Delfina Roux

Sui numeri primi delle progressioni aritmetiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 55–63.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_55_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Sui numeri primi delle progressioni aritmetiche.

Nota di Delfina Roux (a Milano)

Sunto. - *Si dimostra l'esistenza di infiniti numeri primi in una classe di progressioni aritmetiche, precisando l'ordine di grandezza connesso alla loro distribuzione, e anche teoremi del tipo di* Bertrand-Tchebychef *per tali progressioni. Si perviene ai risultati riprendendo il procedimento seguito in due Note precedenti di* G. Ricci *e liberandolo dall'ipotesi ivi ammessa della validità del « Primzahlsatz » ; si fa uso esclusivamente di mezzi elementari.*

1. Oggi è noto il metodo di A. Selberg che, rispondendo a un classico e difficile problema, consente di dimostrare per via elementare (sebbene non semplice) il « Primzahlsatz » e l'esistenza di infiniti numeri primi nelle progressioni aritmetiche [1].

Precedentemente, in due brevi Note pubblicate in questo Bollettino [2] G. Ricci aveva stabilito tra l'altro i due teoremi seguenti:

Teorema A. - Sia a uno degli interi $a = 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 30$, [3] b intero e $(a, b) = 1$; nella progressione $ax + b$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$ il numero degli interi primi $p = ax + b \leqq \xi$ ha l'ordine di grandezza $\xi/\log \xi$.

Teorema B. - Per ogni intero ξ maggiore di un conveniente ξ_0, in ciascun sistema di interi

$$ax + b, \; x = [\eta\xi] + 1, \; [\eta\xi] + 2, \ldots [\xi] \, ; \; ((a, \; b) = 1 \, ; \; \eta = \eta(a))$$

(1) A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*. « Annals of Mathematics », **50** (1949) pp. 305-313.
A. Selberg, *An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in the arithmetical progressions*, « Annals of Mathematics », **50** (1949) pp. 297-304.
A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem for arithmetic progressions*, « Canadian Journal of Mathematics », vol. II, **1** (1950), pp. 66-78.

(2) G. Ricci, a) *Sul teorema di Dirichlet relativo alla progressione aritmetica*, « Bollettino U.M.I. », vol. XII, (1933), pp. 304-309.
b) *Sui teoremi di Dirichlet e di Bertrand-Tchebychef relativi alla progressione aritmetica*, « Bollettino U.M.I. », vol. XIII, (1933), pp. 7-17.

(3) Per $a = 8$ vedere la Nota b) citata in (2), pag. 8.

esiste almeno un numero primo se

$$(a = 6,\ \eta(6) = 3/4),\quad (a = 8,\ \eta(8) = 1/5),$$
$$(a = 12,\ \eta(12) = 1/2),\quad (a = 30,\ \eta(30) = 1/4).$$

L'Autore pervenne a questi teoremi con un procedimento abbastanza semplice, ma d'altronde egli assumeva come noto il « Primzahlsatz » e, precisamente, faceva uso delle tre relazioni fondamentali seguenti:

$$\text{(I)} \sum_{p \leq \xi} \log p \sim \xi, \qquad \text{(II)} \sum_{p \leq \xi} 1 \sim \xi/\log \xi,$$

$$\text{(III)} \sum_{p \leq \xi} \frac{\log p}{p-1} = \log \xi - C + o(1) \text{ (C costante di Euler–Mascheroni).}$$

I precedenti teoremi A e B sono stabiliti rispettivamente come conseguenza dei due seguenti:

TEOREMA C. - Siano a, b, interi, $a > 0$ e $(a, b) = 1$. Nella progressione aritmetica $ax + b$ $(x = 1, 2, 3, \dots)$ esistono infiniti numeri della forma np, dove p è primo e n (primo con a) non supera il numero

$$\delta(a) = \frac{a}{\log a + C + \sum_{p|a} \frac{\log p}{p-1} - 1}$$

(C costante di EULER–MASCHERONI) e la somma si intende estesa a tutti i divisori primi di a. Inoltre il numero $N(\xi)$ degli interi positivi $ax + b$ della forma np sopradetta ha l'ordine di grandezza di $\xi/\log \xi$.

