Recensioni.

* Luigi Bianchi, Opere, Vol. III, Edizioni Cremonese, Roma 1955 (Pietro Tortorici)
* Cinquant'anni di relatività, Ed. Universitaria, FIrenze, 1955 (Antonio Pignedoli)
* M. S. Barlett, An introduction to stochastic processes, Cambridge University Press, 1953 (Carlo Bonferroni)
* P. S. Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954 (Guido Zappa)
* Théo Kahan, Physique des quides d'ondes élecromagétiques, Gauthier Villars, Paris, 1952 (Giovanni Lampariello)
* Louis de Broglie, La Physique quantique restera-t-elle indéterministe? Les grands problèmes des Sciences, Gauthier Villars, Paris, 1953 (Giovanni Lampariello)
* M. Zamansky, La sommation des séreis divergentes, Gauthier Villars, Paris, 1954 (Luigi Merli)
* Andreé Delachet, La resistence des matériaux, Presses Universitaries de France, 1953 (Dario Graffi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 577–604.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_577_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

RECENSIONI

LUIGI BIANCHI, *Opere*, Volume III, a cura della Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Edizioni Cremonese, Roma, 1955, pp. 852 (L. 7.000).

Il volume comprende 29 lavori del BIANCHI nei quali si tratta principalmente dei sistemi tripli ortogonali e delle loro trasformazioni.

Nella introduzione del primo volume di queste Opere, si ha già, su questi sistemi, un esauriente e dotto riassunto ad opera del FUBINI, uno fra i più autorevoli discepoli del BIANCHI; in questo terzo volume, il compianto Professore BERTRAND GAMBIER ha suddiviso in cinque gruppi le memorie suddette, premettendo a ciascuno un chiaro cenno del contenuto.

E' ben vero che i risultati essenziali esposti si trovano condensati magistralmente nei Capitoli 28, 29, 30 della terza edizione delle classiche « Lezioni di Geometria Differenziale », ma la lettura dei lavori originali è sempre oltremodo interessante ed istruttiva perchè, mentre nelle Lezioni l'esposizione è inquadrata rigorosamente in un trattato generale, in queste si segue più da vicino il filo conduttore delle singole ricerche e lo sviluppo del pensiero dell'Autore e, inoltre, appariscono più chiaramente i legami di ogni ricerca particolare con innumerevoli problemi che, di volta in volta, sono accennati e spesso risoluti.

I cultori di Geometria Differenziale conoscono bene queste elevate ricerche; io esporrò qui, in forma elementare e rinunziando ad ogni linguaggio tecnico, i risultati essenziali del volume, con la intenzione precipua di invogliarne la lettura ai matematici non dedicati specialmente a questi studi geometrici e sorvolerò su numerose questioni che, pur essendovi trattate, non sono attinenti propriamente ai sistemi tripli ortogonali.

Conserverò all'incirca l'ordine adottato dal GAMBIER, non mancando di rilevare che nel volume non sono inclusi tutti i lavori riguardanti i sistemi tripli (qualcuno, ad es. la memoria (142), facendo parte già del volume II) e inoltre che, non essendo conservato l'ordine cronologico dei lavori, si segue meno bene lo sviluppo delle varie ricerche, giacchè, nelle successive memorie, si fanno continui richiami e si hanno ricorrenze a quelle precedenti in ordine di tempo.

* * *

E' ben noto che la determinazione di una famiglia di LAMÉ dipende dalla integrazione di una equazione a derivate parziali del terzo ordine in tre variabili (di DARBOUX-CAYLEY) l'integrale generale della quale è sconosciuto. Le numerose famiglie di LAMÉ ed i corrispondenti sistemi tripli-ortogonali fino ad ora determinati sono stati ottenuti considerando integrali particolari (e spesso notevolmente semplici) della equazione suddetta, ovvero del sistema di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di LAMÉ od anche riconoscendo, con considerazioni geometriche dirette e con l'ausilio di teoremi classici (di RIBAUCOUR, di DUPIN, di WEINGARTEN, ecc.), che una particolare famiglia di superficie fa parte di un sistema triplo ortogonale.

I numerosissimi sistemi tripli resi noti dal BIANCHI sono stati frequentemente scoperti con questi due ultimi procedimenti, mediante osservazioni ed accorgimenti che rivelano la grande potenza analitica, l'eccezionale intuito geometrico ed il penetrante acume del Maestro.

* * *

Il primo gruppo di lavori si riferisce ai sistemi tripli-ortogonali connessi ai sistemi ciclici.

In realtà questi, in ordine di tempo, furono i primi incontrati dal BIANCHI: infatti, con la trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche da Lui scoperta, da una superficie S a curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$ si deduce una semplice infinità di superficie Σ (ciascuna complementare di S) costituenti una famiglia di LAMÉ, ortogonale al sistema normale di circoli tracciati uno su ogni piano tangente di S, con raggio R e con centro nel punto di contatto. Le altre due famiglie di LAMÉ di superficie Σ_1, Σ_2 che con la precedente costituiscono il sistema triplo (e che saranno denotate nel seguito col nome di superficie secondarie) hanno ciascuna un sistema di linee di curvatura circolari e sono ordinatamente il luogo dei circoli del sistema normale predetto aventi i centri rispettivamente lungo le linee di curvatura u, v della superficie S.

Questo primo sistema era stato già scoperto da RIBAUCOUR, e il BIANCHI vi si imbattè studiando la strasformazione complementare. Nelle memorie (14), (15), (16), dopo avere stabilito con metodo proprio alcuni notevolissimi teoremi dovuti allo stesso RIBAUCOUR, il BIANCHI scopre già altri numerosi sistemi tripli ortogonali. Egli, nel caso del sistema predetto, determina effettivamente le superficie secondarie Σ_1, Σ_2 nella ipotesi che la superficie S di partenza sia di rotazione ovvero elicoidale; i sistemi tripli corrispondenti ammettono essi stessi rispettivamente un movimento di rotazione o elicoidale che li lascia in se stessi.

Considera quindi, generalizzando, un sistema doppiamente infinito di circoli di raggio costante R, tracciati uno su ciascun piano tangente di una superficie S e passante per il punto di contatto, e dimostra che questo sistema è normale sempre e solo quando la superficie S è sviluppabile e le linee inviluppate su essa dai circoli medesimi sono circoli geodetici di raggio R. Le superficie principali Σ di una famiglia di LAMÉ sono le traiettorie ortogonali di essi circoli e le superficie secondarie Σ_1, Σ_2 degli altri due sistemi sono, rispettivamente, i piani tangenti di S e le superficie luogo dei circoli situati su questi, lungo i circoli geodetici predetti.

Nel lavoro (15) apparisce l'idea di associare al sistema ∞^2 di circoli la considerazione dei sistema dei loro assi che, nel caso generale, è una congruenza di rette.

Nel sistema ciclico di RIBAUCOUR, di cui si è già fatta parola, questa congruenza è quella delle normali della superficie pseudosferica S di partenza; il BIANCHI, generalizzando, suppone che questa congruenza degli assi sia quella delle normali ad una qualunque superficie S e stabilisce per questa le condizioni, espresse da due equazioni differenziali, perchè esista un corrispondente sistema di circoli che sia normale.

Queste condizioni sono soddisfatte, in particolare, da una qualunque superficie di rotazione, e, in questo caso, con semplici quadrature, si deducono ∞^1 sistemi tripli-ortogonali.

Oltre a moltissimi risultati riguardanti la determinazione di questi sistemi, nella memoria (16) la considerazione della congruenza degli assi dei circoli è ripresa felicemente, osservando in primo luogo che, se il sistema è normale o, come dicesi è ciclico, (nel qual caso la congruenza degli assi è detta *ciclica*) essa è una congruenza particolare a falde focali Φ_1, Φ_2 reali e solo in casi speciali queste falde possono degenerare in una linea o in un punto.

La condizione perchè una congruenza di rette sia ciclica è stata data da Darboux e in sostanza la proprietà dipende dalla immagine sferica delle sue sviluppabili; una congruenza ciclica generale lo è una sola volta, cioè esiste un solo sistema normale di circoli che ammette come assi i raggi della congruenza. Ma qui il Bianchi stabilisce un nesso fra la teoria dei sistemi ciclici e quella delle deformazioni infinitesime delle superficie, ponendo il problema di determinare le congruenze di Ribaucour che contemporaneamente siano cicliche.

Il risultato della ricerca è tanto semplice e suggestivo quanto importante: la condizione necessaria e sufficiente perchè una congruenza di Ribaucour sia ciclica è che la corrispondente superficie generatrice, riferita ai parametri delle asintotiche u, v, abbia per la curvatura K la seguente espressione:

$$K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2};$$

ed allora essa è infinite volte ciclica e la determinazione delle superficie ortogonali a ciascuno degli ∞^1 sistemi ciclici che ad essa possono associarsi, dipende da una equazione di Riccati, sempre la medesima finchè la superficie generatrice della congruenza non cambi (41).

Le superficie che hanno la curvatura K espressa nella maniera indicata, rivestono una grandissima importanza e da taluni è stato proposto di chiamarle superficie B o superficie di Bianchi; di esse sono casi particolari le superficie pseudosferiche ($\psi = \text{cost}$; $\varphi = \text{cost.}$) e le superficie con un sistema di asintotiche a torsione costante ($\varphi = \text{cost.}$).

Come è ben risaputo, ogni superficie pseudosferica appartiene come prima falda della superficie focale a una doppia infinità di congruenze pseudosferiche; con geniale intuito il Bianchi pose e risolvette il problema di determinare tutte le congruenze W tali che le due falde focali abbiano in punti corrispondenti la medesima curvatura e pervenne ai risultati:

1) Le congruenze della specie richiesta sono tutte e soltanto quelle che hanno per falde focali due superficie della classe suddetta;

2) ogni superficie di questa classe appartiene come prima falda della superficie focale ad ∞^2 congruenze del tipo indicato.

E' noto poi che lo studio di queste superficie e delle loro trasformazioni asintotiche costituisce uno dei capitoli più suggestivi della Geometria Differenziale (vedi Lezioni, III Edizione, Volume II, Cap. XVII); per esse è definita una trasformazione T_k (analoga alle trasformazioni B_k delle superficie pseudosferiche) e sussiste un teorema speciale di permutabilità.

Un' altra classe di sistemi tripli completamente determinata (44) è quella dei cosidetti sistemi Φ, cioè aventi una famiglia di LAMÉ costituita da superficie Σ con un sistema di linee di curvatura piane C. Se è assegnata una superficie Σ_0 ortogonale alle curve piane C, una di queste curve C_0 e la congruenza normale dei circoli osculatori alle curve C nei punti in cui esse incontrano Σ_0, esiste un sistema triplo Φ_0, detto il sistema ciclico osculatore di Φ, lungo Σ_0.

Il sistema triplo Φ, non appena siano assegnati Σ_0, C_0, Φ_0, si determina per quadrature e qualunque superficie S, avente un sistema di linee di curvatura piane, fa parte di infiniti sistemi tripli Φ. Sono casi particolari di questi sistemi quelli in cui i piani delle linee di curvatura C tagliano sotto un medesimo angolo costante σ tutte le superficie secondarie Σ_1 di una delle famiglie di LAMÉ appartenenti a Φ e l'altro in cui questo angolo, costante per ogni superficie Σ_1, varia da una superficie all'altra della famiglia.

La determinazione di questi sistemi si riconduce rispettivamente al problema delle deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche e di quelle che hanno un sistema di linee asintotiche a torsione costante e, in ambedue i casi, i sistemi tripli corrispondenti si determinano con quadrature.

Infine, altri studi sui sistemi tripli legati coi sistemi ciclici dipendono dal nesso fra i due problemi di deformazione delle superficie e quello di determinare, secondo DARBOUX, le congruenze normali di circoli tracciati nei piani tangenti di una superficie.

Noto uno di questi sistemi ciclici, di cui i piani dei circoli inviluppano una superficie (S) e, fissata una superficie ortogonale al sistema stesso, sono in stretto legame il problema della deformazione di (S) e quello della integrazione della equazione di WEINGARTEN per l'applicabilità. Supposto che (S) sia una sfera (nel qual caso la congruenza degli assi dei circoli è normale) le superficie Σ traiettorie ortogonali della congruenza degli assi, hanno le immagini sferiche delle linee di curvatura comuni con quelle di una superficie a curvatura costante, il BIANCHI mostra che esse sono gli integrali di una particolare equazione di AMPÈRE-WEINGARTEN.

