Antonio Pignedoli

Sulla dinamica delle particelle di energia relativistica: moto relativo di due elettroni veloci, i quali si attraggano mutuamente secondo la legge elettrodinamica di Weber.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 10–15.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_10_0>

Sulla Dinamica delle particelle di energia relativistica: moto relativo di due elettroni veloci, i quali si attraggano mutuamente secondo la legge elettrodinamica di Weber.

Nota di ANTONIO PIGNEDOLI (a Bologna)

Sunto. - *(Vedi § 1).*

§ **1.** Le grandi difficoltà connesse con l'integrazione delle equazioni del moto della Meccanica relativistica fanno sì che per ben pochi problemi particolari i risultati finora ottenuti siano soddisfacenti.

Ma ciò fa delinearsi ampî campi aperti alla ricerca e convince ad insistere, piuttosto che ad abbandonare l'argomento o a considerarlo come oggetto di ricerche analitiche pure, non dotate di corrispondente interesse fisico.

Tale punto di vista appare tanto più vero quando si pensi che oggi occorre spesso, nella Fisica nucleare, studiare i moti di particelle dotate di energie di ordine relativistico.

Ritengo, quindi, non privo di interesse, di fronte alle moderne questioni della Fisica, continuare sulla via intrapresa da quando ho cominciato ad occuparmi di problemi di Dinamica delle particelle veloci [1]. Nella presente Nota, segnalo un nuovo caso di riducibilità a quadrature: quello concernente il moto relativo di due elettroni veloci, i quali si attraggano mutuamente secondo la legge elettrodinamica di WEBER.

§ **2.** Siano dati due elettroni P_1 e P_2 di cariche uguali e (come si sa, invarianti) e di massa « a riposo » m_0 ($= 9{,}10^{-28}$ gr), in moto relativo, e sia r la loro distanza all'istante t nel sistema di riferimento dell'osservatore. Fra tali due cariche si eserciti una forza attrattiva, che supporremo data dalla legge elettrodinamica

[1] A. PIGNEDOLI, *Sul moto di un elettrone veloce in un campo elettrico e in un campo magnetico sovrapposti*, « Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Classe di scienze mat. e nat. », t. CIX, 1950-51.

— — *Sulla Dinamica relativistica del punto materiale*, « Atti e Memorie della Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena », serie V, vol. IX, 1950-51.

— — *Sui moti tautocroni del punto materiale veloce*, « Atti del Seminario matem. e fisico della Università di Modena », vol. V, 1950-51.

di WEBER [2] cioè, in valore assoluto:

$$F(r) = \frac{e^2}{r^2}\left[1 - \frac{\dot r^2 - 2r\ddot r}{c^2}\right], \quad (c = 3.10^{10}\ \mathrm{cm/sec}).$$

Le equazioni relativistiche del moto « assoluto » (rispetto al predetto sistema di riferimento solidale con l'osservatore) delle due particelle considerate sono:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(m_1 \dfrac{dP_1}{dt}\right) = -\dfrac{e^2}{r^3}\left[1 - \dfrac{\dot r^2 - 2r\ddot r}{c^2}\right](P_1 - P_2), \\ \dfrac{d}{dt}\left(m_2 \dfrac{dP_2}{dt}\right) = \dfrac{e^2}{r^3}\left[1 - \dfrac{\dot r^2 - 2r\ddot r}{c^2}\right](P_1 - P_2), \\ m_1 = m_0(1 - v_1^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad m_2 = m_0(1 - v_2^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad v_1 = \dfrac{dP_1}{dt}, \\ v_2 = \dfrac{dP_2}{dt}, \quad r = \mathrm{mod}\,(P_1 - P_2), \quad \dot r = \dfrac{dr}{dt}, \quad \ddot r = \dfrac{d^2 r}{dt^2}; \end{cases}$$

mentre l'equazione differenziale vettoriale indefinita, *relativistica*, del moto *relativo* dei due elettroni è:

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left[m \frac{d(P_1 - P_2)}{dt}\right] = -\frac{2e^2}{r^3}\left[1 - \frac{\dot r^2 - 2r\ddot r}{c^2}\right](P_1 - P_2),$$

dove $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ è la massa assunta, alla velocità $v = \dfrac{d(P_1 - P_2)}{dt}$, dall'elettrone P_1 pensato nel suo moto relativo all'elettrone P_2 considerato come fermo.

