioni*).

l'intersezione di tutte le classi di k , cioè l'insieme degli x appartenenti a qualsiasi classe di k .

\cup (somma). Se k è una classe di classi, allora $\cup k$ indica la somma di tutte le classi di k , cioè l'insieme degli x appartenenti ad almeno una classe di k ⁽⁹⁾.

4) *Simboli di matematica* (numero totale : 209)

Cap. II (*Aritmetica*): p. 27-64, totale dei simboli : 37.

N_0 = numero intero assoluto.

0 + 1 2 3 4 5 6 7 8 9, significato ordinario.

X = dieci (base della numerazione).

\times (segno di moltiplicazione).

\wedge (segno di innalzamento a potenza).

N_1 = numero naturale.

$> < \geq \leq$, significato ordinario.

\dots Se a e b sono numeri interi ed $a \leq b$, allora $a \dots b$ indica la classe formata dai numeri interi x tali che: $a \leq x \leq b$.

— (*meno*) / (*diviso*), significato ordinario.

Se a è una classe, allora :

num a = numero cardinale degli a , definito induttivamente.

Se a è una classe di numeri, allora :

max a = massimo di a . min a = minimo di a .

Se a e b sono numeri interi assoluti e b è diverso da zero, allora :

quot (a, b) = quoziente nella divisione di a per b ,

rest (a, b) = resto nella divisione di a per b .

Se a ed n sono numeri interi assoluti, allora :

Cfr₀ a = cifra di ordine zero di a = rest (a, X),

Cfr _{n} a = cifra di ordine n di a = Cfr₀ quot (a, X^n).

⁽⁹⁾ I simboli di logica usati nei vari capitoli di matematica sono in numero di 15 nel cap. II (*Aritmetica*); 23 nel cap. III (*Algebra*); 18 nel cap. IV (*Geometria*); 17 nel cap. V (*Limiti*); 23 nel cap. VI (*Calcolo differenziale*); 20 nel cap. VII (*Calcolo integrale*); 21 nel cap. VIII (*Applicazioni geom. e complementi*).

Se a è un numero intero assoluto, allora:
 ord a = ordine di a = $\max [N_0 \cap n \varepsilon (X^n \leq a)]$.

! (fattoriale), significato ordinario.

Se m ed n sono numeri interi assoluti, allora:
 $C(m, n)$ = numero delle combinazioni di m oggetti ad n ad n .

Se a e b sono numeri naturali, allora:
 mlt (a, b) = m (a, b) = minimo comune multiplo di a e di b ,
 Dvr (a, b) = D (a, b) = massimo comun divisore di a e di b .

N_p = numero primo.

Se a e b sono numeri naturali e b è maggiore di uno, allora:
 mp (b, a) = massima potenza di b che divide a =
 = $\max [N_0 \cap n \varepsilon \{ a \varepsilon (N \times b^n) \}]$.

Φ = funzione indicatrice di EULER-GAUSS.

Cap. III (*Algebra*) p. 87-153, totale dei simboli nuovi: 60.

n = numero intero relativo.

mod = modulo (o valore assoluto).

sgn = segno (la funzione di KRONECKER).

R = numero razionale positivo.

r = numero razionale relativo.

E (*entier*) = parte intera di. (Segno cambiato poi in V).

β (mantissa) = mantissa di. (Segno cambiato poi in M).

dt = denominatore ridotto di un numero razionale.

nt = numeratore ridotto di un numero razionale.

η = classe dei numeri razionali x tali che: $0 < x < 1$.

Se u è una classe di numeri, allora:

$l'u$ = limite superiore di u (od estremo superiore),

l_1u = limite inferiore di u (od estremo inferiore).

Q = numero reale positivo.

∞ = infinito = l'R.

θ = classe dei numeri reali x tali che: $0 < x < 1$.

$\sqrt{\quad}$ = radice, significato ordinario.

q = numero reale relativo.

\mp , significato ordinario.

— $| - |$ — $| - |$, segni per gli intervalli *continui*. Precisamente: se a e b sono numeri reali ed $a \leq b$, allora $a - b$, $a | - b$, $a - | b$, ed $a | - | b$ indicano rispettivamente l'insieme dei numeri reali x tali che: $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$.

Θ = classe dei numeri reali x tali che; $0 \leq x \leq 1$.

Log = logaritmo in base dieci.

Σ (sommatoria), significato ordinario.

Se a è una classe di numeri interi assoluti ed n un numero naturale. allora:

$\min_n a$ = minimo di posto n di a , definito induttivamente.