Supposta integrata questa equazione, determina una nuova classe di superficie applicabili sopra una quadrica particolare. Inoltre, supposto di conoscere una superficie a curvatura costante K e le sue geodetiche, trova che, per quadrature, si ottengono ∞^3 superficie Σ integrali della equazione precedente ed i sistemi ciclici corrispondenti.

Un'altra classe di superficie applicabili è ritrovata nella memoria (89) considerando le superficie inviluppo dei piani osculatori alle traiettorie ortogonali di una famiglia di LAMÉ costituita da superficie a curvatura costante, nei punti di una medesima superficie della famiglia.

La memoria (89) contiene ancora numerose osservazioni geometriche relative a particolari applicabilità delle superficie pseudosferiche una sull'altra e al rivestimento (habillage) delle superficie a curvatura costante.

* * *

Diciamo ora brevemente del secondo gruppo di lavori, che riguarda in modo precipuo i sistemi tripli aventi una famiglia di LAMÉ costituita da superficie a curvatura costante.

Considerando dapprima (18) (19) una superficie applicabile su una di di rotazione, riferita a un sistema qualunque u, v ortogonale

$$[ds^2 = d\alpha^2 + r d\beta^2 = E du^2 + G dv^2] ,$$

si osserva che la funzione $\int r d\alpha$ è un integrale della equazione di secondo ordine di CAYLEY per la distanza infinitesima di due superficie di una famiglia di LAMÉ. Supposto che la deformata della superficie di rotazione sia una elicoide, la famiglia di LAMÉ è costituita tutta da elicoidi aventi comuni l'asse e il passo. Se il sistema triplo si assume come quello delle coordinate curvilinee, l'elemento lineare dello spazio ha la forma ben nota:

$$ds^2 = H_1^2 dy_1^2 + H_2^2 dy_2^2 + H_3^2 dy_3^2$$

e i coefficienti H_1, H_2, H_3 sono funzioni di $y_1 + y_2$, y_3; le superficie $y_3 = \text{cost.}$ essendo le elicoidi: questa proprietà, inoltre, è caratteristica per questi sistemi.

Fra questi sistemi è notevole quello in cui le tre famiglie di LAMÉ sono costituite ciascuna da elicoidi coassiali, congruenti ed a curvatura costante per ciascuna famiglia; negativa per due di esse e positiva per la terza, essendo nulla la somma delle tre curvature. In questo caso i coefficienti H_i sono funzioni di $y_1 + y_2 + y_3$ e, quando si escludano i sistemi tripli possedenti due famiglie di LAMÉ costituite da elicoidi sviluppabili, questa è proprietà caratteristica.

Il sistema particolare accennato è l'unico per cui le tre famiglie sono costituite da superficie a curvatura costante (escluse quelle in cui le famiglie sono costituite da superficie di rotazione o da sfere); difatti il BIANCHI ha dimostrato posteriormente (196) che, se in un sistema triplo una famiglia di superficie Σ è costituita da superficie a curvatura costante e se una sola delle superficie secondarie Σ_1 (o Σ_2) è pure a curvatura costante, il sistema è quello precedente, costituito da tre famiglie di elicoidi.

Lo studio di questo sistema è completato nel lavoro (66) dimostrando che esso resta individuato da una superficie elicoidale qualsivoglia Σ e da una curva arbitraria C che esca ortogonalmente da un suo punto e sia traiettoria ortogonale delle eliche descritte dai suoi punti nel moto elicoidale di Σ; le superficie secondarie Σ_1, Σ_2 degli altri sistemi sono pure elicoidali ed integrali di un'equazione di MONGE-AMPÈRE di cui le caratteristiche sono le linee di curvatura. Le superficie Σ_1 e Σ_2 sono ciascuna tale che generano una famiglia di LAMÉ per un gruppo continuo di movimenti. Incidentalmente è provata la esistenza di famiglie di LAMÉ generante da una superficie mediante le trasformazioni conformi di un gruppo G_1 ad un parametro.

Esistono sistemi particolari di questa classe per i quali un sistema di linee di curvatura di una famiglia di LAMÉ è costituito da linee piane.

Ben più notevoli sono i sistemi tripli detti di WEINGARTEN e così denominati dal BIANCHI perchè da Lui scoperti alla luce di un teorema famoso comunicatogli da quell'eminente Geometra (20), (21), (23). Ciascuno di questi sistemi possiede una famiglia di superficie aventi tutte la medesima curvatura costante positiva o negativa. Se le superficie sono pseudosferiche, su due qualunque di esse si corrispondono le linee di curvatura e le linee asintotiche, queste per archi uguali.

In questi sistemi, in ogni punto P di una superficie Σ la traiettoria ortogonale è la curva C comune alle due superficie secondarie Σ_1, Σ_2 che passano per questo punto e la flessione di questa traiettoria ortogonale è detta la *flessione del sistema triplo nel punto P*.

Nella nota (21) è dimostrata l'esistenza di sistemi tripli più generali ammettenti una famiglia di LAMÉ di superficie ciascuna a curvatura costante ma variabile da superficie a superficie. Questi comprendono come casi particolari i precedenti; il DARBOUX li chiamò *sistemi tripli di Bianchi*, e nel suo volume

« *Leçons sur les sistèmes orthogonaux* » (Paris, 1910) vi è dedicato un intero capitolo.

L'esistenza di tali sistemi, stabilita in un primo tempo con considerazioni geometriche, è stata messa successivamente dal BIANCHI (58) fuori dubbio con metodo analitico rigoroso, tanto nel caso delle superficie a curvatura positiva che negativa, riconducendola al teorema di esistenza degli integrali di una equazione a derivate parziali.

A tal fine, l'ingegnoso metodo seguito dal BIANCHI consiste nel caratterizzare una delle superficie secondarie e nell'assicurarne l'esistenza come soluzione di una equazione alle derivate parziali del quarto ordine.

Fra i sistemi tripli di WEINGARTEN alcuni meritano particolare menzione e cioè (18) quelli contenenti una famiglia di superficie di ENNEPER a curvatura costante, col medesimo asse e congruenti per rotazione attorno a questo; essi sono gli unici di questo tipo.

Ai sistemi di WEINGARTEN sono collegate innumerevoli proprietà geometriche, dipendentemente dalla trasformazione complementare B_0 e dalla trasformazione di BÄCKLUND B_σ e per essi sistemi sussiste ancora un teorema di permutabilità.

Tornando al caso generale dei sistemi tripli pseudosferici, il loro studio è completato in un lavoro successivo [(169), pag. 410] caratterizzandone le superficie secondarie Σ_1, Σ_2.

A tale scopo è risoluto preliminarmente (169) il problema di trovare le coppie di superficie (S, S') non parallele, in corrispondenza puntuale biunivoca tale che le linee di curvatura si corrispondano e, di più, la congiungente MM' di punti corrispondenti abbia lunghezza costante e sia ortogonale alle linee di curvatura di un sistema di S (e perciò alle corrispondenti di S'). Perchè una superficie S appartenga a una tale coppia è necessario e sufficiente che, riferita alle linee di curvatura u, v, i suoi elementi verifichino una particolare equazione differenziale del secondo ordine. Una tale superficie S fa sempre parte di un sistema triplo ortogonale di cui una famiglia è costituita da superficie presudosferiche e, nel caso che la curvatura sia la stessa per tutte le superficie, si ha un sistema di WEINGARTEN.

Se K è la curvatura della famiglia di superficie pseudosferiche di un sistema di WEINGARTEN, è dimostrata l'esistenza di sistemi per cui una traiettoria ortogonale C (e quindi tutte le analoghe) ha flessione costante $\sqrt{-K}$ e il sistema triplo è detto allora un *sistema di Weingarten a flessione costante.*

Le superficie secondarie Σ_1, Σ_2 già caratterizzate per tutti i sistemi di WEINGARTEN, hanno qui proprietà particolari e sono dette superficie *ipercicliche di raggio R* perchè hanno, ciascuna, un sistema di linee di curvatura a flessione costante (in analogia alle superficie secondarie di un sistema ciclico di RIBAUCOUR in cui le superficie secondarie hanno ciascuna un sistema di linee di curvatura circolari).

Queste superficie si presentano a coppie *coniugate,* ciascuna essendo il luogo dei centri di curvatura delle linee a flessione costante dell'altra.

Una ulteriore classe di sistemi tripli è determinata dal BIANCHI mediante la nozione di linea di livello (39).

Supposto che la superficie S appartenga ad una famiglia di LAMÉ, detto n il segmento infinitesimo di normale ad S in ogni suo punto intercetto dalla superficie infinitamente vicina nel sistema, le linee di livello sono definite dalla condizione $n = \text{cost.}$ I nuovi sistemi tripli scoperti dal BIANCHI sono quelli per cui le linee di livello L tagliano sotto un angolo costante α le linee di curvatura di un sistema della superficie S. Allora le trajettorie L'_0 che tagliano le stesse linee secondo l'angolo $-\alpha$, costituiscono su S un doppio sistema u, v, per cui l'elemento lineare prende la forma:

$$ds^2 = Edu^2 + 2\cos^2\alpha dudv + \frac{1}{E} dv^2.$$

Queste superficie ammettono una rappresentazione equivalente nel piano, che ad un doppio sistema di rette ortogonali fa corrispondere le traiettorie isogonali L, L' delle linee di curvatura. Questa proprietà è caratteristica per le superficie S, nel senso che ogni superficie che la possegga può far parte di sistemi tripli della specie indicata. Queste superficie S possono dedursi dalle superficie pseudosferiche con opportuno impiego delle trasformazioni B_0 e B_σ.

In un sistema triplo di WEINGARTEN la famiglia di LAMÉ costituita da superficie pseudosferiche con la medesima curvatura K possiede la proprietà che, sulle sue superficie Σ, si corrispondono le linee asintotiche per archi uguali (e quindi le linee di curvatura) e le traiettorie dei singoli punti sono ortogonali alle superficie Σ. Rinunziando a quest'ultima proprietà, il BIANCHI dimostra l'esistenza di sistemi ∞^1 di superficie, con la medesima curvatura costante negativa, su cui si corrispondono ancora per archi uguali le asintotiche, mentre le traiettorie dei singoli punti incontrano le superficie stesse sotto angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$ (122) (134). Un tale sistema è detto un sistema (Ω_σ) di superficie; un sistema (Ω_0) è una famiglia di LAMÉ che fa parte di un sistema di WEINGARTEN.

L'esistenza dei sistemi (Ω_σ) è posta fuori dubbio *a priori* perchè le ∞^1 trasformate per una trasformazione B_σ $(\sigma \neq 0)$ di una stessa superficie pseudosferica di raggio R costituiscono già un sistema siffatto in cui le traiettorie dei singoli punti sono circoli di raggio $R\cos\sigma$; questi particolari sistemi sono detti *i sistemi* (Ω_σ) *elementari*.

Un altro sistema (Ω_σ), costituito da elicoidi pseudosferiche era già noto al BIANCHI da Sue ricerche anteriori [(128) Vol. II di queste Opere, pp. 206].

E' notevole che un sistema (Ω_σ) generale si deduce da un sistema (Ω_0) (cioè da un sistema di WEINGARTEN) applicando ad esso la trasformazione di LIE. Questa, com'è noto, ha un significato puramente analitico nella teoria delle superficie pseudosferiche; con la introduzione dei sistemi (Ω_σ) acquista un significato geometrico in quanto, se di ciascuna superficie S di un sistema di WEINGARTEN si considera la trasformata $\bar{S}$ per una medesima L_σ, queste trasformate, convenientemente disposte nello spazio, costituiscono un sistema (Ω_σ). Con ciò le questioni riguardanti l'esistenza e il grado di arbitrarietà dei sistemi (Ω_σ) sono riportate a quelle analoghe dei sistemi di WEINGARTEN.