TEOREMA D. - Sia ε un numero reale con $0 < \varepsilon < 1$ e siano a, b interi, $a > 0$ e $(a, b) = 1$. Diciamo $B_\varepsilon(\xi)$ il numero degli interi contenuti nel segmento di progressione aritmetica

$$ax + b \qquad x = [(1-\varepsilon)\xi] + 1,\ [(1-\varepsilon)\xi] + 2, \dots [\xi]$$

aventi la forma np, con p primo e n (primo con a) non superiore al numero

$$\gamma(a, \varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon\left(\log a + \sum_{p|a} \frac{\log p}{p-1}\right) - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)}$$

Per $\xi \to \infty$ il numero $B_\varepsilon(\xi)$ ha l'ordine di grandezza di $\xi/\log \xi$.

Successivamente P. ERDÖS [4] ha stabilito l'esistenza di infiniti interi primi (e l'ordine di grandezza del loro numero) in una più ampia classe di progressioni aritmetiche seguendo un procedimento che, sebbene elaborato, si avvale soltanto di mezzi elementari.

Lo scopo di questa Nota è di riprendere il procedimento dimostrativo che si trova in G. RICCI e di renderlo indipendente dal « Primzahlsatz » riportandolo al classico teorema di P. TCHEBYCHEF nella forma a cui pervenne J. J. SYLVESTER [5]. Precisamente noi ammetteremo noto che, *per* ξ *abbastanza grande risulta*

$$(\mathrm{I}^*) \quad \alpha\xi < \sum_{p \leq \xi} \log p < \beta\xi$$

$$(\mathrm{II}^*) \quad \alpha\xi/\log\xi < \sum_{p \leq \xi} 1 < \beta\xi/\log\xi$$

$$\alpha = 0{,}992612 \qquad \beta = 1{,}006775.$$

Abbiamo dovuto valutare, in conseguenza di queste limitazioni, la somma che figura in (III) e siamo giunti al seguente [6]

LEMMA I. - *Per* ξ *abbastanza grande è*

$$(\mathrm{III}^*) \quad \log\xi - 0{,}780996 < \sum_{p \leq \xi} \frac{\log p}{p-1} < \log\xi - 0{,}351047 .$$

Questo Lemma si ottiene, mediante una precisazione numerica dal seguente

LEMMA II. - *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *e* H *intero positivo e* $\xi \geq \xi_0(\varepsilon, \mathrm{H})$, *risulta*

$$(1.1) \quad \log\xi + M_H - 1 - \varepsilon < \sum_{p \leq \xi} \frac{\log p}{p-1} < \log\xi + L_H - 1 + \varepsilon$$

dove $\mathrm{M_H}$ *e* $\mathrm{L_H}$ *hanno le seguenti espressioni*

$$(1.2) \quad M_H = \alpha \sum_{h=1}^{H} S_h - \beta \sum_{h=1}^{H} T_h, \quad L_H = \frac{\beta}{H+1} + \beta \sum_{h=1}^{H} \bar{S}_h - \alpha \sum_{h=1}^{H} \bar{T}_h,$$

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{aligned} S_h &= \sum_{v=0}^{n(h)-1} \frac{v}{nh+v}, & T_h &= \sum_{v=0}^{n(h)-1} \frac{v}{nh+v+1} \\ \bar{S}_h &= \sum_{v=0}^{n(h)-1} \frac{v+1}{nh+v}, & \bar{T}_h &= \sum_{v=0}^{n(h)-1} \frac{v+1}{nh+v+1} . \end{aligned} \right.$$

[4] P. ERDÖS, *Ueber die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen*, « Mathematische Zeitschrift » **39**. (1935), pp. 473-491

[5] J. J. SYLVESTER, *On Tchebychef's theory of the totality of the prime numbers comprised within given limits*, « American Journal of Mathematics », IV (1881) pp. 230-247. Vedere anche G. TORELLI, *Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato*, (1901), pp. 28-29.

[6] Della limitazione che figura in questo Lemma I noi utilizzeremo soltanto la disuguaglianza a destra.