Π (prodotto), significato ordinario.

Δ (differenza), significato ordinario.

A_n = n -esimo numero della successione A , legata alla successione B dei numeri di BERNOULLI, dalla formula: $A_{2n} = (-1)^{n-1} B_n / (2n!)$.

B_n = n -esimo numero di BERNOULLI.

Bern(x, n) = polinomio di BERNOULLI di ordine n , indicato da altri con $\beta_n(x)$.

Se u è una classe di numeri reali, allora:

Med u = valore medio fra gli u = insieme dei numeri reali x tali che: $l_1 u \leq x \leq l'u$.

Se u è una classe, allora:

Num u = numero cardinale degli u , definito mediante la nozione di funzione *reciproca* (o corrispondenza biunivoca).

infn (*infinito*) = insieme dei numeri cardinali infiniti.

Se u è una classe di numeri reali, allora:

$\Lambda'u$ = insieme dei limiti *superiori* delle classi non vuote contenute in u ,

$\Lambda_1 u$ = insieme dei limiti *inferiori* delle classi non vuote contenute in u ,

Λu = somma delle classi precedenti,

λu = classe dei limiti finiti di $u = q \cap (\Lambda u)$,

∇u = classe *derivata* generale di u , δu = classe *derivata* (ordinaria) di $u = q \cap (\nabla u)$.

La classe λu — introdotta da G. PEANO in F 1890 (ed allora indicata con Cu) — è la minima classe *chiusa* contenente u , e δu — introdotta da G. CANTOR (e da lui indicata con u') — è l'insieme dei punti di *condensazione* (finiti) di u .

Intv = intervallo (continuo).

Long = lunghezza (di un intervallo e di una classe di numeri reali).

Se u è una classe di numeri reali, allora :

in u = classe dei numeri (reali) *interni* ad u ,

ex u = classe dei numeri *esterni* ad u ,

am u = classi dei numeri del *contorno* (o frontiera) di u ⁽¹⁰⁾.

prob = probabilità.

Se n è un numero naturale ed r un numero naturale minore od eguale ad n , allora :

Cx n = complesso di n numeri reali,

unit(n, r) = complesso unitario di ordine n e di posto r .

Sgn, simbolo per il *segno* di una *permutazione* ⁽¹¹⁾.

Dtrm, simbolo per il *determinante* corrispondente ad una data matrice quadrata.

lin (*lineare*), segno per le trasformazioni lineari.

Subst (*sostituzione*), segno per le sostituzioni lineari fra complessi dello stesso ordine.

Sb, simbolo per la sostituzione lineare corrispondente ad una data matrice.

Invar, a = invariante di ordine r per la sostituzione a .

i (unità immaginaria), significato ordinario.

q' = numero immaginario, cioè del tipo $a + bi$, ove a e b sono reali.

Se a è un numero immaginario, allora :

real a = parte *reale* di a ,

imag a = *coefficiente* della *parte immaginaria* di a ,

Ka = coniugato di a .

* $\sqrt{\quad}$ = radice nel campo immaginario.

Cap. IV (*Geometria*). p. 165-200, totale dei simboli nuovi: 35.

p = punto.

v = vet = vettore.

⁽¹⁰⁾ Concetti introdotti da G. Peano in F 1889, ed allora indicati con I E L; in F. III ed F. IV è stato introdotto soltanto il primo di essi, ed indicato con Int.

⁽¹¹⁾ Simbolo introdotto da G. Peano in una nota marginale di F. V (cfr. § 7), per evitare omonimia col simbolo sgn, già usato per la funzione di Kronecker.

dist = distanza (di due punti, di un punto da una classe di punti, di due classi di punti).

U (*unitario*). Se a è un vettore non nullo, allora Ua indica il vettore unitario avente la stessa direzione e verso di a .

recta, segno per la retta congiungente di due punti, o per un punto e parallela ad un vettore.

p_2 = retta (insieme di tutte le rette).

plan, segno per il piano passante per tre punti, o per un punto e parallelo a due vettori.

p_3 = piano (insieme di tutti i piani).

cmp || = componente parallela.

cmp \perp = componente normale.

proj = proiezione ortogonale.

Transl = traslazione (rappresentata da un vettore), intesa come una trasformazione geometrica.

Sym = simmetria ortogonale (rispetto ad un punto, una retta od piano), intesa come trasformazione geometrica.

Motor = movimento, inteso come una trasformazione geometrica.