Introdotta la nozione di trasformazione infinitesima B^ε_σ di BÄCKLUND, sono dapprima trattati i sistemi elementari e successivamente quelli (Ω_σ) generali che si ottengono per ripetizione continua delle trasformazioni infinitesime; tutte le formule stabilite per i sistemi elementari valgono per quelli generali. L'angolo σ in questi sistemi è costante per tutte le superficie che li costituiscono; esistono però sistemi di superficie pseudosferiche in cui quest' angolo può variare da una superficie ad un'altra; valgono ancora le stesse formule e i sistemi che così si ottengono sono detti in generale *sistemi obliqui di* WEINGARTEN. Essi corrispondono biunivocamente alle coppie (ϑ, φ) di funzioni di tre variabili u, v, w che soddisfano a un sistema di quattro equazioni alle derivate parziali, involgenti una funzione $\sigma(w)$; se $\sigma(w) = \text{cost}$ si ha in corrispondenza un sistema (Ω_σ).

I sistemi (Ω_σ) sono dunque particolari sistemi obliqui di WEINGARTEN; essi però posseggono proprietà speciali di cui conviene accennarne qualcuna.

Il corrispondente sistema di equazioni differenziali nelle funzioni incognite ϑ, φ da cui dipende la determinazione di esso, cambiando ϑ in $\pi + \varphi$ e φ in ϑ, si trasforma in un sistema analogo cui corrisponde un sistema (Ω'_σ), che dicesi coniugato del primo; questa relazione di coniugio è involutoria, e nel caso $\sigma = 0$ i due sistemi coniugati sono sistemi di WEINGARTEN a flessione costante, complementari uno dell'altro.

Qualunque trasformazione di LIE cambia una coppia di sistemi complementari di WEINGARTEN a flessione costante in una coppia di sistemi (Ω_σ), (Ω'_σ) coniugati, e si dimostra che in tal modo si ottengono i sistemi (Ω_σ) più generali.

Tutte le traiettorie isogonali (w) sotto angolo costante σ di un sistema (Ω_σ) sono curve di BERTRAND della medesima famiglia, dipendente solo dalla costante σ; se si considerano due sistemi coniugati, le coppie di traiettorie corrispondenti C, C' sono curve di BERTRAND coniugate.

Un teorema di BIOCHE porta poi che le normali alle superficie pseudosferiche di un sistema (Ω_σ), nei punti in cui esse sono incontrate da una traiettoria isogonale C, costituiscono una rigata applicabile sull'iperboloide rotondo a una falda di semiassi $R \cos\sigma$, $R \operatorname{sen}\sigma$ $(R = 1)$ su cui C è la linea di stringimento. Un sistema (Ω_σ) resta completamente determinato da una superficie pseudosferica e da una curva di BERTRAND uscente da un suo punto, con una orientazione conveniente.

Ragioni di brevità impediscono di entrare in dettagli, aggiungiamo solo che ai sistemi obliqui di WEINGARTEN possono applicarsi le trasformazioni B_0 e B_σ e sussiste, inoltre, per essi un teorema di permutabilità, estensione di quello ben noto per le superficie pseudosferiche isolate. Queste trasformazioni, nel caso dei sistemi (Ω_σ), danno luogo a interessanti proprietà che nei due sistemi, trasformati uno dell'altro, si riflettono in trasformazioni delle curve di BERTRAND, rispettive traiettorie isogonali delle loro superficie, le quali poi si identificano con le trasformazioni note di DEMARTRES e RAZZABONI ed ancora dànno luogo a particolari trasformazioni delle deformate dello iperboloide rotondo, cui sopra si è accennato, anzi in queste si ravvisa l'idea che condusse il BIANCHI alla sua teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche che Egli sviluppò posteriormente.

I risultati suddetti sui sistemi (Ω_σ) considerati nello spazio euclideo, sono quindi estesi negli spazi a curvatura costante (positiva o negativa)..

Nello spazio ellittico i sistemi (Ω_σ) corrispondono ancora biunivocamente alle soluzioni (ϑ, φ) di un sistema di quattro equazioni a derivate parziali; se di ogni superficie si considera la polare (cioè la superficie parallela a distanza $\frac{\pi}{2}$) la totalità di queste costituisce un sistema (Ω_τ), le costanti σ e τ essendo legate dalla relazione $\operatorname{sen}\tau = a \operatorname{sen}\sigma$, essendo $-\frac{1}{a^2}$ la curvatura relativa della superficie pseudosferica.

Nello spazio ellittico c'è pure luogo a considerare coppie di sistemi coniugati (Ω_σ), (Ω'_σ) che si ottengono in modo analogo a quello dello spazio euclideo; i sistemi stessi si ottengono tutti applicando la trasformazione $L\sigma$ di LIE ai sistemi (Ω_0) a flessione costante; e le traiettorie isogonali (w) delle superficie sono curve di BERTRAND dello spazio ellittico ambiente.

Si hanno naturalmente qui altre proprietà particolari dovute alla curvatura dello spazio.

Particolare interesse presentano i sistemi (Ω_σ) dello spazio ellittico le cui superficie hanno curvatura assoluta nulla ($a = 1$) cioè applicabili sul piano euclideo; per queste le traiettorie isogonali (w) sono eliche cilindriche (in particolare rette se $\sigma = \frac{\pi}{2}$), le rigate luogo delle normali alle superficie lungo una di queste traiettorie sono superficie a curvatura nulla, cioè le loro generatrici sono parallele nel senso di CLIFFORD, etc. etc.

Passando agli spazi iperbolici ($K = -1$), i corrispondenti sistemi (Ω_σ) si distinguono in sistemi di prima o di seconda specie secondo che la curvatura relativa delle loro superficie è negativa o positiva, e, pei sistemi delle due specie, sono stabilite proprietà analoghe a quelle già viste nell'ordinario spazio o negli spazi ellittici; i sistemi tutti si ottengono per trasformazione di LIE dei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante. Se questa è maggiore di 1 si ottengono i sistemi di prima specie, se è minore di 1 i sistemi di seconda specie.

La analogia dei risultati negli spazi a curvatura costante con quelli dello spazio euclideo (escludendo il caso delle superficie a curvatura assoluta nulla nello spazio ellittico) risulta maggiormente precisata osservando che i sistemi (ciascuno di 4 equazioni) differenziali nei vari spazi possono identificarsi con opportuna scelta delle costanti, talchè ne segue che ad una superficie pseudosferica dello spazio euclideo corrisponde una superficie pseudosferica dello spazio a curvatura costante, coniugata in deformazione alla prima e perciò, infine, che operando la trasformazione H del BIANCHI (che cambia una superficie nella sua coniugata in deformazione) ogni sistema (Ω_σ) dello spazio euclideo si muta in un sistema analogo dello spazio a curvatura costante e le curve di BERTRAND, traiettorie isogonali nel primo spazio, in curve di BERTRAND del secondo spazio.

* * *

Le ricerche e i risultati sui sistemi tripli ortogonali negli spazi a curvatura costante portano al problema di ridurre una forma differenziale quadratica in tre variabili, definita positiva e a curvatura nulla o costante, alla forma:

$$H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2,$$

con la condizione che la forma in due variabili $H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2$ sia essa stessa a curvatura costante.

I risultati ottenuti in precedenza relativamente a questo problema (19) (20) sono estesi (32) alle forme indefinite a curvatura costante. In un primo tempo il BIANCHI considera le forme a curvatura nulla trasformabili nella $dx^2 + dy^2 - dz^2$ (o nella forma opposta). L'assoluto dello spazio S che ha per espressione del quadrato dell'elemento lineare questa forma, degenera in una conica reale e la geometria dello spazio S è la geometria parabolica.

Premesso uno studio essenziale su alcune equazioni a derivate parziali, già in sè stesso molto interessante e avente lo scopo di preparare formule utili per la ricerca da compiere, è studiata la geometria metrica dello spazio S facendone una rappresentazione euclidea, assumendo come quadrica assoluta (degenere) la conica all'infinito del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Questo porta a distinguere le rette dello spazio in due categorie e cioè di prima specie se la parallela per l'origine è interna al cono, di seconda specie se è esterna; analogamente un piano si dirà di prima o di seconda specie secondo che la sua normale ordinaria è di prima o di seconda specie, e, infine, le superficie dello spazio sono dette di prima o di seconda specie secondo che i loro piani tangenti sono di prima o di seconda specie. Rilevate le particolarità essenziali della rappresentazione euclidea, si ricerca quando la forma $dx^2 + dy^2 - dz^2$ sia trasformabile in quella a curvatura nulla $a\,du^2 + b\,dv^2 + c\,dw^2$ $(a = H_1^2,$ $b = H_2^2,\ c = -H_3^2)$; perchè ciò accada occorre e basta che le funzioni H_1, H_2, H_3 verifichino un sistema di sei equazioni alle derivate parziali, del tutto analogo al sistema di LAMÉ negli spazi di curvatura costante.

Lo stesso problema è trattato per la analoga trasformazione nella forma

$$H_1^2 du^2 - H_2^2\, dv^2 + H_2^3\, dw^2.$$

Premessi poi alcuni studi generali sulle superficie Σ immerse nello spazio S, si tratta delle superficie a curvatura costante K (essendo K la curvatura della forma $dx^2 + dy^2 - dz^2$ quando x, y, z siano legate dall'equazione della superficie). Tanto nel caso che la curvatura costante K sia positiva o negativa, la determinazione della superficie è ricondotta alla integrazione di una equazione del secondo ordine perfettamente analoga a quella dell'ordinario spazio, e sussiste una trasformazione (analoga del tutto a quella di BÄCKLUND) che da una superficie Σ ne fa dedurre un'altra con la medesima curvatura e che completa con la prima la superficie focale di un sistema doppiamente infinito di raggi in cui la distanza di due punti corrispondenti sulle falde è, nella metrica dello spazio S, costante.

Tutto ciò tanto se la curvatura è positiva o negativa ($K = \pm 1$). Le superficie di S a curvatura costante negativa sono dette pseudosferiche; la trasformazione di cui si è fatto parola in generale è ora precisamente quella di BÄCKLUND (in particolare la complementare), e due superficie contigue Σ, Σ' sono una di prima specie e una di seconda. Ne risulta facilmente la esistenza, nello spazio S, di sistemi ciclici di RIBAUCOUR. Riguardo ai sistemi di WEINGARTEN (contenenti cioè una famiglia di LAMÉ di superficie con la medesima curvatura costante) nello spazio S ne esistono costituiti con superficie a curvatura positiva o negativa (tutte di prima specie o tutte di seconda specie) ed imitando il metodo già tenuto nello spazio ordinario (20), da ogni sistema noto di WEINGARTEN se ne deducono ∞^2 per trasformazione B_k, le superficie di ciascuno essendo della stessa specie di quella di provenienza se $K = +1$, di specie diversa se $K = -1$. Però la trasformazione complementare per i sistemi pseudosferici dà luogo ad una serie semplicemente infinita: $\ldots \Sigma_{-2}, \Sigma_{-1}, \Sigma, \Sigma_1, \ldots$ di sistemi, alternativamente di superficie di prima o di seconda specie finchè le traiettorie ortogonali della superficie abbiano flesssione $\frac{1}{\rho} > 1$; se $\frac{1}{\rho} = 1$ la serie comprende due soli sistemi che sono, nello spazio S, i corrispondenti dei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante dello spazio ordinario.

Oltre ai sistemi suddetti di WEINGARTEN costituiti da superficie con la medesima curvatura costante, è stabilita l'esistenza di sistemi in cui la curvatura, costante per ogni superficie, varia da una all'altra, e di questi ne esistono comprendenti superficie tutte di prima specie o tutte di seconda specie.

Le trasformazioni B_k sono ancora applicabili con il risultato che, se $K = +1$ la trasformazione dà un sistema della stessa specie, se $K = -1$ si ottiene un sistema di specie diversa.

Infine, tutti i risultati raggiunti relativamente alla forma $dx^2 + dy^2 - dz^2$

indefinita a curvatura nulla, sono estesi alle forme indefinite a curvatura costante K per le quali è assunta come forma tipica la seguente:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{K}{4}\right)^2}.$$

Nella stessa memoria (32) in cui sono stabiliti i risultati accennati, relativi ai sistemi tripli-ortogonali, sono trattate altre interessanti questioni delle quali diremo solo qualche parola. In primo luogo è fatto uno studio delle superficie minime nello spazio euclideo indefinito S. La determinazione di una tale superficie $z = z(x, y)$ è ricondotta alla integrazione della equazione:

$$(1 - q^2)r + 2pqs + (1 - p^2)\,t = 0$$

analoga a quella relativa alle ordinarie superficie minime. L'elemento lineare della superficie, riferito alle sue linee di curvatura u, v ha la forma:

$$ds^2 = e^{2\vartheta}(du^2 \pm dv^2)$$

secondo che la superficie è di prima o di seconda specie, e per queste superficie sussistono formule analoghe a quelle di Monge e di Weierstrass, che dànno per quadrature l'integrale dell'equazione predetta.

