Bollettino Unione Matematica Italiana

Ettore Picasso

Sopra una generalizzazione della conica di Kommerell cui da luogo un sistema planare di curve su una superficie di S_4.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 31–37.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_31_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Sopra una generalizzazione della conica di Kommerell cui da luogo un sistema planare di curve su una superficie di S_4.

Nota di Ettore Picasso (a Cagliari)

Sunto. - *Una generalizzazione della conica di Kommerell tracciata sul piano d'appoggio di un sistema planare di curve precedentemente indicata dall'A., suggerisce la costruzione di un sistema di quadriche ottenute in modo analogo a partire da due iperpiani coordinati qualsiasi. Si accenna a particolari sistemi di curve per le quali le sezioni delle quadriche col piano d'appoggio, si spezzano, a gruppi, in coppie di rette.*

1. Ho avuto occasione di osservare da tempo [1] che su una superficie di S_4, un sistema planare di curve di equazione

$$d^2vdu - dvd^2u = Adu^3 + Bdu^2dv + Cdudv^2 + Ddv^3 \tag{1}$$

possiede in ciascun punto x della superficie, un piano d'appoggio ω sul quale l'intersezione col piano d'appoggio relativo al punto infinitamente vicino $x + dx$, al variare di $du\ dv$, descrive una conica, generalizzazione della *conica di Kommerell.*

Su ω, che è individuato da x e dai due punti

$$\underset{3}{Y} = (bB - aA - 2b^2)x + (2b - B)z + A\bar{z} + x_{uu}$$
$$\underset{4}{Y} = (bD - aC - 2a^2)x - Dz + (2a + C)\bar{z} + x_{vv}$$

(ove, secondo le usuali notazioni, $z = x_u + bx$ e $\bar{z} = x_v + ax$ sono i due punti trasformati di Laplace e a, b i coefficienti dell'equazione (di Laplace) $x_{uv} + ax_u + bx_v + cx = 0$ a cui soddisfano i punti $x(u, v)$ della superficie), $\lambda_0\lambda_3\lambda_4$ potranno considerarsi coordinate locali del punto $\lambda_0 x + \lambda_3 \underset{3}{Y} + \lambda_4 \underset{4}{Y}$ e pure mediante coordinate locali λ_μ rispetto alla piramide $x z \bar{z} \underset{3}{Y}\underset{4}{Y}$, s'intenderà riferito un qualsiasi punto $\lambda_0 x + \lambda_1 z + \lambda_2 \bar{z} + \lambda_3 \underset{3}{Y} + \lambda_4 \underset{4}{Y}$ di S_4.

La conica, in coordinate locali su ω, ha l'equazione

$$(\varphi_{1i}^{\cdot\cdot 1}\varphi_{2j}^{\cdot\cdot 2} - \varphi_{1i}^{\cdot\cdot 2}\varphi_{2j}^{\cdot\cdot 1})\lambda_i\lambda_j + \varphi_{ri}^{\cdot\cdot r}\lambda_0\lambda_i + \lambda_0^2 = 0 \qquad \begin{pmatrix} i,\ j = 3,\ 4 \\ r = 1,\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ove le $\varphi_{ri}^{\cdot\cdot t}$ si calcolano dalle due relazioni

$$d\underset{i}{Y} = (\varphi_{ri}^{\cdot\cdot 0}x + \varphi_{ri}^{\cdot\cdot s}x_s + \pi_{ri}^{j}\underset{j}{Y})du^r. \tag{3}$$

[1] « Contributo alla geom. diff. proiett. delle superficie di S_4 ». Atti del 1° Congresso dell'U. M. I.

2. Ad ulteriori generalizzazioni si perviene a partire da due iperpiani coordinati qualsivoglia $\lambda_\mu = 0$, $\lambda_\nu = 0$ ($\mu \neq \nu$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$).

I casi che seguono si riferiscono alle coppie di iperpiani $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$ $\lambda_4 = 0$.