Homot = omotetia.

cos = coseno, sin = seno.

coord (*coordinata*). Se i, j, k è una terna di vettori non complanari, allora la scrittura: coord ($u; i, j, k$) indica la prima coordinata del vettore u rispetto al sistema di riferimento i, j, k .

A (*assoluto*) = Rotor (di F. IV, p. 284), indica una particolare classe di sostituzioni lineari, ciascuna applicabile ai vettori di un piano e che li fa rotare di un angolo retto in un verso fissato. Gli enti della classe Rotor sono anche detti unità *immaginarie* ⁽¹²⁾.

quaternio = qtr = *quaternione* introdotto sotto forma geometrica, come ente riducibile alla forma: $m + xi$, ove m, x sono numeri reali ed i un *rotore*.

(12) La notazione A, introdotta in F. V, al posto della notazione Rotor di F. IV, non è opportuna, perchè in tal modo si crea omonimia con la successione A di numeri (collegata alla successione B dei numeri di Bernoulli).

$\text{Imag } a$ = parte immaginaria di a , ove a è un quaternione.

α = segno del prodotto *alterno* (progressivo) di GRASSMANN.

v^3 = trivettore = prodotto alterno di tre vettori.

v^2 = bivettore = prodotto alterno di due vettori.

p^4 = quadripunto = prodotto alterno di quattro punti.

p^3 = tripunto = prodotto alterno di tre punti.

p^2 = bipunto = prodotto alterno di due punti.

$\varphi^1 \varphi^2 \varphi^3 \varphi^4$, formazioni geometriche di gradi 1, 2, 3, 4.

ω (*omega*). Caso particolare del prodotto alterno *regressivo* di GRASSMANN. Secondo che a è una formazione geometrica di grado 1, 2, 3, 4 si ha che ωa è un numero (reale), un vettore, un bivettore, od un trivettore; detti rispettivamente: *massa*, *vettore*, *bivettore* e *trivettore* di a .

I (*indice*), particolare trasformazione lineare di bivettori in vettori e di vettori in bivettori.

I (*indice inverso*) = I^{-1} . Se a è un vettore, allora $I^{-1}a$ indica una particolare trasformazione lineare (*quaternione retto*), applicabile solo ai vettori ortogonali ad a .

posit (*posizione*). Se a è una formazione geometrica di grado 1, non nulla, allora *posit* a è un punto od una direzione (punto improprio), secondo la natura di a .

Cap. V (*Limiti*), p. 200-270, totale dei simboli nuovi: 21.

Lm = classe limite (di una successione o di una funzione).

\lim = limite ordinario (di una successione o di una funzione).

const = segno per le funzioni *costanti*.

cres = segno per le funzioni *crescenti*.

cres_0 = » » » » *mai decrescenti*.

decr = segno per le funzioni *decrescenti*.

decr_0 = » » » » *mai crescenti*.

cont = segno per le funzioni *continue*.

e , (numero "e,") significato ordinario.

\log = logaritmo in base e .

tng = tangente (funzione).

π = significato ordinario.

\log^* = logaritmo nel campo immaginario.

\sin^{-1} = seno inverso = arc sin, \cos^{-1} = coseno inverso = arc cos,
 tng^{-1} = tangente inversa = arc tng.

ang = angolo (misurato in radianti).

Rotat (*rotazione*). Segno per le rotazioni in un piano, intese come trasformazioni geometriche. Se o è un punto, i è il rotore di un angolo retto, in un dato verso, per i vettori di un dato piano, e t è un numero reale, allora Rotat(o, i, t) indica la rotazione, nel piano detto, di centro o e di un angolo di t radianti, nel verso di i o nel verso opposto, secondo il segno di t .

Se a è una formazione geometrica di grado 2, allora:
 vel a = *velocità* rappresentata dalla formazione a , indica una particolare trasformazione lineare delle formazioni di primo grado in vettori;

μa = *moto* rappresentato dalla formazione a . Se a è un bipunto, allora μa è una *rotazione*; se a è un bivettore, allora μa è una *traslazione*.

Fc, segno per le *frazioni continue*.

Cap. VI (*Calcolo differenziale*), p. 275-331, totale simboli nuovi: 21.

D = derivata, segno per l'operazione di derivazione.

Interp = segno per la funzione *interpolante*.

intero = segno per le funzioni *intere* (reali di variabile reale).

gradu = grado (di una funzione intera).

radices = segno per le radici (nel campo immaginario) di una funzione intera di grado finito.

rectaT = *recta tangente* (ad una linea descritta da un punto mobile).

planN = piano normale.

planO = piano osculatore.

