Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Tallini

Su una estensione del teorema di Desargues.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 46–48.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_46_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Su una estensione del teorema di Desargues.

Nota di GIUSEPPE TALLINI (a Roma)

Sunto. - *È dato nei primi tre capiverso.*

Nel « *Proceedings of the American Mathematical Society* » vol. 6, numero 5, ottobre 1955, a pg. 675, è pubblicata una Nota di P. O. BELL dal titolo « Generalized Theorems of Desargues for n-dimensional Projective Space ». In quella Nota vengono dimostrati, per via analitica alquanto laboriosa, due teoremi estendenti agli iperspazi il noto teorema di DESARGUES sui triangoli omologici, e vengono poi rilevati alcuni corollari immediati di questi.

Osserviamo anzitutto che detti teoremi possono ritenersi già sostanzialmente noti: si veda in proposito B. SEGRE. *Lezioni di Geometria Moderna*, vol. I (Zanichelli, Bologna 1948), p. 166 e segg., dove — tra l'altro — sono date diverse generalizzazioni ulteriori del teorema di DESARGUES agli iperspazi, in parte nuove, e vi è inoltre un'esauriente bibliografia sull'argomento, a cui rimandiamo.

Ci proponiamo ora di dimostrare, con semplici argomentazioni di natura geometrica, due proposizioni da cui seguono subito i due teoremi a cui dianzi si è accennato.

In un S_ρ (con $\rho > 2$) grafico irriducibile [1] consideriamo due n-simplessi (con $2 < n \leq \rho + 1$) $A_1 A_2 \dots A_n$, $A'_1 A'_2 \dots A'_n$, e supponiamo distinti tra loro vertici dei due n-simplessi aventi lo stesso indice. Diremo che essi sono prospettivi rispetto ad un punto Φ se le terne di punti $\Phi A_1 A'_1$, $\Phi A_2 A'_2, \dots, \Phi A_n A'_n$ sono collineari. Sotto questa ipotesi, le rette corrispondenti $A_i A_j$, $A'_i A'_j$ sono tutte distinte, tranne al più per una coppia, che, con una opportuna permutazione degli indici $1, 2, \dots, n$, si può sempre ridurre alla $A_1 A_n$, $A'_1 A'_n$. Vale allora il seguente:

TEOREMA I. - *Se in un* S_ρ $(\rho > 2)$ *grafico irriducibile due simplessi* $A_1 A_2 \dots A_n$, $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ $(2 < n \leq \rho + 1)$ *sono prospettivi rispetto a un punto* Φ, *scelti gli indici in modo che l'eventuale coppia di rette corrispondenti che coincidono sia la coppia* $A_1 A_n$, $A'_1 A'_n$, *le rette* $A_i A_j$, $A'_i A'_j$ (*con* $i < j$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, n$ *e* $(i\,j) \neq (1\,n)$ *se e soltanto se le rette* $A_1 A_n$, $A'_1 A'_n$ *sono coincidenti*) *risultano distinte e incidenti in un punto* P_{ij}. *Il punto* P_{ij} *dipende linear-*

[1] Per la nozione di spazio grafico irriducibile si veda B. SEGRE, *Lezioni di Geometria Moderna*, vol. I (Zanichelli, Bologna 1948), p. 102 e segg.

mente dai punti P_i, $P_{i+h}, \dots, P_{j-1}$, *dove* P_h *denota il punto* $P_{h,h+1}$. *Inoltre i punti* P_{ij} *sono congiunti da un* S_{n-2}.

Dimostrazione: Le rette distinte A_iA_j, $A'_iA'_j$ sono complanari, poichè per ipotesi le rette $A_iA'_i$, $A_jA'_j$ concorrono in Φ, e quindi le prime risultano incidenti in un punto P_{ij}.

Osserviamo ora che, comunque si considerino gli indici $i\,j\,l$ $(i < j < l)$ compresi tra 1 e n (con $(i\,l) \neq (1\,n)$ se e soltanto se A_1A_n coincide con $A'_1A'_n$) i punti P_{ij}, P_{il}, P_{jl} sono distinti e collineari. Infatti i triangoli $A_iA_jA_l$ e $A'_iA'_jA'_l$ sono omologici, essendo prospettivi rispetto a Φ.

Per dimostrare che P_{ij} dipende linearmente dai punti P_i, $P_{i+1}, \dots, P_{j-1}$, procediamo per induzione rispetto a j. La proposizione è intanto vera per $j = i + 2$, in quanto, per l'osservazione precedente, i punti P_i, P_{i+1}, $P_{i,i+2}$, sono collineari. Supposto allora $P_{i,j-1}$ dipendente da $P_i, \dots, P_{j-2}$, consideriamo i punti $P_{i,j-1}$, P_{ij}, $P_{j-1,j}$. Essi, per l'osservazione precedente, sono distinti e collineari, quindi lo spazio individuato da $P_i, \dots, P_{j-2}$ e P_{j-1} deve contenere la retta $P_{j-1}P_{i,j-1}$ e quindi anche P_{ij}, onde P_{ij} è dipendente da $P_i, \dots, P_{j-1}$.

Dimostriamo che i punti P_{ij} sono congiunti da un S_{n-2}.