I punti comuni all'iperpiano coordinato $\lambda_2 = 0$ (individuato cioè dai punti $x\, z\, \underset{i}{Y}$) ed all'iperpiano determinato dai punti infinitamente vicini a questi $x + dx$, $z + dz$, $\underset{i}{Y} + d\underset{i}{Y}$, debbono possedere tali coordinate locali in S_4, da annullare il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 1 - b\,du - a\,dv & du & dv & 0 & 0 \\ (aA - bB + b^2 + b_u)du + k\,dv & (B - b + 1)du - a\,dv & -A\,du & du & 0 \\ \bar\varphi_{r3}^{\cdot\cdot 0} du^r & \varphi_{r3}^{\cdot\cdot 1} du^r & \varphi_{r3}^{\cdot\cdot 2} du^r & 1 + \pi_{r3}^3 du^r & \pi_{r3}^4 du^r \\ \bar\varphi_{r4}^{\cdot\cdot 0} du^r & \varphi_{r4}^{\cdot\cdot 1} du^r & \varphi_{r4}^{\cdot\cdot 2} du^r & \pi_{r4}^3 du^r & 1 + \pi_{r4}^4 du^r \end{vmatrix}$$

ove si è posto per brevità $\bar\varphi_{ri}^{\cdot\cdot 0} = \varphi_{ri}^{\cdot\cdot 0} - b\varphi_{ri}^{\cdot\cdot 1} - a\varphi_{ri}^{\cdot\cdot 2}$ e h, k sono gli invarianti di LAPLACE.

Analogamente, i punti comuni agli iperpiani ottenuti dai precedenti con lo scambio di z con $\bar z$ ($\lambda_1 = 0$ e iperpiano dei punti $x + dx$, $\bar z + d\bar z$, $\underset{j}{Y} + d\underset{j}{Y}$) dovranno annullare il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 1 - b\,du - a\,dv & du & dv & 0 & 0 \\ h\,du + (aC - bD + a^2 + a_v)dv & D\,dv & 1 - b\,du - (C + a)dv & 0 & dv \\ \bar\varphi_{r3}^{\cdot\cdot 0} du^r & \varphi_{r3}^{\cdot\cdot 1} du^r & \varphi_{r3}^{\cdot\cdot 2} du^r & 1 + \pi_{r3}^3 du^c & \pi_{r3}^4 du^r \\ \bar\varphi_{r4}^{\cdot\cdot 0} du^r & \varphi_{r4}^{\cdot\cdot 1} du^r & \varphi_{r4}^{\cdot\cdot 2} du^r & \pi_{r4}^3 du^r & 1 + \pi_{r4}^4 du^r \end{vmatrix}.$$

Trascurati i termini d'ordine > 1, le relazioni precedenti equivalgono a

$$(A\lambda_1 - \lambda_i \varphi_{1i}^{\cdot\cdot 2})du - (\lambda_0 + \lambda_i \varphi_{2i}^{\cdot\cdot 2})dv = 0$$

$$(\lambda_0 + \lambda_i \varphi_{1i}^{\cdot\cdot 1})du + (D\lambda_2 + \lambda_i \varphi_{2i}^{\cdot\cdot 1})dv = 0.$$

I piani comuni a questi iperpiani, al variare di $du\ dv$, inviluppano una quadrica Q_{12} la cui equazione si ottiene eliminando $du\ dv$ dalle due precedenti

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} &(\varphi_{2i}^{\cdot\cdot 2}\varphi_{1j}^{\cdot\cdot 1} - \varphi_{1i}^{\cdot\cdot 2}\varphi_{2j}^{\cdot\cdot 1})\lambda_i\lambda_j + A\varphi_{2i}^{\cdot\cdot 1}\lambda_1\lambda_i - D\varphi_{1i}^{\cdot\cdot 2}\lambda_2\lambda_i + AD\lambda_1\lambda_2 \\ &\qquad + \varphi_{ri}^{\cdot\cdot r}\lambda_0\lambda_i + \lambda_0^2 = 0 \qquad (i, j = 3, 4). \end{aligned}$$

L'intersezione di questa col piano tangente in x alla superficie (piano $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$) è la conica di equazione

$$AD\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0^2 = 0$$

che appartiene al fascio di coniche tangenti in z, $\bar{z}$ alle linee u, v delle superficie S^1 e S^{-1} trasformate di LAPLACE, al quale appartengono, come è noto, (per $AD = -2h$ o $AD = -2k$) le due coniche di KOENIGS.