E' poi considerato, nello spazio S, un problema analogo a quello di Plateau e cioè di determinare una regione di superficie minima, semplicemente connessa, delimitata da un contorno chiuso prefissato e priva di punti singolari all'interno di questo. Analogamente a quello che accade per il problema di Plateau nel caso che il contorno sia formato con segmenti di retta, in cui il problema stesso si riconduce a quello della rappresentazione conforme di un poligono sferico sul piano, nello spazio S il problema si riporta, almeno per le superficie di prima specie, a quello della rappresentazione conforme di un poligono pseudosferico sul piano.

Se il contorno assegnato è delimitato da tratti rettilinei (ed eventualmente da piani che segano ortogonalmente la superficie) il problema è ricondotto alla rappresentazione conforme di un poligono P di un piano complesso ω, avente per lati archi di circolo col centro in un punto dell'asse reale, in un poligono A' a lati rettilinei di un piano complesso σ.

Il prolungamento analitico della corrispondente superficie minima Σ dà in generale una superficie intrecciata, tale che in ogni parte finita dello spazio sono contenute infinite regioni di essa.

Volendo che Σ si estenda regolarmente nello spazio, il poligono P deve essere il semipoligono generatore di un gruppo Fuchsiano e questa condizione è sufficiente nel caso che il contorno assegnato sia a lati tutti rettilinei. Comunque, sono chiamate superficie Fuchsiane le superficie Σ integrali della equazione soprascritta, costituite da infinite regioni, ma tali che in ogni parte finita dello spazio ne esista un numero finito.

Sono dati esempi di superficie siffatte e si perviene in ultimo al risultato che ad ogni gruppo fuchsiano della prima famiglia corrisponde un certo numero di superficie fuchsiane.

* * *

La determinazione di un sistema triplo ortogonale dello spazio euclideo, quando siano già determinate le sei funzioni β_{ik} (rotazioni $i \neq k$) dal sistema di nove equazioni differenziali del primo ordine:

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial u_l}=\beta_{il}\beta_{lk}\,,\quad \frac{\partial\beta_{ik}}{\partial u_l}+\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial u_k}+\beta_{li}\cdot\beta_{lh}=0 \qquad (i\neq k\neq l)$$

può condursi in due modi, integrando uno dei due sistemi (aggiunti uno dell'altro):

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k}=\beta_{ki}H_k\quad,\quad\frac{\partial W_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}W_k$$

le W_1, W_2, W_3, denotando le distanze dell'origine O dalle facce del triedro principale in ogni punto del sistema triplo. Determinate le funzioni H_i il sistema triplo corrispondente, che al ds^2 dello spazio dà la forma $ds^2=\sum_i H_i^2 du_i^2$, si ha per quadrature; determinate invece le funzioni W_i, il sistema triplo si ha in termini finiti.

In problemi particolari è stata rilevata dal BIANCHI (151) (165) una sorta di analogia o di reciprocità fra le proprietà dei sistemi che dipendono dalle funzioni H_i o dalle W_i; ad esempio fra i sistemi tripli ortogonali che contengono una famiglia, $u_3=\text{cost}$, di superficie a curvatura costante, ove si faccia una opportuna scelta dei parametri u_1, u_2, i coefficienti H_1, H_2 risultano legati dalla relazione $H_1^2+cH_2^2=\text{cost.}$ (c costante), e nasce naturalmente il problema di decidere se, analogamente, esistano sistemi tripli ortogonali per cui si abbia $W_1^2+cW_2^2=\text{cost.}$

Il problema (ove sia $c\neq 0$, $c\neq 1$) si risolve affermativamente; i sistemi tripli di questo tipo dipendono da tre funzioni arbitrarie essenziali e fra essi ve ne è una classe particolare tale che per le superficie $u_3=\text{cost.}$ il rapporto $\frac{W_1}{W_2}$ è costante e, inoltre, le traiettorie ortogonali di esse superficie $u_3=\text{cost.}$ sono curve piane.

Il BIANCHI assegna trasformazioni particolari che da una soluzione (W_1, W_2, W_3) del sistema differenziale predetto fanno conoscere una soluzione (H_1, H_2, H_3) del sistema aggiunto e il corrispondente sistema triplo, possedendo le stesse rotazioni del dato, è parallelo a questo, nel senso di COMBESCURE.

Una proprietà comune ai sistemi (W_1, W_2, W_3) determinati in tal modo è che le superficie di ciascuna famiglia sono divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti dalle loro traiettorie isogonali, secondo un conveniente angolo 2σ, delle loro linee di curvatura.

La ricerca dei sistemi tripli della classe accennata $W_1^2+cW_2^2=\text{cost.}$ risulta legata in modo inaspettato alle superficie pseudosferiche costituenti i sistemi obliqui di WEINGARTEN. Generalizzando questi studi è posto il problema di determinare i sistemi tripli tali che sia $k_1W_1^2+k_2W_2^2+k_3W_3^2=\text{cost.}$ (k_1, k_2, k_3 costanti tutte diverse). Si dimostra l'esistenza di siffatti sistemi e che essi hanno lo stesso grado di generalità dei precedenti.

Inoltre essi hanno la medesima rappresentazione sferica dei primi e i quadrati delle coppie di rotazioni (β_{ik}, β_{lk}) sono legati da una relazione lineare a coefficienti costanti che è caratteristica per la immagine del sistema. Dopo di che l'Autore è condotto naturalmente allo studio di quei sistemi tripli ortogonali, detti sistemi (Ω), che hanno la medesima rappresentazione sferica dei due sistemi tripli precedenti e la determinazione della loro immagine sferica è ricondotta completamente alla teoria dei sistemi obliqui (Ω_σ) di WEINGARTEN ad angolo costante.

Questi sistemi (Ω) sono tali che le superficie delle tre famiglie che li costituiscono hanno la congruenza delle loro normali coi raggi paralleli a quelli di una congruenza pseudosferica risultando le loro linee di curvatura corrispondenti alle asintotiche delle falde focali della congruenza stessa; la distanza dei punti limiti e l'angolo dei piani focali resta costante per le superficie di ciascuna famiglia del sitema triplo. Le congruenze pseudosferiche corrispondenti alle tre famiglie sono sempre reali; ma per una sola di esse, per fissare le idee, per la $u_3 = \text{cost}$, le sviluppabili della congruenza sono reali mentre le superficie sono divise in parallelogrammi infinitesimi di uguale area da un doppio sistema di traiettorie isogonali delle linee di curvatura formanti tra loro l'angolo 2σ.

Ai sistemi (Ω), in corrispondenza a quello che avviene per le loro immagini sferiche, si possono estendere le trasformazioni di BÄCKLUND come pure quelle di LIE e si ha inoltre una particolare trasformazione per parallelismo e una per inviluppi di sfere (RIBAUCOUR). Sono infine considerati sistemi tripli più generali ottenuti con procedimento analogo, considerando in luogo dei sistemi (Ω_σ) i sistemi pseudosferici in cui l'angolo σ varia da una superficie ad un'altra della famiglia, ovvero considerando, in luogo delle congruenze pseudosferiche aventi come falde focali le superficie corrispondenti in sistemi $(\Omega_{\frac{\pi}{2}-2\sigma})(\Omega'_{\frac{\pi}{2}-2\sigma})$ associati, quelle congruenze W in cui le falde focali hanno in punti corrispondenti la medesima curvatura.

Molti dei risultati accennati persistono per i sistemi $n.^{pli}$ ortogonali nello spazio ad n dimensioni (154).

* * *

L'ultima parte del volume tratta principalmente delle trasformazioni dei sistemi tripli e del teorema di permutabilità relativo ad esse. Per le trasformazioni di RIBAUCOUR dei sistemi tripli ortogonali, il teorema dato da questo Geometra viene precisato nel senso che se in una coppia (Σ) (Σ') di sistemi tripli ortogonali, corrispondentisi punto a punto con conservazione delle linee di curvatura, accade che per una delle tre serie le superficie siano le trasformate di RIBAUCOUR delle corrispondenti dell'altra, lo stesso avviene per le altre due serie e la costruzione geometrica data dal RIBAUCOUR fa derivare da un sistema triplo il più generale contiguo ad esso per trasformazione di RIBAUCOUR. Inoltre, nello spazio ordinario, se due sistemi (Σ), $(\bar{\Sigma})$ sono contigui (sempre per trasformazione di RIBAUCOUR), i tre centri delle sfere inviluppanti che passano per due punti corrispondenti P, $\bar{P}$ sono vertici di un triangolo di cui ogni lato — se P e $\bar{P}$ si spostano su due superficie corrispondenti — descrive una congruenza ciclica, i fuochi della congruenza essendo su questo lato i due vertici; i tre vertici poi descrivono tre sistemi tripli coniugati. Questi risultati sono estesi quasi tutti agli spazi euclidei a n dimensioni e a quelli a curvatura costante.

Per le trasformazioni di RIBAUCOUR dei sistemi ortogonali sussiste un teorema di permutabilità: Se due sistemi (Σ_1), (Σ_2) sono contigui a un medesimo sistema (Σ), esiste una classe ∞^1 di sistemi tripli, determinabili con una quadratura, ciascuno dei quali è contiguo a (Σ_1), (Σ_2) per trasformazione di RIBAUCOUR.

Una ulteriore trasformazione di sistemi tripli ortogonali è quella di

COMBESCURE la quale fa nascere da un sistema triplo ortogonale infiniti altri dipendenti da tre funzioni arbitrarie, sistemi detti tutti paralleli al primo perchè aventi comuni con esso le rotazioni e cioè tali che in punti corrispondenti i triedri principali hanno la stessa orientazione. Queste trasformazioni, quando siano applicate ad un sistema triplo (S) con una famiglia di superficie a curvatura costante, danno luogo a proprietà particolarmente notevoli; quando sia noto un sistema (Σ) parallelo ad (S), con soli calcoli di derivazione si può costruire una successione di sistemi tripli paralleli, illimitata bilateralmente.

Se (S), (S') sono poi due sistemi pseudosferici legati da una trasformazione B_k, è stabilita una particolare trasformazione fra un sistema (Σ) parallelo ad (S) e un sistema $(\bar{\Sigma})$ parallelo ad (S'); questa trasformazione per i sistemi (Σ) è ancora detta trasformazione di BÄCKLUND. Essa è reale nel caso che la curvatura sia negativa; è immaginaria nel caso che la curvatura sia positiva, ma componendo due opportune trasformazioni coniugate, si ottiene una trasformazione reale per inviluppi di sfere.

I sistemi paralleli ai sistemi di WEINGARTEN a flessione costante posseggono la proprietà caratteristica che i centri delle sfere osculatrici delle curve corrispondenti a quelle a flessione costante descrivono un sistema triplo parallelo al sistema di WEINGARTEN a flessione costante, complementare del primo. Le superficie $u_1 = \text{cost}$, $u_2 = \text{cost}$ appartenenti a due serie di questi nuovi sistemi tripli, e che sono le corrispondenti delle superficie ipercicliche S del sistema di WEINGARTEN a flessione costante, sono denominate superficie G e posseggono la proprietà caratteristica che, per ciascuna di esse, il luogo dei centri delle sfere osculatrici alle curve trasformate delle linee a flessione costante della corrispondente S, è una superficie G' che corrisponde a G per linee di curvatura e che ha la immagine sferica di queste linee comune con la superficie iperciclica S' coniugata di S. A queste superficie G, già considerate isolatamente da GUICHARD, si applicano alcune trasformazioni che si ricollegano alla B_0 e alla B_σ per le superficie a curvatura costante.

Le ricerche di DARBOUX-GUICHARD nello spazio ordinario sui sistemi tripli ortogonali, che dànno al ds^2 dello spazio la forma solita:

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2$$

con $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \text{cost}$, nel lavoro (161) vengono estesi agli spazi ad n-dimensioni a curvatura costante, in particolare nulla. Si dimostra l'esistenza, in questi spazi, di sistemi n.pli ortogonali dipendenti da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie di una variabile, tali che si abbia:

$$ds^2 = \sum_{\lambda, 1}^{n} H_\lambda^2 du_\lambda^2 \quad , \quad \sum_\lambda H_\lambda^2 du_\lambda^2 = \text{cost}$$

e per essi, negli spazi pseudosferici, è costruita una trasformazione analoga alla trasformazione complementare.