Moltiplicando scalarmente ambo i membri della (2) per $v = \dfrac{d(P_1 - P_2)}{dt}$, si ricava:

$$\frac{dm}{dt} v^2 + \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = -\frac{2e^2}{r^2}\left[1 - \frac{\dot r^2 - 2r\ddot r}{c^2}\right]\frac{dr}{dt},$$

cioè

$$(3)\qquad \frac{d(mc^2)}{dt} = -\frac{2e^2}{r^2}\left[1 - \frac{\dot r^2 - 2r\ddot r}{c^2}\right]\frac{dr}{dt},$$

la quale fornisce un notevole integrale primo (integrale relativistico dell'energia per un sistema lagrangiano con forze dipendenti dalle accelerazioni). La (3) si può scrivere, invero:

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2e^2}{r}\right) - \frac{2e^2}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot r^2}{r}\right),$$

[2] W. WEBER, « Annalen der Physik », LXXIII, 1848, pag. 193. Cfr. anche: E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, « Cambridge, University Press », 1927, pag. 44, n. 31.

e da questa si ottiene l'integrale primo:

$$(4) \qquad mc^2 = \frac{2e^2}{r} - \frac{2e^2}{c^2}\frac{\dot{r}^2}{r} + h, \qquad \left(m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

dove h è una costante che si potrà supporre nota, date le condizioni iniziali.

Poichè il moto è centrale, riferiamo P_1, nel piano del moto stesso, ad un sistema di coordinate polari r e θ con origine in P_2. Moltiplicando ambo i membri della equazione differenziale (2) vettorialmente a sinistra per $P_1 - P_2$, si ottiene:

$$(P_1 - P_2) \wedge \frac{d}{dt}\left[m\frac{d(P_1 - P_2)}{dt}\right] = 0,$$

da cui, in coordinate polari:

$$(5) \qquad mr^2\dot{\theta} = A, \qquad \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\right),$$

con A costante, che supporremo data, essendo assegnate le condizioni iniziali. L'integrale (5) è l'integrale relativistico « delle aree » (per così dire).

Dall'integrale soprascritto, si ricava:

$$\frac{m_0 r^2\dot{\theta}}{A} = \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

cioè:

$$(6) \qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = c^2 - \frac{m_0{}^2c^2}{A^4}r^4\dot{\theta}^2.$$

D'altra parte, l'integrale (4) fornisce:

$$\frac{m_0c^4r}{2e^2c^2 - 2e^2\dot{r}^2 + hc^2r} = \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

da cui:

$$v^2 = c^2 - \frac{m_0{}^2c^{10}r^2}{(2e^2c^2 - 2e^2\dot{r}^2 + hc^2r)^2},$$

cioè:

$$(7) \qquad r^2\dot{\theta}^2 = c^2 - \dot{r}^2 - \frac{m_0{}^2c^{10}r^2}{(2e^2c^2 - 2e^2\dot{r}^2 + hc^2r)^2}.$$

Sostituendo il valore di $r^2\dot{\theta}^2$ espresso dalla (7) nella (6), si ottiene:

$$(6') \qquad A^2c^8 + m_0{}^2c^{10}r^2 = (c^2 - \dot{r}^2)(2e^2c^2 - 2e^2\dot{r}^2 + rhc^2)^2,$$

che è una equazione di sesto grado nella velocità radiale $\dot{r}$. Dovrà risultare $\dot{r}^2 \geq 0$, in quanto, se fosse $\dot{r}^2 < 0$, la velocità radiale sarebbe immaginaria, al che non corrisponderebbe alcun moto effettivo.