T, N, B , vettori unitari diretti secondo la tangente, la normale e la binormale.

rectaN = normale principale.

rectaB = binormale.

Ax = asse del piano osculatore.

Cc = centro di curvatura, Rc = raggio di curvatura.

curvatura = vettore diretto secondo la normale principale e di modulo reciproco del raggio di curvatura.

torsio = torsione.

D_1, D_2 , segni per le derivate parziali rispetto alla prima od alla seconda variabile.

Tang , segno per la figura tangente (ad una qualsiasi classe di di punti).

Cap. VII (*Calcolo integrale*), p. 339-386, totale simboli nuovi: 20.

s' = poligono circoscritto, s = poligono inscritto.

S' = integrale superiore, S_i = integrale inferiore.

S = integrale.

Se u è un intervallo e p è un punto funzione definita in u , allora :

chorda (p, u) = distanza delle posizioni estreme del punto;

polyg (p, u, h) = lunghezza della linea poligonale inscritta nella traiettoria di p nell'intervallo u diviso dai valori h (ove h è un insieme finito di numeri contenuti in u e contenenti gli estremi di u).

Arcu (p, u) = lunghezza dell'arco descritto dal punto p , quando la variabile varia in u (definito come il limite superiore delle poligonali inscritte).

Se u è una classe di numeri reali, allora :

Long₁ u = lunghezza inferiore di u ,

Long' u = lunghezza superiore di u .

O, segno per l'oscillazione di una funzione definita, reale di variabile reale.

Se u è una classe di numeri reali, allora :

long u = lunghezza media di u , (analoga alla misura esterna di LEBESGUE).

Se u è una classe di punti di un piano, allora :

Area₁ u = area inferiore di u , Area' u = area superiore di u ,

Area u = area (propria) di u .

Se u è una classe di punti, allora :

Volum₁ u = volume inferiore di u , Volum' u = volume superiore di u , Volum u = volume (proprio) di u .

Se u è una classe di punti e $\text{Volum } u = 0$, allora :
 area $u =$ area di u (definita generalizzando la definizione di BOR-
 CHARDT).

Se u è una classe di punti ed $\text{area } u = 0$, allora :
 arc $u =$ lunghezza di u (definita generalizzando la definizione di
 MINKOWSKI).

Cap. VIII (*Applicazioni*), p. 408-458, totale simboli nuovi: 15.
 $\gamma =$ costante di EULER-MASCHERONI.

Se x è un complesso di ordine n ed r è un numero intero
 positivo minore od eguale ad n , allora :

$E_r x =$ l'elemento di posto r di x .

$u_n =$ insieme dei complessi di ordine n di modulo minore di 1
 (o sfera ad n dimensioni, di centro il punto zero e di raggio 1).

Dg, segno per la derivata *generale* (si ottiene sostituendo Lm a
 lim nella definizione della derivata ordinaria).

$\tilde{\omega} =$ segno per la particolare legge di scelta indicata da PEANO,
 che permette di fare corrispondere ad ogni classe u , di com-
 plessi di ordine n , un suo elemento ⁽¹³⁾.

Dg₁, segno per la derivata generale *parziale*, rispetto alla prima
 variabile.

$\Theta_n =$ insieme dei complessi di ordine n , di cui ogni coordinata è
 un numero di Θ (o cubo, pieno e chiuso, ad n dimensioni, di
 lato 1, di cui un vertice è l'origine e gli spigoli sono paralleli
 agli assi coordinati).

G = segno per il centro di *gravità*.

Inertia = segno per il momento d'*inerzia* (rispetto ad un punto,
 un asse od un piano).

H = omografia vettoriale, intesa come una trasformazione lineare
 di vettori in vettori.

Se a è un'omografia vettoriale, allora :
 $Sa =$ scalare di $a =$ invariante lineare di a ,
 $Va =$ vettore di a .

⁽¹³⁾ Scrivo $\tilde{\omega}$, al posto di ω , per evitare l'omonimia con il segno ω già
 usato nel calcolo geometrico.

cont₁ = continuo *lineare*, cont₂ = continuo di ordine 2, cont₃ = continuo di ordine 3 (intesi come particolari classi di punti) ⁽¹⁴⁾.

II. - *Confronto fra i simboli di F. V e di F. IV.*

Numero dei simboli di F. V: 30 di *logica*, 209 di *matematica*, totale: 239.

Numero dei simboli di F. IV: 28 di *logica*, 188 di *matematica*, totale 216.