L'intersezione col piano d'appoggio ω ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) fornisce ancora l'equazione della conica (2), della quale si ha pertanto una nuova definizione.

A partire dagli iperpiani $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_4 = 0$ si costruisce allo stesso modo la quadrica Q_{34} la cui equazione, in coordinate locali, si ottiene eliminando du dv dalle due relazioni

$$\lambda_1 du + \pi_{r4}^3 \lambda_4 du^r = 0$$

$$\lambda_2 dv + \pi_{r3}^4 \lambda_3 du^r = 0.$$

Si ha

(5) $$(\pi_{14}^3\pi_{23}^4 - \pi_{24}^3\pi_{13}^4)\lambda_3\lambda_4 + \pi_{23}^4\lambda_1\lambda_3 + \pi_{14}^3\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Sostituite in questa le espressioni delle π_{ri}^j che si calcolano, come le $\varphi_{ri}^{\cdot\cdot s}$, dalle (3), tenuto conto che la superficie è definita dall'equazione di LAPLACE e dalle due equazioni del 3° ordine

$$x_{uuu} = \alpha_1 x_{uu} + \alpha_2 x_{vv} + \alpha_3 x_u + \alpha_4 x_v + \alpha_5 x$$

$$x_{vvv} = \beta_1 x_{uu} + \beta_2 x_{vv} + \beta_3 x_u + \beta_4 x_v + \beta_5 x$$

si ha per il cono quadrico (5) l'equazione

(6) $$(AD + \alpha_2\beta_1)\lambda_3\lambda_4 + D\lambda_2\lambda_4 - A\lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 = 0;$$

e per i sistemi planari per cui è in particolare $A = D = 0$, semplicemente

(7) $$\alpha_2\beta_1\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

L'unico coefficiente che compare in (7) è l'invariante $\alpha_2\beta_1$ di BOMPIANI relativo alle due equazioni del 3° ordine; e unicamente mediante questo si esprime anche il discriminante della (7) (considerata come quadrica dell'S_3 $\lambda_0 = 0$) che vale $\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{4}\right)^2$.

Si ottengono in tal modo, a partire da due differenti iperpiani coordinati, 10 quadriche $Q_{\mu\nu}$ ($Q_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$; $\mu \neq \nu$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$) ciascuna delle quali è luogo dei punti comuni, variando du, dv, agli iperpiani infinitamente vicini nel senso detto sopra agli iperpiani coordinati $\lambda_\mu = 0$ $\lambda_\nu = 0$.

Indipendentemente dalla considerazione dei sistemi planari di curve sulla superficie, la costruzione indicata può effettuarsi a partire da due vertici qualunque della piramide fondamentale $x z \bar{z} x_{uu} x_{vv}$ (a cui peraltro si riduce la precedente ponendo $A = D = 0$, $B = 2b$, $C = -2a$) e alla quale si può in ogni caso riferire un punto dell' S_4.

È ovvio che soltanto scelte particolari intrinseche alla superficie dei sistemi planari (1) nel primo caso, o una opportuna normalizzazione delle coordinate proiettive nel secondo, determinano in modo invariante sia le quadriche, sia le configurazioni a cui queste danno luogo su ω o sugli altri piani coordinati.

3. Le quadriche Q_{03} Q_{04} Q_{34} possono ritenersi appartenenti al medesimo S_3 coordinato $\lambda_0 = 0$; Q_{14} Q_{23} rispettivamente agli S_3 coordinati $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$. Nessuna delle rimanenti giace in un medesimo iperpiano e le loro intersezioni $C_{\lambda\mu}$ col piano d' appoggio ω, oltre la C_{12} che ha per equazione la (2), sono le coniche non degeneri C_{01} C_{02} di equazioni