Mediante le tre limitazioni (I*), (II*), (III*), (l'ultima delle quali fornita dal Lemma I) si può riprendere il procedimento seguito nelle Note citate in (2) e si perviene ai Teoremi A e B ricordati sopra. Dobbiamo osservare che la sostituzione delle tre limitazioni elementari alle relazioni asintotiche connesse col «Primzahlsatz» non ci ha consentito di pervenire al caso $a = 8$ che risulta escluso da ambedue i teoremi A e B; inoltre i mezzi più rudimentali utilizzati ci hanno obbligato ad attenuare anche il teorema B nei rapporti di BERTRAND–TCHEBYCHEF e precisamente abbiamo ottenuto la validità con i seguenti valori (7):

$$\eta(6) = 3\ 4 = 0{,}75, \quad \eta(12) = 0{,}48, \quad \eta(18) = 0{,}14, \quad \eta(30) = 0{,}17.$$

I teoremi A e B si ottengono come conseguenza di due teoremi, che diremo C^* e D^*, analoghi rispettivamente ai teoremi C e D, ove si sostituisca $\delta(a)$ con

$$\delta^*(a) = \frac{a}{\log a + \sum\limits_{p/a} \dfrac{\log p}{p-1} - (L_H + \beta - \alpha)} \tag{1.4}$$

e $\gamma(a, \varepsilon)$ con

$$\gamma^*(a, \varepsilon) = \tag{1.5}$$

$$= \frac{a}{\varepsilon(\log a + \sum\limits_{p/a} \dfrac{\log p}{p-1} + \alpha - L_H - H_r) - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon) \log (1-\varepsilon)},$$

essendo

$$H_r = (r-1)(\beta - \alpha) + \beta \sum_{s=1}^{r} 1/s - \log r \qquad r \geqq 1. \tag{1.6}$$

2. Dimostrazione del Lemma II.

Sia $p^\nu \leqq \xi < p^{\nu+1}$. È allora:

$$\nu = \nu(p, \xi) \leqq \frac{\log \xi}{\log p} < \nu + 1 \tag{2.1}$$

$$\frac{\xi}{p^h} = \left[\frac{\xi}{p^h}\right] + \varepsilon_h(p), \qquad (0 \leqq \varepsilon_h < 1;\ h = 1, 2 \ldots \nu).$$

(7) Nel nostro elenco comparisce anche $\eta(18)$ che non appare nell'enunciato del Teorema B. Di qui segue la validità del teorema A nel caso $a = 9$ e $a = 18$.

È evidente che:

$$\log \xi\,(!) = \sum_{p\leq\xi}\left[\frac{\xi}{p}\right]\log p + \sum_{p\leq\xi^{1/2}}\left[\frac{\xi}{p^2}\right]\log p + \ldots + \sum_{p\leq\xi^{1/\nu}}\left[\frac{\xi}{p^\nu}\right]\log p$$

$$= \sum_{p\leq\xi}\log p\left\{\left[\frac{\xi}{p}\right]+\left[\frac{\xi}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{\xi}{p^\nu}\right]\right\}$$

$$= \sum_{p\leq\xi}\log p\left\{\left(\frac{\xi}{p}-\varepsilon_1\right)+\left(\frac{\xi}{p^2}-\varepsilon_2\right)+\ldots+\left(\frac{\xi}{p^\nu}-\varepsilon_\nu\right)\right\}$$

$$= \xi\sum_{p<\xi}\frac{\log p}{p}\,\{1+1/p+\ldots+1/p^{\nu-1}\}\,-$$

$$-\sum_{p\leq\xi}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu)\log p$$

$$= \xi\,\Sigma_1 - \Sigma_2. \tag{2.2}$$

Valutiamo le somme Σ_1 e Σ_2 con i termini complementari del tipo $o\,(\xi)$ che ci sono sufficienti. È:

$$\Sigma_1 = \sum_{p\leq\xi}\frac{\log p}{p}\,\{1+1/p+1/p^2+\ldots\} - \sum_{p\leq\xi}\frac{\log p}{p^{\nu+1}}\,\{1+1/p+\ldots\}$$

$$= \sum_{p\leq\xi}\frac{\log p}{p-1} - \sum_{p\leq\xi}\frac{\log p}{p^\nu(p-1)} \qquad \nu\geqq 1$$

$$= \sum_{p\leq\xi}\frac{\log p}{p-1} - \sum_{p\leq\sqrt{\xi}}\frac{\log p}{p^\nu(p-1)} - \sum_{\sqrt{\xi}<p\leq\xi}\frac{\log p}{p^\nu(p-1)}$$

$$= \sum_{p\leq\xi}\frac{\log p}{p-1} - \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2}.$$