Inoltre (162) nello spazio euclideo S_n sono trattate le trasformazioni di RIBAUCOUR per inviluppi di ipersfere ponendo le formule di trasformazione sotto un aspetto particolare che, nel caso $n = 2$, è stato segnalato da EISENHART e applicandole dopo alle trasformazioni dei sistemi E (di DARBOUX-EGOROV, cioè tali che $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, $ds^2 = \Sigma \frac{\partial \theta}{du_i} du_i^2$) e ai sistemi di GUICHARD-DARBOUX. Ogni sistema E di S_n ammette ∞^n trasformate E' di RIBAUCOUR della medesima classe.

che si ottengono integrando un sistema lineare; queste trasformazioni dei sistemi E hanno le analoghe negli spazi generali a curvatura costante (182).

Per le trasformazioni di RIBAUCOUR dei sistemi di GUICARD-DARBOUX dopo averne amplificato la definizione ($c_1 H_1^2 + ... + c_n H_n^2 = \text{cost}$ con le c_i costanti diverse da zero) sono stabiliti due sistemi differenziali ad uno dei quali debbono soddisfare le rotazioni e all'altro i coefficienti H_i, ed è dimostrato che da ogni sistema n.plo, per trasformazione di RIBAUCOUR, se ne deducono ancora ∞^{2n-1}.

Negli ultimi lavori del volume, per le trasformazioni di RIBAUCOUR è stabilito il teorema generale di permutabilità per i sistemi n.pli ortogonali e quello speciale per alcune classi di essi, sviluppandone le applicazioni (170) (177) (182).

La trasformazione di RIBAUCOUR di un sistema n.plo ortogonale Σ dell'ordinario spazio S_n in un altro Σ' (contiguo) è individuata da un sistema di $n+1$ funzioni trasformatrici $(\gamma_1', \gamma_2', ..., \gamma_n', \varphi')$, diciamo (γ_i', φ'), che verificano un certo sistema di equazioni a derivate parziali lineari omogenee. Questa circostanza implica che, se Σ', Σ'' sono i sistemi contigui a Σ, corrispondenti ai sistemi (γ_i', φ'), (γ_i'', φ'') di funzioni trasformatrici, esiste un sistema contiguo a Σ in corrispondenza alle funzioni trasformatrici $(c_1\gamma_i' + c_2\gamma_i'', c_1\varphi' + c_2\varphi'')$ con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Al variare del rapporto di queste costanti si ottiene una famiglia ∞^1 di sistemi tutti contigui a Σ; la quale è detta un fascio di sistemi. Il teorema generale di permutabilità assicura che ogni fascio ne individua un secondo, detto il suo *coniugato,* determinabile con una quadratura, cui appartiene il sistema Σ di partenza e tale che risultino contigui per trasformazione di RIBAUCOUR un sistema n.plo qualunque del primo fascio e un sistema n.plo qualunque del secondo.

Il luogo dei punti corrispondenti nei due fasci a un medesimo punto qualunque appartenente a uno dei sistemi, è un circolo cui appartiene il punto medesimo.

Questa è la forma più ampia del teorema di permutabilità per le trasformazioni di RIBAUCOUR dei sistemi n.pli ortogonali ed essa è del tutto analoga a quella del teorema di permutabilità relativo alle trasformazioni asintotiche delle superficie ed al quale è ispirata. La specializzazione del teorema enunciato consiste in questo.

Per certe classi speciali di sistemi n.pli la trasformazione di RIBAUCOUR, opportunamente applicata, porta da un sistema n.plo della classe ad un altro della classe medesima. Allora, se dal sistema sono dedotti per trasformazione di RIBAUCOUR i sistemi Σ', Σ'' (sempre della medesima classe di Σ), nel fascio coniugato al sistema $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ esiste, oltre Σ, uno e un solo sistema della medesima classe e questo può ottenersi in termini finiti. Inoltre, la successiva applicazione del metodo di trasformazione accennato non richiede alcun calcolo di integrazione.

I sistemi n.pli di superficie che ammettono per le trasformazioni di RIRAUCOUR un teorema speciale di permutabilità e che sono considerati nelle ultime memorie del volume (177) (182) sono:

1) i sistemi E, detti simmetrici, per i quali si ha $\beta_{ik} = \beta_{ik}$ ed è data per questi una trasformazione, indicata con T_m, per la quale vale appunto il teorema speciale;

2) i sistemi Q, cioè quelli che ammettono trasformazioni di RIBAUCOUR tali che i quadrati γ_i^2, φ^2 delle funzioni trasformatrici sono legati da una identità

lineare omogenea (fra questi, per $n = 3$, figurano i sistemi tripli ortogonali di WEINGARTEN).

3) i sistemi H di DARBOUX-GUICHARD per cui i coefficienti H_i ($ds^2 = \Sigma H_i^2 du_i^2$) sono legati dalla relazione $\Sigma H_i^2 =$ cost. e particolarmente, fra questi sistemi, quelli, detti di traslazione, che sono ad un tempo sistemi H e sistemi E.

La determinazione di ciascuno di questi sistemi dipende dalla integrazione di un corrispondente sistema di equazioni a derivate parziali del quale è certa l'esistenza delle soluzioni ma che non si conoscono nella loro generalità. Il teorema speciale di permutabilità, come accade per estese classi di superficie, costituisce un metodo di integrazione parziale che da una soluzione particolare dell'accennato sistema ne fa derivare quante altre se ne vogliono.

Nell'ultima memoria (182), a proposito delle trasformazioni dei sistemi H è introdotta la nozione di coppie di sistemi n.pli ortogonali (Σ, $\bar{\Sigma}$) con rotazioni β_{ik}, $\overline{\beta_{ik}}$ associate (cioè tali che si abbia $\overline{\beta_{ik}} = \beta_{ki}$) ed è stabilita una trasformazione T_m generalizzata che da una coppia di sistemi associati ne fa derivare infinite altre (trasformazione che si riduce alla trasformazione T_m dei sistemi E nel caso $\beta_{ik} = \beta_{ki}$). Per queste trasformazioni T_m generalizzate sussiste un teorema speciale di permutabilità e le proprietà inerenti a questi sistemi valgono non solo nell'ordinario spazio euclideo S_n, ma anche negli spazi euclidei con un ds^2 indefinito.

Infine, i risultati conseguiti nello spazio euclideo per i sistemi n.pli ortogonali, vengono estesi ai sistemi n.pli E ed H negli spazi di curvatura costante.

PIETRO TORTORICI

Cinquant' anni di relatività Ed. Universitaria, Firenze, 1955, pagg. 634.

Poiché, nell'arduo cammino della ricerca scientifica, da modelli atti ad interpretare un certo patrimonio di fenomeni verso modelli più ampi o, comunque, dotati delle capacità di inquadrare fenomeni prima ignoti o di dare più coerente spiegazione a quelli conosciuti, appaiono, talvolta, luci di ingegni sovrani, a determinare svolte decisive o a gettare schemi basilari, era giusto che, nel cinquantenario della Teoria della relatività, uscisse un'opera completa a tale teoria dedicata e al suo grande Autore. Tale opera, intitolata « Cinquant'anni di relatività », è uscita, sotto gli auspici dell'Accademia dei Lincei, della Società italiana per il progresso delle scienze e del Consiglio nazionale delle ricerche, in morte, purtroppo, di Alberto Einstein, il quale aveva incoraggiato il lavoro, lumeggiando anche la importanza dell'alto contributo scientifico italiano per la sistemazione matematica della Teoria stessa, ed inviando al Direttore dell'opera un prezioso scritto, indice del Suo ultimo pensiero scientifico.

L'edizione, curata dalla Editrice universitaria di Firenze, è splendida, veramente degna delle glorie della editoria italiana.

All'ideatore, promotore e coordinatore dell'opera, prof. ing. Mario Pantaleo, Direttore generale dell'Istruzione tecnica presso il Ministero della Pubblica Istruzione, il quale, coadiuvato dal prof. Roberto Giannarelli. Capo dell'Ufficio studi dello stesso Ministero e fervido Segretario di redazione dell'opera stessa, ha concepito le linee architettoniche della medesima, va anche il merito di aver dato, in un articolo di introduzione generale, largamente documentato, ampia facilitazione alla lettura del volume per i meno iniziati; ciò in una presentazione ed illustrazione delle varie trattazioni contenute nell'opera, in cui affiora sempre il pensiero relativistico, come filo conduttore.

La prima parte del volume, cui collaborano Giovanni Polvani, Paolo Straneo e Bruno Finzi, è dedicata alla esposizione delle Teorie della relatività. Nel suo scritto, intitolato « Il moto della Terra, filo storico della Relatività », Giovanni Polvani si muove intorno al motivo conduttore rappresentato proprio da una sua frase, che compare quasi subito e che costituisce come il frontone della trattazione: « La Relatività di Einstein è lo sviluppo attuale, e forse non ultimo, di una antica questione: quella se la Terra si muova o stia ferma» . Prendendo le mosse dal XIII Capitolo del II Libro del « De Coelo » di Aristotele, l'Autore esamina il problema della immobilità della Terra nei filosofi greci e passa poi ai filosofi alessandrini, con particolare riguardo, naturalmente, a Claudio Tolomeo. Ma la grande rivoluzione rinascimentale porta, dalle prime critiche portate al sistema tolemaico da Nicola Cusano, attraverso la monumentale opera di Copernico, al pensiero di Galileo e di Newton. Col « Dialogo dei massimi sistemi », pubblicato nel 1632, nasce la Relatività galileiana, alla quale si collegherà poi, non solo idealmente ma concretamente, l'enunciazione dei nuovi Principi relativistici einsteiniani. E, poichè sostegno alla fondamentale crisi che condizionò e determinò il sorgere della Teoria della relatività ristretta fu il problema della propagazione della luce, Polvani compie un esame di tale situazione pre-relativistica, dalla Teoria di Maxwell alle esperienze che culminarono in quella di Michelson e ne trae quelle conseguenze che condussero alla critica dei concetti di spazio e di tempo della Fisica classica.

La trattazione di Paolo Straneo reca il titolo: « Genesi ed evoluzione della concezione relativistica di Albert Einstein », ed è suddivisa in tre capitoli Nel primo di essi, dedicato all'ascesa, crisi e decadenza del meccanismo, viene esaminato lo sviluppo delle dottrine fisiche, dalla decadenza delle concezioni antiche al pensiero di Galileo (con speciale riguardo al Principio galileiano di relatività), alla grande sistemazione operata da Isacco Newton; vengono poi considerate con viva attenzione le dottrine fisiche sviluppatesi nel diciannovesimo secolo, con particolare riguardo all'Ottica. Dall'Ottica ondulatoria di Fresnel (e dall'emergere, a seguito di quella, di un primo riconoscimento di relatività ottica) all'avvento della Teoria elettromagnetica di Maxwell, lo sviluppo è seguito con occhio vigile anche allo studio generale dei fenomeni elettrodinamici ed elettromagnetici ed alla sistemazione della Termodinamica. Ma, già in tale primo capitolo, quella situazione critica della Fisica, che, dalla Teoria di Maxwell, attraverso l'opera di Lorentz, doveva portare alla Teoria della relatività, e dagli studi sulla struttura e sui fenomeni di emissione e di assorbimento dell'energia raggiante, doveva condurre alla Teoria di « quanta », è messa a fuoco. Nel secondo Capitolo, si considerano gli sviluppi del sessennio 1900-1905, caratterizzato dal sorgere della Teoria quantistica di Max Planck e dalla formulazione einsteiniana della Relatività ristretta (1905). Nel terzo Capitolo, è svolta la Teoria della relatività ristretta, dalla critica del concetto di contemporaneità alle trasformazioni delle coordinate e dei tempi, alle conseguenze cinematiche, elettromagnetiche, dinamiche, alle vedute di Minkowski sulla geometria dello spazio-tempo. Non manca un ampio accenno alle divergenze di opinioni sul Principio di costanza della velocità della luce, (questione da tenere ben presente per la lettura dello scritto di Francesco Severi, con cui si inizia la seconda parte del volume in parola). Attraverso un esame dei pregi e dei difetti della Teoria della relatività ristretta, si passa a mettere in luce il problema fondamentale della Teoria della relatività generale, di cui si delineano le basi istituzionali, non senza avvertire del fatto che il problema del campo gravitazionale si amplierà ulteriormente in quella necessità di sintesi dei campi da cui nasceranno le Teorie unitarie.