$$(8) \qquad (\bar{\varphi}_{1i}^{\cdot\cdot 0} \varphi_{2j}^{\cdot\cdot 1} - \bar{\varphi}_{2i}^{\cdot\cdot 0} \varphi_{1j}^{\cdot\cdot 1}) \lambda_i \lambda_j + \bar{\varphi}_{2i}^{\cdot\cdot 0} \lambda_0 \lambda_i = 0$$

$$(9) \qquad (\bar{\varphi}_{2i}^{\cdot\cdot 0} \varphi_{1j}^{\cdot\cdot 2} - \bar{\varphi}_{1i}^{\cdot\cdot 0} \varphi_{2j}^{\cdot\cdot 2}) \lambda_i \lambda_j + \bar{\varphi}_{1i}^{\cdot\cdot 0} \lambda_0 \lambda_i = 0$$

e le coppie di rette

$$(10) \qquad \lambda_4 = 0 \qquad (D \varphi_{2i}^{\cdot\cdot 1} + \beta_1 \varphi_{1i}^{\cdot\cdot 1}) \lambda_i + \beta_1 \lambda_0 = 0$$

$$(11) \qquad \lambda_3 = 0 \qquad (A \varphi_{1i}^{\cdot\cdot 2} - \alpha_2 \varphi_{2i}^{\cdot\cdot 2}) \lambda_i - \alpha_2 \lambda_0 = 0$$

che compongono C_{13} e C_{24}.

Particolari sistemi di curve (1) possiedono piani d' appoggio sui quali anche la (2), (9), (10) si spezzano, a due a due, in coppie di rette. Particolarmente notevole il caso in cui i coefficienti della (1) verifichino l' una o l' altra coppia di condizioni seguenti

$$(12) \qquad \varphi_{2i}^{\cdot\cdot 1} = 0 \qquad \varphi_{1i}^{\cdot\cdot 2} = 0 \qquad (i = 3{,}4)$$

che equivalgono, in forza delle (3), ai sistemi

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v}(2b - B) + AD - a_u + ab - c = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial v} D + \beta_1(2b - B) - D(2a + C) - (a + \beta_2)D - \beta_3 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u}(2a + C) + AD - b_v + ab - c = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial u} A - \alpha_2(2a + C) - A(2b - B) - (b + \alpha_1)A + \alpha_4 = 0 \end{aligned} \right.$$

Verificato il sistema (13) o (14), la (2) si scinde nelle coppie di rette

$$\varphi_{1i}^{\cdot\cdot 1}\lambda_i + \lambda_0 = 0\,; \qquad \varphi_{2i}^{\cdot\cdot 2}\lambda_i + \lambda_0 = 0 \tag{15}$$

Con la prima delle (15), per la (13), coincidono sia la retta che oltre $\bar{\varphi}_{2i}^{\cdot\cdot 0}\lambda_i = 0$ compone la (8), sia la retta distinta da $\lambda_4 = 0$, di cui si compone C_{13}. In relazione analoga si trovano la (2) medesima la (9) e la (11) quando i coefficienti di (1) verificano la (14).

Dalle equazioni che definiscono la superficie e dalle relative condizioni d'integrabilità, segue in modo agevole che alle (13) si può soddisfare, ad esempio, ponendo

$$A = \alpha_2\left(\frac{\partial^2 \log \beta_1}{\partial u \partial v} - \alpha_2\beta_1 + k - h\right);\quad 2b - B = \frac{\beta_3}{\beta_1};\quad 2a + C = \frac{\alpha_4}{\alpha_2};\quad D = \frac{1}{\alpha_2}\,;$$

e alle (14), ponendo

$$A = \frac{1}{\beta_1}\,;\quad 2b - B = \frac{\beta_3}{\beta_1};\quad 2a + C = \frac{\alpha_4}{\alpha_2};\quad D = \beta_1\left(\frac{\partial^2 \log \alpha_2}{\partial u \partial v} - \alpha_2\beta_1 + h - k\right)$$

nelle quali le espressioni

$$\left(\frac{\partial^2 \log \beta_1}{\partial u \partial v} - \alpha_2\beta_1 + k - h\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial^2 \log \alpha_2}{\partial u \partial v} - \alpha_2\beta_1 + h - k\right)$$

rappresentano i valori rispettivamente assunti dall'invariante $\alpha_2\beta_1$ per le superficie S^1 e S^{-1} trasformate di LAPLACE.