Procediamo per induzione rispetto a n. La proposizione è intanto vera per $n = 3$, riducendosi in questo caso al teorema di Desargues sui triangoli omologici ([2]). Supposta dunque la validità della proposizione per gli $(n-1)$-simplessi $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ e $A'_1A'_2 \dots A'_{n-1}$, denominiano con $\bar{S}_{n-3}$ lo spazio congiungente i punti $P_{ij} (i < j,\ i = 1, \dots, n-2,\ j = 2, \dots, n-1)$ e con α e α' (distinti o coincidenti tra loro) rispettivamente gli S_{n-2} individuati dal primo e dal secondo dei due $(n-1)$-simplessi suddetti. I punti P_{ij} appartengono sia ad α che ad α', quindi lo stesso avviene per il suddetto $\bar{S}_{n-3}$. Consideriamo le rette A_nA_{n-1}, $A'_nA'_{n-1}$; esse si incontrano nel punto P_{n-1}, che non può essere situato in $\bar{S}_{n-3}$, altrimenti delle due rette A_nA_{n-1}, $A'_nA'_{n-1}$ una almeno dovrebbe essere contenuta rispettivamente in α o α' (a meno che fosse $A_{n-1} \equiv P_{n-1} \equiv A'_{n-1}$ il che però è stato escluso) e ciò è assurdo Nell'$\bar{S}_{n-2}$, congiungente $\bar{S}_{n-3}$ con P_{n-1}, sono contenuti i punti $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ e quindi per ogni altro punto P_{ij} (con $i < j$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, n$, e $(i\,j) \neq (1\,n)$ se e soltanto se le rette A_1A_n, $A'_1A'_n$ sono coincidenti).

([2]) Si veda per esempio B. Segre. *Lezioni di Geometria Moderna*, vol. I (Zanichelli, Bologna 1948) pp. 106-107.

Dal teorema precedente si deduce immediatamente, oltre al teor. 1 della citata nota di P. O. BELL, la proposizione seguente:

Dati in un S_ρ $(\rho > 2)$ *grafico irriducibile due* n*-simplessi* $(2 < n \leq \rho + 1)$ $A_1 A_2 \dots A_n$, $A'_1 A'_2 \dots A'_n$, *denotiamo con* α_i, α'_i *le facce rispettivamente opposte ad* A_i, A'_i, *e supponiamo* A_i *distinto da* A'_i e α_i *distinto da* α'_i. *Se le* n *coppie di punti* A_i, A'_i *sono allineate con un punto* P, *allora le* n *coppie di facce* α_i, α'_i *si incontrano secondo un* S_{n-3} *di uno stesso* S_{n-2}. *E viceversa.*

Questa proposizione trovasi già dimostrata nel caso di S_{n-1} pascaliani in B. SEGRE, *Lezioni di Geometria Moderna* vol. I (Zanichelli, Bologna 1948), pg. 196.

Dimostriamo infine il

TEOREMA II. – *In un* S_ρ $(\rho > 2)$ *grafico irriducibile siani dati due* n*-simplessi* $(2 < n \leq \rho + 1)$ $A_1 A_2 \dots A_n$, $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ *con* A_i *distinto da* A'_i, *tali che per ogni coppia di interi* i j $(1 \leq i < j \leq n)$ *per cui le rette* $A_i A_j$, $A'_i A'_j$ *risultino distinte, esiste un punto* P_{ij} *comune alle rette* $A_i A_j$, $A'_i A'_j$. *Allora, se* $n = 3$ *e i due triangoli* $A_1 A_2 A_3$, $A'_1 A'_2 A'_3$, *giacciono in uno stesso piano, essi sono prospettivi rispetto ad un punto se e soltanto se* P_{12}, P_{13}, P_{23} *sono allineati; in ogni altro caso i due* n*-simplessi sono sempre prospettivi rispetto ad un opportuno punto* Φ, *talchè si può applicare il teor. I.*

Se $n = 3$ e i due triangoli $A_1 A_2 A_3$, $A'_1 A'_2 A'_3$ giacciono in uno stesso piano, la proposizione segue dal teorema di DESARGUES sui triangoli omologici. Escluderemo perciò questo caso.

Le rette distinte $A_i A'_i$, $A_j A'_j$ sono complanari, dovendo le rette $A_i A_j$, $A'_i A'_j$ essere distinte e incidenti in P_{ij}, e quindi le prime risultano incidenti in un punto. Ne segue che le rette distinte che congiungono punti corrispondenti dei due n-simplessi sono a due a due incidenti, quindi, per un noto teorema di geometria proiettiva [3], esse passano tutte per un punto Φ o giacciono tutte in uno stesso piano. La seconda eventualità essendo esclusa dall'ipotesi ammessa, ne segue l'asserto.

Dal teorema precedente segue immediatamente il teor. 2 della citata nota di P. O. BELL, non appena si osservi che, se due n-simplessi sono prospettivi rispetto ad un punto, sono anche tali i due simplessi che si ottengono dai due dati sopprimendo vertici corrispondenti fra loro coincidenti, e viceversa.

[3] Si veda per esempio E. BERTINI, *Introduzione alla geometria degli iperspazi* (2ª ed., Principato, Messina 1923), cap. I° n. 18, in cui il teorema è dimostrato in uno spazio proiettivo reale o complesso; ma l'argomentazione ivi fatta può venir ripetuta in un qualsiasi spazio grafico.