Si è così allo scritto di Bruno Finzi, che offre una visione completa della Teoria della relatività generale e delle Teorie relativistiche unitarie. All'inizio della trattazione, è messa fortemente in rilievo quella ricerca di un alto grado di obbiettività e generalità, cioè quell'aspirazione all'invarianza di fronte al passaggio da un riferimento ad un altro e all'invarianza di fronte al mutare di circostanze di varia natura, che costituisce ansia continua dalla Scienza. Di ciò si ha tipico manifestarsi nella ascesa dal pensiero della Fisica classica a quello della Relatività ristretta, indi della Relatività generale, infine delle Teorie unitarie. Il pensiero einsteiniano mira, appunto, « all'assoluto, all'universale, all'unitario ». Dopo un esame della concezione dello spazio e del tempo assoluti nella Fisica newtoniana, l'autore passa a gettare i fondamenti del Calcolo tensoriale nello spazio geometrico tridimensionale e ad operare poi un ampio richiamo di Teoria della relatività ristretta, in cui non vengono soltanto messi in evidenza i capisaldi della Cinematica e della Dinamica (con particolare riguardo alla equivalenza massa-energia) ma si dedica viva attenzione alle leggi elettromagnetiche, cospicuo esempio di leggi fisiche tensoriali nello spazio-tempo. Il Finzi passa poi ad esaminare la necessità di prescindere da quei riferimenti inerziali, cui è ancorata — per così dire — la Teoria della relatività ristretta, ed introduce, così, il lettore allo studio di quella Teoria della relatività generale einsteiniana, che assicura alle leggi fisiche carattere invariantivo di fronte ad un generico cambiamento del riferimento spazio temporale. Prendendo le mosse dal Principio di relatività generale, l'autore mette a fuoco l'equivalenza fra inerzia e gravitazione e passa poi ad esporre i principi della Fisica einsteiniana in un generico spazio-tempo e ad istituire il corrispondente Calcolo tensoriale. Espone, quindi, la teoria dei moti per inerzia e dei moti in campi gravitazionali. Alle equazioni gravitazionali, al Principio della minima azione gravitazionale e alle equazioni della Statica einsteiniana l'autore rivolge uno sguardo estremamente attento e discute le soluzioni statiche di prima approssimazione delle equazioni gravitazionali, dando ragione dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali emesse da una sorgente luminosa situata dove il campo gravitazionale sia molto intenso rispetto al campo gravitazionale terrestre, in confronto delle corrispondenti righe spettrali emesse da una sorgente luminosa situata sulla Terra; dando ragione, inoltre, della deflessione dei raggi luminosi nei campi gravitazionali. Studia il moto di un pianeta intorno al Sole, movimento dato da una geodetica dello spazio-tempo incurvato dal Sole, e che, solo in prima approssimazione, risulta kepleriano, mentre, spingendosi oltre la prima approssimazione, ci si rende ragione del fatto che il moto è « a rosetta », con spostamento del perielio. Un capitolo dello scritto di Finzi è dedicato alla Dinamica einsteiniana; vi si fa vedere come le azioni gravitazionali non siano istantanee, ma si propaghino con la velocità della luce. Un altro capitolo è dedicato alla visione dell'inquadrarsi del campo elettromagnetico nello spazio-tempo riemanniano, inquadrarsi che sussiste nel senso della sintesi tensoriale degli enti del campo ma che impone che non si pretenda che lo spazio-tempo riemanniano abbia un numero sufficiente di parametri per interpretare geometricamente i vari enti del campo elettromagnetico stesso. Anche il problema cosmologico è discusso nell'articolo, sia con riguardo alle soluzioni statiche di Einstein e di De Sitter, sia con riguardo alla soluzione dinamica dell'Universo in espansione. Il Finzi passa poi alle Teorie unitarie, nascenti dalla penuria di parametri dello spazio-tempo riemanniano per rappresentare anche il campo elettromagnetico. Il lettore viene condotto sia alla conoscenza della teoria unitaria a « continuo » pentadimensionale riemanniano di Kaluza, sia alla conoscenza delle Teorie unitarie a « continuo » tetradimensionale non-riemanniano, a connessione affine simmetrica (Weyl) e a connessione affine asimmetrica (Einstein). Si discute, infine, il signifiicato dei modelli relativistici di fronte al problema della Scienza.

La seconda parte del volume « Cinquant'anni di relatività » è dedicata alle « interpretazioni, verifiche ed applicazioni » della relatività stessa.

Tale parte si inizia con lo scritto di Francesco Severi. Nella sua meditazione sullo spazio-tempo, il Severi considera la separazione dello spazio dal tempo nell'indagine su un « evento » come una possibile, anzi inderogabile, necessità di ordine pratico, la quale impedisce, però, di attingere, fino in fondo, tutta la verità. Osserva come, dopo la introduzione dello spazio tempo. fosse meno ardito e forse anche meno difficile, immaginare spazi geometrici di struttura a mano a mano più complessa nelle cui « maglie » potessero successivamente inserirsi gravitazione, elettromagnetismo, e, magari, rapporti interatomici, così da considerare una scienza sola, come prevedevano Rieman e Clifford, Fisica e Geometria, e addivenire alla formulazione di leggi invarianti o covarianti rispetto ai riferimenti. Così il problema fondamentale diventava di tecnica matematica; ed Einstein trovò ausilio potente, anche per indicazione di Pick e Grossmann, nel Calcolo differenziale assoluto di Ricci e di Levi-Civita e nella nozione di trasporto per parallelismo di una direzione su una superficie o in una varietà qualunque introdotta dal Levi-Civita stesso. Poichè « deformazioni fantasiose a scopo romantico » hanno rotto i ponti fra la Teoria della relatività ed il senso comune, l'analisi del Severi, che assume come idee primitive, secondo il linguaggio logico di Peano, le intuizioni di sensazioni simultanee o successive e di ritmo delle sensazioni (nascente dalla periodicità di talune funzioni fisiologiche, come la circolazione del sangue) mette in evidenza *sette postulati* di senso comune, dai quali è possibile partire per costruire la Relatività ristretta e giungere alle trasformazioni di Lorentz. Ciò significa anche giungere alla seconda proposizione del Principio della relatività ristretta, quel « Principio della costanza della velocità della luce », che ha dato luogo a critiche da parte di fisici e di filosofi, ocme già fatto notare anche da Straneo e come Severi ribadisce, citando, per esempio, la posizione di incompatibilità logica delle due proposizioni raggiunte da La Rosa (posizione critica che si accosta a quella di Bergon). La compatibilità delle proposizioni costituenti il principio di relatività ristretta einsteiniana viene così messa in netta evidenza.

Segue lo scritto di Giuseppe Armellini, dedicato alla « Teoria della relatività nella Astronomia moderna ». L'autore parte da un richiamo del modello newtoniano dell'Universo per accostarvi il nuovo modello einsteiniano e si pone la domanda quale dei due modelli, il classico oppure il relativistico, soddisfi meglio ai risultati delle osservazioni astronomiche. L'Autore esaminerà dettagliatamente ed obbiettivamente la questione nel corso del suo scritto, in cui, seguendo l'ordine storico, comincierà con la Relatività ristretta, per passare, poi, alla Relatività generale, entrambe già dotate di applicazioni nel campo della Fisica celeste. Armellini fa subito notare come Einstein, già con la Teoria della relatività ristretta, abbia «fornito agli astronomi la chiave per spiegare uno dei più importanti problemi della scienza degli astri: il problema dell'origine dell'energia irradiata dalle stelle e dell'evoluzione stellare». La chiave è rappresentata dalla relazione di equivalenza tra massa ed energia, che, per esempio, nella trasformazione dell'idrogeno in elio verificantesi nel Sole, dà ragione dell'enorme sviluppo di energia termica connesso con una certa perdita di massa.

L'Autore passa poi ad occuparsi del moto dei pianeti nel modello relativistico e fa vedere come, fra tutte le spiegazioni date dello spostamento del perielio dei pianeti prossimi al Sole (principalmente di Mercurio), la migliore sia quella data dalla Teoria della relatività generale. Come si occupa della deflessione della luce nel campo gravitazionale, uno dei più importanti risultati previsti, in Astrofisica, dalla Teoria della relatività generale, e di quell'effetto Einstein, di spostamento delle righe spettrali verso il rosso, pure spiegato dalla teoria in questione, che è di così difficile osservazione perchè sovrapposto all'effetto Döppler, ma che si osserva nettamente per le righe spettrali dovute ai raggi luminosi provenienti dal compagno di Sirio, stella nana bianca sulla quale il campo gravitazionale è enorme (70.000 volte rispetto al campo gravitazionale sulla superficie terrestre).

L'articolo si conclude con una discussione della teoria dell'Universo in espansione secondo il modello relativistico, discussione nella quale l'Autore fa anche vedere come si abbia ragione di ritenere che l'Universo sidereo « non rinasca dalle proprie ceneri » determinando una nuova « Urstern ». L'Universo sidereo « avrà una fine come ha avuto un principio ».

Piero Caldirola, nel suo scritto « Applicazioni e verifiche sperimentali della relatività ristretta », si occupa delle questioni relativistiche che direttamente interessano la Fisica delle particelle. Già nel primo capitolo dello scritto in parola, in cui si tratta della Cinematica relativistica, appaiono due verifiche sperimentali delle conseguenze delle trasformazioni di Lorentz: la dipendenza dalla velocità della vita media di un mesone μ in movimento e l'effetto Döppler trasversale.

Così, per quanto riguarda il teorema della composizione relativistica delle velocità, alla esposizione delle formule teoriche, l'autore fa seguire, come verifica, il corretto calcolo relativistico della aberrazione annua delle stelle. Il secondo capitolo dell'articolo di Caldirola è dedicato alla Dinamica relativistica. L'autore si occupa subito delle esperienze dirette sulla dipendenza della massa dalla velocità e riporta i risultati di quelle coi raggi β del $Ra(B+C)$ compiute da Rogers e collaboratori.

In merito alla equivalenza tra massa ed energia, esposto il Principio generalizzato di conservazione dell'energia, l'autore passa alle applicazioni della fondamentale proposizione nuova, nella Fisica nucleare. Tratta, così, dell'energia di legame e del difetto di massa nei nuclei atomici, del bilancio massa-energia nelle reazioni nucleari, della produzione di una coppia di elettroni (uno positivo e l'altro negativo) da parte di un fotone e del fenomeno inverso, nonchè di un'altra prova della possibilità di trasformazione di energia in massa, la produzione di mesoni π nell'urto fra nucleoni o per urto di un γ con un nucleone, fenomeni che avvengono in natura per opera della radiazione cosmica, in laboratorio per azione delle macchine acceleratrici. Vengono date le formule teoriche relative all'urto fra particelle, con verifiche sperimentali; vengono pure date le relazioni analitiche relative alla disintegrazione spontanea di una particella in due, e, come verifiche, vengono trattate: la disintegrazione di un mesone $\pi^{\pm}$ in $\mu^{\pm}$; la disintegrazione del mesone $\mu^{\pm}$ in $e^{\pm}$; la disintegrazione del neutretto in due fotoni; la disintegrazione del neutrone in un protone più un elettrone.

Il terzo capitolo è dedicato da Caldirola allo studio degli effetti quantum-relativistici, dalla struttura fina delle righe spettrali dell'idrogeno allo studio dell'effetto fotoelettrico dei raggi X e dei raggi γ, alla teoria dell'effetto Compton, allo studio della perdita di energia nel passaggio di ioni attraverso la materia. Si passa così alle applicazioni tecniche della Teoria della relatività. Si tratta prima degli effetti relativistici nei tubi elettronici, da quelli nei tubi a raggi catodici a quelli nei magnetron di grande potenza, per cui la correzione non può essere trascurata, a quelli nei klystron, che, se trascurabili nel tipo comune (klystron reflex), non lo sono affatto nel klystron di potenza. Si passa, quindi, ai moti di particelle nelle grandi macchine acceleratrici, dal betatrone al ciclotrone per ioni relativistici, al sincrotrone, al sincrociclotrone, al microtrone. Si fa espressamente notare, in generale, come le grandi macchine acceleratrici « funzionino soltanto se progettate secondo le leggi della Relatività », il che si ribadisce, per esempio, riferendosi al progetto del grande sincrotrone di Brookhaven.