In particolare, le superficie di S_4 che possiedono sistemi planari (1) i cui coefficienti siano *simultaneamente* soluzioni delle (13) e (14), hanno in ciascun punto della superficie piani d'appoggio sui quali le (15) coincidono; la corrispondente retta è comune alle tre coniche, generalmente non degeneri, (2), (8), (9) e coincide con le rette, non passanti per il punto, di cui si compongono C_{13} e C_{24}.

4. Si può dare alle (12) altra forma introducendo il tensore di *curvatura riemanniana* della connessione proiettiva sulla varietà degli S_1 — poli, di parametri π_{ri}^{j} (dati dalle (3)). [2]. Si ha

$$\Pi_{rsi}^{\cdot\cdot\cdot k} = \omega_{rt}^{\cdot\cdot k}\varphi_{si}^{\cdot\cdot t} - \omega_{st}^{\cdot\cdot k}\varphi_{ri}^{\cdot\cdot t}\,; \qquad \begin{pmatrix} r,\ s,\ t = 1,\ 2 \\ i,\ k = 3,\ 4 \end{pmatrix} \tag{16}$$

In corrispondenza alla scelta della retta $\underset{3\ 4}{YY}$ come S_1 — polo, si

[2] E. PICASSO, « *Alcune osservazioni sull'uso delle connessioni proiettive ...,* » Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari, Vol. XXIII, 1953, pag. 3 e segg.

hanno per le componenti del tensore ridotto di curvatura euleriana i valori $\omega_{11}^{\cdot\cdot 3} = \omega_{22}^{\cdot\cdot 4} = 1$ e nulle le rimanenti. Le (12) si esprimono in conseguenza

$$\Pi_{rsi}^{\cdot\cdot\cdot 3} = 0 \qquad \Pi_{rsi}^{\cdot\cdot\cdot 4} = 0 \tag{17}$$

Quanto precede consente dunque di concludere:

condizione necessaria e sufficiente perchè sul piano d'appoggio ω *di un sistema planare di curve di una superficie di* S_4, *le coppie di coniche* $C_{12}C_{01}$, $C_{12}C_{02}$ *si spezzino in rette, è che, in relazione alla scelta della retta* $\underset{3}{Y}\underset{4}{Y}$ *come* S_1 *— polo di una connessione proiettiva sulla superficie, la prima o la seconda delle* (17) *siano verificate*; *se inoltre è simultaneamente*

$$\Pi_{rsi}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0$$

(onde la connessione degli S_1 *— poli risulterà in particolare integrabile), le coniche* $C_{12}C_{01}C_{02}$ *sono degeneri e possiedono una retta comune con la quale in questo caso coincidono anche le rette, non passanti per il punto, che compongono le coniche, sempre degeneri,* $C_{13}C_{24}$.

5. Anche i sistemi planari per i quali risulti

$$\varphi_{23}^{\cdot\cdot 1} = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_{14}^{\cdot\cdot 2} = 0 \tag{18}$$

possono geometricamente caratterizzarsi in relazione ai coni quadrici Q_{13} Q_{14}.

Dalle coordinate dei relativi vertici

$$\begin{aligned} \underset{3}{X^*} &\equiv \left(\lambda_0 = -\varphi_{13}^{\cdot\cdot 1}\,;\ \lambda_2 = -\frac{\varphi_{32}^{\cdot\cdot 1}}{D}\,;\ \lambda_3 = 1\,;\ \lambda_1 = \lambda_4 = 0\right) \\ \underset{4}{X^*} &\equiv \left(\lambda_0 = -\varphi_{24}^{\cdot\cdot 2}\,;\ \lambda_1 = \frac{\varphi_{14}^{\cdot\cdot 2}}{A}\,;\quad \lambda_4 = 1\,;\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right) \end{aligned} \tag{19}$$

confrontate con le espressioni dei punti $\underset{i}{Y}$, segue immediatamente che i sistemi planari di curve per i quali il piano d'appoggio ω coincide col piano dei tre punti $x\underset{3}{X}\underset{4}{X}$, sono appunto i sistemi i cui coefficienti soddisfano alle (18). (¹)