I simboli di F. V in più, rispetto ad F. IV, sono i seguenti:

Logica: $\cap \cup$ Funct.

Matematica: ord A Bern Λ' Λ_1 ∇ ⁽¹⁵⁾ ex am Sgn Invar
Interp intero gradu Radices Rc D₁ D₂ s' s₁ chorda
polyg O long area arc E, ω_n Dg $\tilde{\omega}$ Dg₁ G Inertia
H S V cont₁ cont₂ cont₃.

In totale: 3 di *logica* e 38 di *matematica*.

I simboli di F. IV, che non figurano in F. V, sono i seguenti:

Logica: V = classe totale.

Matematica: R₀ = numero razionale maggiore od eguale a zero.

Q₀ = numero reale maggiore od eguale a zero.

Med', Med'', segni per particolari classi di valori medi.

Nprf = numero perfetto, cx = complesso.

ord = ordine (di un complesso).

cpl = complementare (nella teoria dei determinanti).

k = particolare sostituzione lineare sui complessi di ordine 2.

Ω = trivettore unitario.

∇ = nabla = parametro differenziale.

planT = piano tangente ad una superficie descritta da un punto funzione di due variabili numeriche.

⁽¹⁴⁾ Nell'indice dei simboli pubblicato in F. V (p. XVII-XIX) sono stati omessi numerosi segni (una quarantina); invece si trovano in più i simboli ψ Ψ ; però — nel testo — tali simboli sono sempre usati come abbreviazioni temporanee e non introdotti mediante definizioni regolari, quindi non li ho compresi nel mio elenco.

⁽¹⁵⁾ Il simbolo ∇ , di questo elenco, è quello che si presenta nella teoria degli insiemi; in F. IV figura il simbolo ∇ , ma col significato di « parametro differenziale » (o *nabla* di Hamilton).

pntOrdin = punto ordinario.

flex = flesso.

cuspl' = cuspidi di prima specie,

cuspl'' = cuspidi di seconda specie.

epicycl = epicicloide.

In totale: 1 di *logica* e 17 di *matematica*.

Varianti di forma: Nel passaggio da F. IV ad F. V i simboli: « Int Chf conj Rotor » vennero sostituiti rispettivamente da: « in Cfr K A ». (L'ultima sostituzione non è opportuna, come ho già avvertito).

III. - *Confronto fra i simboli di F. IV e di F. III.*

Numero dei simboli di F. IV: 28 di *logica*, 188 di *matematica*, totale: 216.

Numero dei simboli di F. III: 28 di *logica*, 132 di *matematica*, totale 160.

I simboli di F. IV in più, rispetto ad F. III, sono i seguenti:

Logica: V = classe totale.

Matematica: num Interv Fe Δ prob ex ord epl d = dist
 coord p_2 p_3 proj Motor α v^3 v^2 p^4 p^3 p^2 φ^4 φ^3 φ^2 φ^1
 ω I Ω planN rectaB planT Tang Long₁ Long' Long
 Area₁ Area' Area Volum₁ Volum' Volum pntOrdin flex
 cuspl' cuspl'' epicycl vel μ posit I⁻¹ Imag Ax Cc T
 N B torsio.

In totale: 1 di *logica* e 56 di *matematica*.

Un solo simbolo di F. III non figura in F. IV, ed è il simbolo di *logica*: Funct (che sarà ripreso in F. V).

Varianti di forma: Nel passaggio da F. III ad F. IV i simboli: « $q_n \approx$ Norm » vennero sostituiti rispettivamente da « Cx n η rectaN ».

IV. - *Confronto fra i simboli di F. III e di F. 1899.*

Numero dei simboli di F. III: 28 di *logica*, 132 di *matematica*, totale 160.

Numero dei simboli di F. 1899: 26 di *logica*, 126 di *matematica*, totale 152.

I simboli di F. III in più, rispetto ad F 1899, sono i seguenti :

Logica : Λ = classe vuota, $^{-1}$, segno per la funzione inversa.

Matematica : Nprf Int (interno) const Θ_n k ang ∇ Norm
curvatura.

In totale : 2 di *logica* e 9 di *matematica*.

I simboli di F 1899 non riportati in F. III (nè nei tomi seguenti) sono :

Sgm (*segmento*) = segmento di numeri razionali.

\lrcorner (*l' capovolto*) = simbolo per trasformare un numero reale positivo nel segmento razionale corrispondente.

perm = permutazione.

In totale : 3 di *matematica*.