Teniamo conto che $p^{\nu+1}>\xi$, $1-1/p>\frac{1}{2}$; per la (I*) è allora:

$$\Sigma_{1,1}\leqq\frac{2}{\xi}\sum_{p\leq\sqrt{\xi}}\log p < \frac{2}{\xi}\beta\sqrt{\xi} = o(\xi).$$

La serie $\sum_{\leq n}\dfrac{\log n}{n(n-1)}$ è convergente; quindi, a maggior ragione

$$\Sigma_{1,2} = o(\xi).$$

Si conclude, per la somma Σ_1

$$\Sigma_1 = \sum_{p\leq\xi}\frac{\log p}{p-1} + o(\xi). \tag{2.3}$$

Veniamo a valutare Σ_2, che richiede considerazioni più elaborate.

$$\Sigma_2 = \sum_{p \leq \sqrt{\xi}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_\nu) \log p + \sum_{\sqrt{\xi} < p \leq \xi} \varepsilon_1 \log p$$

$$= \Sigma_{2,1} + \Sigma_{2,2}. \tag{2.4}$$

È, per la (2.1) e la (I*):

$$\Sigma_{2,1} \leq \sum_{p \leq \sqrt{\xi}} \nu \log p \leq \sum_{p \leq \sqrt{\xi}} \frac{\log \xi}{\log p} \cdot \log p = o(\xi).$$

Consideriamo ora $\Sigma_{2,2}$. Dividiamo l'intervallo $(\sqrt{\xi};\ \xi)$ negli intervalli parziali definiti nel modo seguente

$$I_h(n, v) \quad \frac{n\xi}{nh + v + 1} < p \leq \frac{n\xi}{nh + v}, \qquad (n = n(h);\ v = 0,\ 1 \dots n - 1).$$

È ovviamente, per ogni $p \in I_h(n, v)$:

$$\frac{v}{n} \leq \varepsilon_1 < \frac{v + 1}{n}.$$

Segue allora:

$$\frac{v}{n} \sum_{p \in I_h(n, v)} \log p \leq \sum_{p \in I_h(n, v)} \varepsilon_1 \log p < \frac{v + 1}{n} \sum_{p \in I_h(n, v)} \log p.$$

In base alla (I*) applicata all'intervallo $I_h(n, v)$ segue:

$$\left\{ \frac{\alpha v}{nh + v} - \frac{\beta v}{nh + v + 1} \right\} \xi < \sum_{p \in I_h(n,v)} \varepsilon_1 \log p < \left\{ \frac{\beta(v + 1)}{nh + v} - \frac{\alpha(v + 1)}{nh + v + 1} \right\} \xi.$$

Sommando rispetto a $v = 0,\ 1,\ 2, \dots n(h) - 1$, otteniamo, tenendo conto delle notazioni (1,3):

$$(\alpha S_h - \beta T_h)\xi < \sum_{v=0}^{n(h)-1} \sum_{p \in I_h(u, v)} \varepsilon_1 \log p < (\beta \bar{S}_h - \alpha \bar{T}_h)\xi.$$

Rimane da sommare rispetto ad $h = 1,\ 2, \dots H$, e, tenendo conto del contributo dell'intervallo $\sqrt{\xi} < p \leq \dfrac{\xi}{H + 1}$ soltanto a destra, e delle (1,2), si ottiene finalmente

$$\xi M_H < \Sigma_{2,2} < \xi L_H \tag{2.6}$$

Per la (2.4), tenendo conto di (2.5) e (2.6), si ha:

$$\xi M_H + o(\xi) < \Sigma_2 < \xi L_H + o(\xi). \tag{2.7}$$

Possiamo così ricavare una limitazione per $\log(\xi!)$ in base alle (2.3) e (2.7) introdotte in (2.2):

$$(2.8)\quad \xi \sum_{p\leq\xi} \frac{\log p}{p-1} - L_H\xi + o(\xi) < \log(\xi!) < \xi \sum_{p\leq\xi} \frac{\log p}{p-1} - M_H\xi + o(\xi).$$

D'altra parte, la formula elementare di STIRLING ci fornisce:

$$\log(\xi!) = \xi\log\xi - \xi + o(\xi).$$

Questa, unita alla (2.8), ci dà:

$$\log\xi + M_H - 1 + o(\xi) < \sum_{p\leq\xi} \frac{\log p}{p-1} < \log\xi + L_H - 1 + o(\xi)$$

e cioè il Lemma II.