(¹) Alle (18) che coincidono con le prime equazioni dei sistemi (13), (14), si soddisfa determinando B e C in modo che risulti

$$\frac{\partial}{\partial u}(2a + C) - b_v = \frac{\partial}{\partial v}(2b - B) - a_u$$

e calcolando conseguentemente AD. Si verifica, ad esempio, che si può porre $B = b + \alpha_1$ e $C = -(a + \beta_2)$ da cui segue $AD = -(a_u + b_v + \alpha_2\beta_1)$.

Dalle (16) e dalle analoghe per il tensore di curvatura riemanniana della connessione proiettiva sulla superficie

$$R_{trs}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = \omega_{rs}^{\cdot\cdot i}\varphi_{ti}^{\cdot\cdot\lambda} - \omega_{ts}^{\cdot\cdot i}\varphi_{ri}^{\cdot\cdot\lambda}, \tag{20}$$

segue che le condizioni

$$R_{rs1}^{\cdot\cdot\cdot 1} = \Pi_{rs3}^{\cdot\cdot\cdot 3} = 0 \qquad R_{rs2}^{\cdot\cdot\cdot 2} = \Pi_{rs4}^{\cdot\cdot\cdot 4} = 0 \tag{21}$$

(onde in particolare $R_{rst}^{\cdot\cdot\cdot t} = \Pi_{rsi}^{\cdot\cdot\cdot i} = 0$), sono equivalenti alle (18). Viceversa: supposto che le (21) siano verificate in relazione alla scelta dell' S_1-polo appartenente al piano d'appoggio di un sistema planare, il piano medesimo coincide col piano determinato da x e dai vertici dei due coni Q_{13} Q_{24}.

Fissato sulla superficie uno di tali sistemi, si potranno riferire i punti del relativo piano d'appoggio al triangolo $x\underset{i}{X^*}$.

L'equazione della conica (2) diventa in questo caso ($\mu_0\mu_3\mu_4$ essendo nuove coordinate locali)

$$\begin{aligned}\left\{\left(\varphi_{23}^{\cdot\cdot 2} - \varphi_{13}^{\cdot\cdot 1}\right)\left(\varphi_{14}^{\cdot\cdot 1} - \varphi_{24}^{\cdot\cdot 2}\right) - \varphi_{13}^{\cdot\cdot 2}\varphi_{24}^{\cdot\cdot 1}\right\}\mu_3\mu_4 + \left(\varphi_{23}^{\cdot\cdot 2} - \varphi_{13}^{\cdot\cdot 1}\right)\mu_0\mu_3 + \\ + \left(\varphi_{14}^{\cdot\cdot 1} - \varphi_{24}^{\cdot\cdot 2}\right)\mu_0\mu_4 + \mu_0^2 = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Specializzando ancora il riferinento su ω con l'assumere a punti fondamentali, oltre x, i punti di contatto della conica con le tangenti per x, si può dare alla (2) la forma

$$-\varphi_{13}^{\cdot\cdot 2}\varphi_{24}^{\cdot\cdot 1}\nu_3\nu_4 + \nu_0^2 = 0 \tag{23}$$

analoga alla corrispondente equazione (5) sul piano tangente.

Dalle (22) segue anche che i sistemi planari di curve i cui coefficienti verificano, oltre le (18), le condizioni

$$\varphi_{13}^{\cdot\cdot 1} = \varphi_{23}^{\cdot\cdot 2} \qquad \text{e} \qquad \varphi_{14}^{\cdot\cdot 1} = \varphi_{24}^{\cdot\cdot 2}$$

danno luogo su ω ad una conica la cui equazione è ancora la (23).

Per questi particolari sistemi planari, i vertici $\underset{i}{X^*}$ appaiono dunque tenere sul piano d'appoggio ω, relativamente alla quadrica Q_{12}, ruolo analogo ai punti trasformati di LAPLACE del piano tangente.