Si osserva che l'equazione (6') si trasforma in una equazione di terzo grado nel modo seguente: l'equazione in parola si può scrivere:

$$(6'') \qquad (c^2 - \dot{r}^2)\left[(c^2 - \dot{r}^2) + \frac{hc^2r}{2e^2}\right]^2 = \frac{A^2c^8 + m_0{}^2c^{10}r^2}{4e^4},$$

e, ponendo:

$$(7) \qquad z = c^2 - \dot{r}^2 + \frac{hc^2r}{2e^2},$$

si ha:

$$(8) \qquad z^2\left(z - \frac{hc^2r}{2e^2}\right) = \frac{A^2c^8 + m_0{}^2c^{10}r^2}{4e^4}.$$

Ora, perchè risulti $\dot{r}^2 \geq 0$, deve essere:

$$c^2 + \frac{hc^2r}{2e^2} - z \geq 0,$$

cioè:

$$(9) \qquad z \leq c^2\left(1 + \frac{hr}{2e^2}\right).$$

Sarà anche $\dot{r}^2 < c^2$, quindi, in definitiva

$$(10) \qquad a < z \leq c^2 + a,$$

essendosi posto $\frac{hc^2r}{2e^2} = a$.

Scriveremo la (8) sotto la forma:

$$(11) \qquad f(z) \equiv z^2(z - a) - b^2 = 0,$$

dove

$$b^2 = \frac{A^2c^8 + m_0{}^2c^{10}r^2}{4e^4}.$$

La (11) deve, dunque, ammettere una radice z_0 soddisfacente alla (10).

Si ha:

$$f(0) = f(a) = -b^2; \quad f'(z) = 3z^2 - 2az = z(3z - 2a); \quad f''(z) = 6z - 2a.$$

La derivata $f'(z)$ si annulla per $z = 0$ e per $z = \frac{2}{3}a$.

Risulta:

$$f''(0) = -2a < 0, \text{ per } a > 0, \text{ cioè per } h > 0;$$

$$f''\left(\frac{2}{3}a\right) = 2a > 0, \text{ per } a > 0, \text{ cioè per } h > 0.$$

Perchè sia $z_0 \leq c^2 + a$, deve essere $f(c^2 + a) \geq 0$, cioè

$(c^2 + a)^2 c^2 - b^2 \geq 0$, ovvero:

$$c^6\left(1 + \frac{hr}{2e^2}\right)^2 \geq \frac{A^2c^8 + m_0{}^2c^{10}r^2}{4e^4}.$$

Da questa si ricava una limitazione per il raggio r; precisamente:

$$1 + \frac{hr}{e^2} + \frac{h^2r^2}{4e^4} \geq \frac{A^2c^2}{4e^4} + \frac{m_0{}^2c^4}{4e^4}r^2, \tag{12}$$

cioè:

$$F(r) \equiv \frac{h^2 - m_0{}^2c^4}{4e^4}r^2 + \frac{hr}{e^2} + 1 - \frac{A^2c^2}{4e^4} \geq 0, \text{ con } r \geq 0. \tag{12'}$$

Distingueremo i tre casi:

$$h^2 > m_0{}^2c^4, \quad h^2 = m_0{}^2c^4, \quad h^2 < m_0{}^2c^4.$$

Il discriminante di $F(r)$ risulta:

$$\Delta = \frac{m_0{}^2c^4}{e^4} + \frac{A^2c^2(h^2 - m_0{}^2c^4)}{4e^8}. \tag{13}$$

Nel primo dei casi sopra detti, cioè nel caso in cui sia $h^2 > m_0{}^2c^4$, risulta $\Delta > 0$. Allora, se è anche $1 - A^2c^2/4e^4 > 0$, risulta $F(r) > 0$ per $r \geq 0$. Per $h^2 > m_0{}^2c^4 (> 0)$ ed $1 - \frac{A^2c^2}{4e^2} < 0$, la $F(r) = 0$ possiede una radice negativa ed una radice positiva r_0; durante il moto sarà $r_0 \leq r < +\infty$.