Lo scritto di Antonio Aliotta è intitolato: « Valore filosofico della teoria di Einstein ». Prendendo inizialmente in considerazione la eliminazione critica del concetto di spazio vuoto, assoluto ed infinito, l'autore fa subito notare come lo spazio diventi, nel pensiero einsteiniano, non più una astrazione, ma « lo insieme di avvenimenti fisici concreti » e come la limitatezza dello spazio escluda che il pensiero « sia spinto al di là », come nell'ipotesi dello spazio vuoto. La teoria di Einstein ha il merito, dal punto di vista filosofico, « di accostarsi di più all'esperienza concreta, in quanto sostituisce allo spazio astratto il cronotopo, la sintesi inscindibile dello spazio e del tempo, nuovo teatro dei fenomeni. Cade il tempo assoluto; qui si inserisce un raffronto fra la posizione einsteiniana e il pensiero di Bergson, teso a rivendicare « l'intuizione della durata reale, immediatamente vissuta dal nostro spirito, nel suo continuo processo di cangiamento ». Discutendo la posizione di Bergson, l'Aliotta conclude che « Einstein è più del Bergson vicino alla concretezza dell'esperienza ». Dal punto di vista gnoseologico, la teoria einsteiniana esclude che lo spazio e il tempo siano concetti oppure intuizioni a priori. Dopo una critica sia di una interpretazione nettamente realistica dello spazio-tempo, che Aliotta definisce errato pensare come « qualcosa di reale fuori del pensiero che l'ha costruito » e dopo una critica di una interpretazione nettamente idealistica dello spazio-tempo stesso (interpretazione che urterebbe contro la « oggettività » scientifica della Teoria einseiniana), l'Aliotta conclude pensando alla Teoria della relatività come ad un modello altissimo, che rappresenta uno stadio di quei successivi sforzi di penetrazione in che si esprime la nostra ansiosa ricerca della verità.

Nella terza parte del volume, sono state riportate (tradotte da P. Straneo, A. Radicati di Bròzolo ed A. M. Pratelli) le fondamentali Memorie einsteiniane del 1905, del 1916 e 1917 e del 1953.

Così si conclude la bellissima opera, che è ben augurabile sia conosciuta e letta in ogni Istituto culturale, non solo per il suo grande valore, non solo perchè nasce dall'opera di autori illustri, ma perchè il rigore scientifico vi si sposa ad una notevolissima chiarezza di esposizione.

Alla fine della lettura, che dà un effettivo godimento, si è portati a meditare sull'enorme sviluppo scientifico e sul valore della ricerca.

Si rivendica istintivamente alla Scienza il diritto di rigettare ogni posizione negatrice dell'inarrestabile progresso umano, di fronte alla possibilità, legata al problema del male, di tragedie connesse con applicazioni tecniche distruttive. I popoli possono essere condotti verso tali tragedie solo da una carenza del senso morale, non dalle vittorie della Scienza sul mistero.

La Scienza è nata nel bene e per il bene. E' alta e pura ricerca della verità, ascesi ed eroismo, conquista e dovere.

ANTONIO PIGNEDOLI

M. S. BARTLETT, *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1955, p. IV-312, 35 s. net.

Questo volume di M. S. Bartlett, professore di statistica matematica alla Università di Manchester, è il primo di tre volumi dedicati ai « processi stocastici », nei quali, cioè, intervengono elementi mutevoli e aleatori; essi costituiscono, pertanto, la parte dinamica della Statistica e la loro teoria si ricollega strettamente al Calcolo delle probabilità. Fn dal 1946 Bartelett e J. E. Moyal avevano progettato di pubblicare in collaborazione un unico trattato, che desse una conoscenza generale della teoria e delle applicazioni, in argomento; senonchè, il continuo sviluppo della materia consigliò di suddividere l'opera in tre volumi: uno dedicato allo studio approfondito dei fondamenti logico-matematici della teoria; un altro rivolto prevalentemente alle applicazioni e inteso a dare ai matematici e agli statistici una sufficiente idea delle basi matematiche e delle « tecniche » statistiche impiegate nella trattazione di problemi particolari (di giuochi, di fisica, di biologia, di demografia, ecc.); un ultimo destinato unicamente allo studio di processi stocastici interessanti la fisica propriamente detta, in considerazione della loro particolare importanza. Il volume attuale è il secondo dei tre; al primo attende il Moyal da tempo e ne è prossima la pubblicazione; e probabilmente lo stesso Moyal (secondo un accenno del Bartlett) preparerà l'ultimo.

Nel presente volume, pertanto, non sono da ricercarsi discussioni e considerazioni critiche sul concetto di probabilità e sui principi della conseguente teoria: essi vengono semplicemente « summarized » (pag. 2-9). Così, è senz'altro posto il principio della probabilità totale anche per un'infinità numerabile di eventi incompatibili, rinviando il lettore « for a rigorous discussion » ai trattati di Kolmogorof e Cramèr, e a quello che sta per comparire di Moyal.

Per quanto, dunque, il lato critico sia lasciato in disparte, siano trattate le applicazioni e non manchino confronti tra risultati teorici e sperimentali, il carattere del libro è nettamente matematico. Il discorso matematico, poi, è molto sintetico, basato su conoscenze non elementari di Analisi e di Calcolo delle probabilità nell'indirizzo moderno, onde non appare di facile comprensione per uno statistico generico (quantunque, come s'è detto, il volume voglia servire anche agli statistici). D'altra parte ogni scienza, nel suo progredire, tende a configurarsi come sviluppo logico matematico di pochi punti fondamentali. A questo proposito, lo stesso Bartlett dichiara (prefazione, pag. XII) che, come statistico, trova talvolta « rather exasperating » questa tendenza all'astrazione matematica; ma ne riconosce l'importanza al fine di approfondire la descrizione teorica dei fenomeni.

Ricordato che il più semplice processo stocastico è la successione stocastica (o casuale) in caso d'indipendenza (la cosidetta « random walk », passeggiata a caso), l'A. ne stabilisce le equazioni fondamentali e le studia utilizzando specialmente i procedimenti di Waldt e di Feller. Abbandonata, poi, l'ipotesi d'indipendenza, passa alle « catene di Markof », limitandole al tipo « semplice » (in cui un risultato dipende solo dal precedente) e accennando ai principali casi particolari (ergodico, regolare, regolare-positivo secondo la nomenclatura del Fréchet).

Analizzando poi (cap. 3) le modificazioni da apportare quando gli eventi si considerino distribuiti con continuità nel tempo e giungendo, naturalmente, ad equazioni differenziali, l'A. si sofferma sul cosidetto « metodo di Montecarlo ». che consiste nell'ottenere soluzioni approssimate da diagrammi sperimentali, e lo applica ad un problema sui giochi già proposto da Huyghens, concludendo che l'accordo fra teoria ed esperienza é « surprisingly good » (pag. 48). Similmente, vengono studiate nel continuo le catene di Markof, mostrando (cap. 4) come numerose e importanti applicazioni in esse possano farsi rientrare: rischio nelle assicurazioni, come generalizzazione del problema della rovina di un giuocatore, ricondotto alla soluzione di un'equazione integrale del tipo di Volterra; analisi sequenziale, come problema di scelta fra cause possibili; rinnovamento di oggetti; tempo di attesa (queue problems), con interessanti applicazioni al traffico telefonico, la cui soluzione generale dipende, nei casi stazionari, da un'equazione integrale del tipo di Wiener-Hopf, studiata da Smith e da Kendall; accrescimento di una popolazione, senza e con immigrazione; sviluppo e mutazioni in una colonia di batterii, conducente a equazioni differenziali e integrali di tipo complicato e risolte solo in casi speciali; genetica, selezione, epidemie.

Segue un capitolo sulle operazioni-limite, che comincia con i vari tipi di convergenza stocastica (in probabilità, quasi-certa, in media quadratica) e prosegue estendendo nel continuo alle funzioni stocastiche i concetti fondamentali del Calcolo infinitesimale (derivate, integrali, misurabilità dal punto di vista stocastico, variabile complessa, funzioni stocastiche analitiche, sviluppi in serie, equazioni alle differenze e alle derivate). Questo capitolo è interessante sopratutto perchè dà i lineamenti di un organico « Calcolo stocastico », nel quale il valore della variabile dipendente non è assegnato, ma « cadrà » in una classe di valori aventi date probabilità di realizzarsi, e nel quale rientra in particolare il Calcolo ordinario, assumendo il carattere di « Calcolo certo ». A dir vero, il Calcolo stocastico potrebbe ricondursi, con visione strettamente analitica, a quello delle funzioni plurivalenti (insiemi variabili) e delle loro classi-limite; senonchè, l'aggiunta dell'elemento e del linguaggio stocastico lo rende più snello e suggestivo. Per questo, il capitolo attrae l'attenzione specialmente del matematico puro; il quale, anzi, gradirebbe di vederlo meno sintetico. L'A., invece — forse per non invadere troppo il campo teorico, riservato, come s'è detto, al volume del Moyal — si limita alle idee fondamentali, con esposizioni rapide, accennando o ammettendo risultati preliminari che solo un lettore già specializzato in materia può conoscere.

I procedimenti esposti in questo capitolo vengono applicati — introducendo qualche ipotesi che riduca le notevoli difficoltà — nel successivo capitolo 6° ai processi « stazionari » (invarianti per traslazione nel tempo) e specialmente all'analisi armonica (ordinaria e generalizzata); e, nel capitolo 7°, alla teoria della previsione (nei processi stocastici) in base agli stati precedenti (Wiener, 1949) e delle comunicazioni telegrafiche (Shannon, 1948).

Da ultimo, l'A. entra nel campo della Statistica propriamente detta, distinguendo due grandi tipi di problemi: « of specification » e « of inference », e avvertendo, giustamente, che anche i primi devono esser risolti in vista dei secondi. Di questi, quindi, s'occupa, trattando della stima statistica; degli indici di controllo (tests); della verifica sperimentale di catene di probabilità; della valutazione, su campioni, di parametri; dell'indice χ; della correlazione e della regressione; con varie illustrazioni numeriche e grafiche e con riferimento a recentissimi contributi, molti dei quali dello stesso A.

Chiudendo il libro, resta negli occhi la visione del vasto panorama che l'A. ha saputo offrire, con zone in piena luce ed altre ancora in ombra ed in attesa del raggio che le illumini. E aggiungo subito che, per godere il panorama, è necessario un buon cannocchiale, sotto forma di una buona preparazione specifica. Per quanto il libro porti il titolo « An introduction », non mi sento di consigliarlo a chi voglia introdursi nell'argomento: la trattazione sempre concisa, il procedere spesso per categoriche affermazioni basate su risultati solo citati o presupposti, l'uso di metodi molto generali ed elevati (che confermano la perizia dell'A.), lo rendono interessante ed utile a chi sia già « introdotto » — e non superficialmente — in questo ordine di studi. La vera « introduction » è, forse, affidata al prossimo volume di Moyal, di cui ho già fatto cenno, e che perciò saremo lieti di leggere presto.

Una menzione meritano, infine, le indicazioni bibliografiche, accurate e numerose, che offrono un bel quadro della recente produzione in materia e dimostrano l'interesse suscitato da questi problemi stocastici, che le attuali concezioni scientifiche ed il meraviglioso progredire della tecnica continuamente propongono.

CARLO BONFERRONI

P. S. ALEXANDROFF, *Einführung in die Gruppentheorie*, Kleine Erganzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik, II Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954, pp. 120 VII (traduzione dalla seconda edizione russa).