3. Veniamo alla precisazione numerica del Lemma I.

Calcolo di $\mathrm{M_H}$. Si assume $H = 34$, $n(1) = 15$, $n(2) = 11$, $n(3) = 5$, $n(4) = n(5) = 4$, $n(6) = ... = n(11) = 3$, $n(12) = ... = n(34) = 2$.

$$\sum_{h=1}^{34} S_h > 8{,}63680856, \qquad \sum_{h=1}^{34} T_h < 8{,}29777790,$$

$$M_H > 0{,}219004, \qquad M_H + 1 > -0{,}780996.$$

Calcolo di $\mathrm{L_H}$. Si assume $H = 12$, $n(1) = 8$, $n(2) = 6$, $n(3) = 5$, $n(4) = n(5) = 4$, $n(6) = ... = n(11) = 3$, $n(12) = 2$.

$$\sum_{h=1}^{12} \bar{S}_h < 7{,}68919623, \qquad \sum_{h=1}^{12} \bar{T}_h > 7{,}22314720,$$

$$L_H < 0{,}648953, \qquad L_H - 1 < -0{,}351047.$$

4. Veniamo a dimostrare il Teorema C^*, modificando convenientemente la dimostrazione che figura nella Nota *a*) citata in (2).

Sia $0 < b < a$ e poniamo:

$$A(\xi) = (a+b)(2a+b)\dots([\xi]a+b).$$

La formula elementare di STIRLING ci fornisce:

$$(4.1)\qquad \log A(\xi) \geqq \xi\log\xi + (\log a - 1)\xi + o(\xi).$$

Denotiamo con $l(p)$ l'esponente della massima potenza di p che divide $A(\xi)$; allora è

$$\log A(\xi) = \sum_p l(p)\log p.$$

Per ogni $\omega \geqq 1$ denotiamo con $M_\omega(\xi)$ il numero dei divisori primi distinti di $A(\xi)$ maggiori di $\omega\xi$.

Il procedimento della Nota citata ci dà (vedi pag. 308):

$$\log A(\xi) \leqq \xi \left\{ \sum_{p \leqq \xi} \frac{\log p}{p-1} - \sum_{p/a} \frac{\log p}{p-1} \right\} + \{ \log \xi + O(1) \} \sum_{p \leqq \xi} 1 + \\ + \sum_{\xi < p \leqq \omega\xi} \log p + M_\omega(\xi) \{ \log \xi + O(1) \}$$

e, in base alle (I*), (II*), (1.1):

$$\log A(\xi) \leqq \xi \log \xi + \left\{ L_H - 1 + \beta - \alpha - \sum_{p/a} \frac{\log p}{p-1} + \omega\beta \right\} \xi + \\ + M_\omega(\xi) \{ \log \xi + O(1) \} + o(\xi).$$

Confrontando questa con la (4.1) e tenendo conto della posizione (1.4), si ottiene:

$$M_\omega(\xi) \geqq (a/\delta^*(a) - \omega\beta)\xi/\log \xi + o(\xi/\log \xi)$$

e quindi $\xi/\log \xi = O(M_\omega(\xi))$ tutte le volte che $\omega\beta < a/\delta^*(a)$.

Detto ora h il minimo intero primo con a e maggiore di $\delta^*(a)$, scegliamo ω in guisa da avere

$$a/\delta^*(a) > \omega\beta > a/h \quad (^8).$$

Al teorema C^* si perviene con la stessa semplice osservazione che chiude la Nota a) citata.

5. Veniamo a dimostrare il teorema D^* che procede in modo analogo alla dimostrazione del teorema D che si trova nella Nota b) citata in (2) (pag. 15 e seguenti).