Nel caso in cui sia

$$m_0{}^2c^4\left(1 - \frac{4e^4}{A^2c^2}\right) < h^2 < m_0{}^2c^4, \tag{14}$$

si ha ancora $\Delta > 0$; se, inoltre, è $\frac{A^2c^2}{4e^4} > 1$, allora l'equazione $F(r) = 0$ possiede due radici positive r_1 ed r_2 e, per r compreso fra r_1 ed r_2 si ha $F(r) > 0$. Ci troviamo in un caso particolarmente importante in cui si ha moto *oscillatorio* fra r_1 ed r_2.

Infine, per $0 < h^2 < m_0{}^2c^4$ ed $\frac{A^2c^2}{4e^4} < 1$, l'equazione $F(r) = 0$, ammette una radice negativa, ed una radice positiva r_1; la funzione $F(r)$ risulta positiva per $0 \leq r < r_1$, e la r varierà fra 0 ed r_1; se inizialmente è $0 < r = r_0 < r_1$ ed $\dot{r}_0 > 0$, la r crescerà da r_0 ad r_1, quindi decrescerà da r_1 a zero, etc. Nel caso particolare $h^2 = m^2{}_0c^4$, la $F(r) \geq 0$ si riduce a fornire la limitazione $r \geq \frac{A^2c^2 - 4e^4}{4e^2h}$ con $r \geq 0$, per cui dovrà anche essere $A^2c^2 \geq 4e^4$.

Possiamo ora brevemente discutere anche il caso in cui sia $h < 0$. In questo caso, posto $\frac{hc^2r}{2e^2} = -\alpha$, si ha l'equazione:

$$f(z) \equiv z^2(z + \alpha) - b^2 = 0$$

e deve essere $z_0 \leq c^2 - \alpha$, quindi:

$$f(c^2 - \alpha) \geq 0.$$

Si ha la stessa disuguaglianza per la $F(r)$, dove h è ora negativa. Si riconosce che in questo caso *non è possibile moto periodico.*

Per quanto riguarda ora l'equazione del tempo, supponiamo di indicare con $\Phi(r)$, il valore di $\dot{r}^2$ relativo, naturalmente, ad un possibile moto.

Avremo:

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \Phi(r), \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\Phi(r)}, \tag{15}$$

cioè separando le variabili ed integrando:

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\pm \sqrt{\Phi(r)}} \tag{16}$$

che è, appunto, l'equazione del tempo.

Si ottiene anche θ in funzione di r, a meno di una quadratura. Si ha, infatti:

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 \Phi(r).$$

Ma

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{A^2}{m^2 r^4} = \frac{A^2}{m_0^{\,2}} \frac{\left[\sqrt{1 - \dfrac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2}}\right]^2}{r^4} =$$

$$= \frac{m_0^{\,2}}{A^2} \frac{1 - \dfrac{\Phi(r) + r^2 \left(\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2 \Phi(r)}{c^2}}{r^4} = \frac{A^2}{m_0^{\,2} c^2} \frac{c^2 - \Phi(r) - r^2\Phi(r)\left(\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2}{r^4}.$$

Confrontando, si ottiene:

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 \Phi(r) = \frac{A^2}{m_0^{\,2} c^2} \frac{c^2 - \Phi(r) - r^2\Phi(r)\left(\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2}{r^4},$$

cioè, infine:

$$\theta - \theta_0 = \int \pm \sqrt{\frac{c^2 - \Phi(r)}{r^2\Phi(r) + \dfrac{m_0^{\,2} c^2}{A^2} r^4 \Phi(r)}}\, dr, \tag{17}$$

col che è raggiunto lo scopo del presente lavoro.