Questo volumetto apparve la prima volta in lingua russa nel 1938; qui abbiamo la traduzione tedesca della seconda edizione russa, sostanzialmente eguale alla prima. Esso è dedicato specialmente agli studenti, e presenta in forma molto piana i primi concetti della Teoria dei Gruppi. L'autore (notissimo per i suoi fondamentali apporti alla Topologia) ha inteso, come afferma esplicitamente nella prefazione, dato il carattere elementare del trattato, non introdurre alcun concetto senza illustrarlo mediante un semplice esempio, per lo più geometrico. Ciò rende la lettura particolarmente agevole, e quindi raccomandabile a tutti coloro che intendono formarsi una prima idea dei fondamenti di questa teoria, la quale oggi ha, come è noto, acquistato notevole importanza, specie per le sue applicazioni alla Topologia e ad altri rami della matematica. In luogo della notazione moltiplicativa, nettamente prevalente nei vecchi trattati, vien usata, per designare l'operazione di composizione del gruppo, quasi esclusivamente la notazione additiva, che oggi va imponendosi per la sua maggiore aderenza alle applicazioni topologiche. L'opera consta di otto capitoli, dedicati rispettivamente al concetto di gruppo, ai gruppi di permutazioni, al concetto di isomorfismo e alla rappresentazione di un gruppo come gruppo di permutazioni, ai sottogruppi ciclici, ai gruppi di movimenti (con particolare riguardo ai gruppi dei poliedri regolari), al concetto di sottogruppo normale (o invariante), agli omomorfismi, e infine alla decomposizione di un gruppo in laterali e ai gruppi fattoriali. Un'appendice è dedicata ai concetti elementari della teoria degli insiemi.

GUIDO ZAPPA

THÉO KAHAN, *Physique des guides d'ondes électromagnétiques,* Mémorial des Sciences physiques, fasc. LII, Paris, Gauthier Villars, 1952, frs 1000.

L'A. espone i principali risultati teorici e tecnici concernenti la fisica delle guide d'onde elettromagnetiche.

Dopo le prime classiche ricerche di H. Hertz sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in mezzi dielettrici e lungo fili conduttori, il problema di approfondire tutti gli aspetti del fenomeno, sia dal punto di vista teorico che applicativo, ha incessantemente occupato i fisici. Importanti saggi di codesto genere di ricerche si ebbero con le ricerche di Lecher, di lord Rayleigh, ecc.

Ma solo nel 1909 fu posto da Hondros, della scuola di Sommerfeld in Monaco, il problema della ricerca sistematica di soluzioni delle equazioni del campo elettromagnetico rappresentative di onde lungo i fili. Le indagini di Hondros sembrarono di puro interesse teorico, ma ben presto è stato riconosciuto che esse presentano stretta analogia con la teoria dei tubi conduttori la quale è divenuta molto importante nella tecnica delle alte frequenze.

Pur notevole si è rivelato lo studio delle onde lungo fili dielettrici.

Sulla base di codeste ricerche si è formato un complesso di conoscenze noto col nome di spettroscopia microhertziana, per il fatto che le guide d'onde (come si chiamano i mezzi portatori delle onde elettromagnetiche) hanno interesse pratico solo nella gamma delle onde centimetriche e millimetriche. L'A. indica anzitutto le diverse classificazioni fin qui proposte delle onde in generale.

Una classificazione si fa da un punto di vista matematico. Si parla di onde piane, sferiche, cilindriche senza tener conto del mezzo portatore delle onde stesse. Essendo le onde superficie equifasi, i raggi vengono definiti come le linee ortogonali alle superficie equifasi.

Le onde diconsi trasversali quando la vibrazione delle grandezze di campo è normale alla direzione dei raggi, longitudinali se la vibrazione ha luogo nella direzione dei raggi. Spesso si legge nei trattati che le onde elettromagnetiche sono trasversali: quest'affermazione dev'essere ben precisata, perchè sia valida. In generale, le onde non sono nè longitudinali, nè rigorosamente trasversali. Più precisamente, bisogna dire che le intensità di campo $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{h}$ non sono nè longitudinali, nè trasversali. Esistono onde nelle quali solo $\mathfrak{E}$ è normale ai raggi (onde elettriche trasversali), onde nelle quali solo $\mathfrak{h}$ è normale ai raggi (onde magnetiche trasversali) e infine onde nelle quali $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{h}$ sono normali ai raggi (queste corrispondono alle onde che diconsi trasversali senza alcuna specificazione). Esistono anche onde nelle quali $\mathfrak{E}$ (od $\mathfrak{h}$) ha la direzione dei raggi.

Un'altra classificazione è fondata sulla natura del mezzo portatore, della struttura geometrica, della forma del contorno. Si parla così di onde libere (o spaziali) e di onde guidate in senso generale.

L'A. fa nel Cap. 2° uno studio dettagliato delle proprietà delle onde guidate con particolare riguardo alla direzione delle grandezze $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{h}$ in relazione alla direzione dei raggi.

Negli ultimi due capitoli 3° e 4° l'A. espone alcune delle più importanti applicazioni fin qui conosciute della tecnica delle guide. E' possibile esplorare la struttura degli atomi (effetto Lamb-Rutherford), delle molecole, determinare alcune proprietà dei nuclei atomici, ad es. lo spin. La stessa tecnica è alla base degli acceleratori lineari di particelle , ecc.

La chiara esposizione di queste interessanti ricerche non mancherà di attirare l'attenzione di coloro che mirano a cogliere gli aspetti fisici dei problemi che la fisica pone al matematico, senza cadere in ingombranti divagazioni matematiche. La monografia del Kahan costituisce un'ottima guida per il lettore che persegua quell'intento.

GIOVANNI LAMPARIELLO

LOUIS DE BROGLIE, *La Physique quantique restera-t-elle indéterministe? Les grands problèmes des Sciences*, Ouvrages réunis par Mme Destouches - Février, Paris, Gauthier Villars, 1953.

E' noto ai cultori di meccanica ondulatoria (quantistica) che, dopo alcuni infruttuosi tentativi, fatti all'epoca della nascita della dottrina, di interpretare i fenomeni del microcosmo sulla base di concetti causali deterministici, fu prospettata da Max Born nel 1926 l'idea di una descrizione probabilistica, idea che poco dopo (1927-28) trovò un formidabile appoggio in considerazioni di Heisenberg e Bohr, subito riconosciute di importanza fondamentale. L'indirizzo di pensiero fisico così felicemente inaugurato si rivelò un metodo potente di indagine al punto di costituire la base di tutta una nuova concezione fisico-filosofica dell'Universo, per mezzo della quale la maggior parte dei fisici e dei filosofi della fisica ritengono di aver superato definitivamente i modelli classici adatti per l'interpretazione dei fenomeni macroscopici (o alla scala umana).

Tuttavia il fatto che codesta interpretazione probabilistica, pur essendo impeccabile dal punto di vista matematico, non fosse completamente soddisfacente dal punto di vista fisico è spesso affiorata negli scritti di alcuni fra i maggiori fisici. Einstein fu convinto della incompletezza del modello e L. de Broglie ed E. Schrödinger hanno molto insistito nella ricerca di una base deterministica o qualcosa che renda più saldi i fondamenti della dottrina.

Un recente lavoro di David Bohm (The Physical Review, 1952) ha provocato il ritorno alle vecchie discussioni sull'interpretazione fisica dei fondamenti della meccanica quantistica.

Questa Monografia di L. de Broglie fa conoscere il punto di vista dell'A. e dei suoi collaboratori intorno alla questione.

In una Conferenza tenuta a Parigi nel 1952, il cui testo costituisce l'« Exposé général » che trovasi all'inizio della Monografia, L. de Broglie espone i concetti principali delle sue teorie, concepite poco dopo la memorabile idea delle onde di materia, che egli chiama teoria della doppia soluzione e teoria dell'onda-pilota. L. de Broglie accenna alle difficoltà che consigliarono di abbandonare codeste teorie.

Il lavoro di Bohm muove però da idee analoghe a quelle di L. de Broglie concernenti la teoria dell'onda-pilota ed è questa la ragione per cui sembra essersi ravvivata la speranza nella mente di L. de Broglie di fondare una teoria dei microfenomeni su basi deterministiche.

« All'Exposé général » L. de Broglie fa seguire la riproduzione di alcune Note che egli chiama « Documents anciens » (1926-27) e « Documents récents » (1951-52). In esse si trova l'essenziale dei tentativi fatti da lui stesso e dal suo collaboratore J. P. Vigier.

Anche se alcuni grandi fisici respingono decisamente codesti tentativi, il recensore pensa che sia prudente attendere: è infatti necessario che si rendano più chiari gli eventuali legami fra la dottrina quantistica e la dottrina della relatività. La decisa convinzione di Einstein e dei suoi collaboratori che l'attuale meccanica quantistica sia un modello incompleto per l'interpretazione fisica dei microfenomeni, le numerose allusioni di Einstein alla possibilità di trovare nei grandi principi della Relatività generale la via sicura per la corretta interpretazione, l'accoglienza che nuovi tentativi per comprendere su nuove basi i fenomeni hanno trovato in recentissimi scritti di E. Schrödinger (cfr. ad. es. The general Theory of Relativity and Wave mechanics in Scientific Papers presented to Max Born, dove a pag. 69 si legge « I wish to emphasize, that there is room and even need for supplementing the general theory of relativity by wave mechanics »), la critica della interpretazione oggi generalmente adottata da parte di eminenti fisici sovietici quali Fock, Frenkel, Blockhinzev, fanno credere alla opportunità di riesaminare le basi di partenza.

Ed allora sembra doveroso volgere lo sguardo con simpatia, piuttosto che con scetticismo, alle pagine di L. de Broglie anche tenendo presenti le parole che egli scrive alla fine dell'« Introduction »: « Dans la Science comme dans la vie quotidienne, la fortune sourit souvent aux audacieux ».

La Monografia si chiude con uno scritto di J. P. Vigier dal titolo « Physique relativiste et Physique quantique ». In esso l'A. indica la possibilità di sviluppo delle idee di L. de Broglie, seguendo i principi della Relatività e assimilando le particelle non a punti ma a regioni singolari, sia pur molto piccole, di un campo nel senso generale einsteiniano. Allo scopo di orientare il lettore che sia desideroso seguire lo sviluppo dei differenti punti di vista, il recensore consiglia oltre la Monografia la lettura del libro « L. de Broglie, Physicien et Penseur, Paris, A. Michel, 1953 ».

GIOVANNI LAMPARIELLO

M. ZAMANSKY, *La sommation des séries divergentes,* Mémor. Sci. Math., fasc. 128. Gauthier-Villars, Paris, 1954. 46 pp.; 700 francs.

Con questo fascicolo l'A. si è prefisso di fornire un filo conduttore che possa servire di guida a chi si accinge per la prima volta allo studio delle serie divergenti. E' innegabile infatti che un certo senso di disagio può essere provato da chi si avventura nella selva dei procedimenti di sommazione, anche a causa della molteplicità dei risultati ottenuti con grande varietà di metodi di dimostrazione.

Ciò giustifica l'opera dell'A. che ha cercato, sia pure limitandosi ai così detti procedimenti lineari, di dare un unico metodo col quale ritrovare la maggior parte dei risultati concernenti tali procedimenti.

Strumento principale di tale metodo è il teorema di TOEPLITZ che fornisce la condizione necessaria e sufficiente perchè un procedimento lineare sia regolare, tale cioè da attribuire ad una qualunque serie convergente nel senso elementare con somma finita S, la stessa somma S.

Il problema fondamentale al quale si è dedicato l'A. è il seguente: dati due procedimenti di sommazione regolari, dei quali l'uno attribuisce una somma ad una serie, che si può dire dell'altro? Risposte assai soddisfacenti vengono date a questa domanda in moltissimi casi, dei quali ricorderemo alcuni dei principali considerati dall'A. relativi alle medie di NÖRLUND, di CESARO, di RIESZ, di HAUSDORFF, etc. e ai procedimenti di ABEL, di RIEMANN, di LAMBERT, di BOREL, etc..

Il fascicolo termina con l'applicazione del metodo dell'A. ai teoremi tauberiani di WIENER, i quali suggeriscono nuovi campi di applicazione che permettono di raggiungere risultati nuovi ed interessanti.

LUIGI MERLI

ANDRÉ DELACHET, *La resistence des matériaux*, (Collezione: Que sais-je?) Presses Universitaires de France, 1953.

In questo volumetto vengono trattati, in modo molto elementare conforme l'indole della collezione, alcune questioni che rientrano nei nostri ordinari corsi di Scienza delle costruzioni. L'esposizione è però molto chiara; inoltre il libro appare aggiornato specie a proposito delle proprietà dei materiali di maggior uso.

Ecco l'indice dei capitoli. Statica grafica. Sistemi isostatici e iperstatici, Equilibrio delle murature. Calcolo delle travi. Stato attuale delle nozioni di elasticità e plasticità. L'Analisi matematica degli sforzi interni. L'Analisi sperimentale degli sforzi interni.

DARIO GRAFFI