Possiamo supporre che sia $a < b < 0$. Poniamo, per $\xi \geqq 1/\varepsilon$

$$A_\varepsilon(\xi) = \prod_{(1-\varepsilon)\xi < t \leqq \xi} at + b, \qquad t \text{ intero.}$$

Per la formula di Stirling si ha

$$\log A_\varepsilon(\xi) \geqq \varepsilon\xi \log \xi + \{ \varepsilon(\log a - 1) - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) \} \xi + o(\xi). \tag{5.1}$$

Sia r intero $\geqq 2$ e scegliamo ξ in guisa da avere $\xi \geqq ar^2/\varepsilon^2$. Detto $l(p)$ l'esponente della massima potenza di p che divide $A_\varepsilon(\xi)$, risulta

$$\log A_\varepsilon(\xi) = \sum_p l(p) \log p.$$

Sia $\omega > \varepsilon$ e denotiamo con $M'_\omega(\xi)$ il numero dei divisori primi distinti del prodotto $A_\varepsilon(\xi)$ maggiori di $\omega\xi$. Il procedimento della Nota citata dà (vedi pag. 16)

$$\log A_\varepsilon(\xi) = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_r + \Sigma_{r+1},$$

(8) Questa scelta è sempre possibile per $a \geqq 6$, essendo in tal caso $a/\delta^*(a) > \beta$.

dove

$$\Sigma_0 = M'_\omega(\xi) \{ \log \xi + O(1) \}$$

$$\Sigma_1 \leqq \sum_{\varepsilon\xi < p \leqq \omega\xi} \log p < (\omega\beta - \varepsilon\alpha)\xi$$

$$\Sigma_s \leqq \sum_{\frac{\varepsilon\xi}{s} < p \leqq \frac{\varepsilon\xi}{s-1}} \log p < s\left(\frac{\beta}{s-1} - \frac{\alpha}{s}\right)\varepsilon\xi$$

$$< \left(\beta - \alpha + \frac{\beta}{s-1}\right)\varepsilon\xi, \quad s = 2, 3, \dots r$$

$$\Sigma_{r+1} \leqq \varepsilon\xi \left\{ \sum_{p \leqq \frac{\varepsilon\xi}{r}} \frac{\log p}{p-1} - \sum_{p/a} \frac{\log p}{p-1} \right\} + \{ \log \xi + O(1) \} \sum_{p \leqq \frac{\varepsilon\xi}{r}} 1$$

$$< \varepsilon\xi \log \xi + \left\{ \log \frac{\varepsilon}{r} + L_H - 1 - \sum_{p/a} \frac{\log p}{p-1} + \frac{\beta}{r} \right\} \varepsilon\xi + o(\xi)$$

cioè, tenendo conto della posizione (1.6)

$$\log A(\xi) < \varepsilon\xi \log \xi + \left\{ \log \varepsilon + L_H - 1 - \alpha + H_r - \sum_{p/a} \frac{\log p}{p-1} \right\} \varepsilon\xi +$$
$$+ \beta\omega\xi + M'_\omega(\xi) \{ \log \xi + O(1) \} + o(\xi).$$

Dal confronto con la (5.1) segue, ricordando la (1.5)

$$M'_\omega(\xi) \geqq \left\{ \frac{a}{\gamma^*(a, \varepsilon)} - \omega\beta \right\} \frac{\xi}{\log \xi} + o\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right). \tag{5.2}$$

Diciamo h il minimo intero primo con a e maggiore di $\gamma^*(a, \varepsilon)$ e scegliamo ω in guisa tale che sia

$$a/\gamma^*(a, \varepsilon) > \omega\beta > a/h.$$

Dalla (5.2) si ottiene allora

$$\xi/\log \xi = O(M'_\omega(\xi))$$

e la dimostrazione del Teorema D^* si completa in modo analogo a quella del Teorema C^*.

6. Dimostrazione dei Teoremi A e B.

In base alla (1.4) si verifica subito che è

$$\delta^*(12) < 5. \qquad \delta^*(30) < 7.$$

Per il calcolo di H_r si assume $r = 6$ e si ottiene $H_6 < 0{,}745655$. Dalla (1.5) si ricava allora

$\gamma^*(6\,;\ 0{,}25) < 5$, $\gamma^*(12\,;\ 0{,}52) < 5$, $\gamma^*(18\,;\ 0{,}86) < 5$, $\gamma^*(30\,;\ 0{,}83) < 7$.