Bollettino Unione Matematica Italiana

Maria Pastori

Un'insidia nell'uso di coordinate generali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 72–79.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_72_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Un' insidia nell' uso di coordinate generali.

Nota di MARIA PASTORI (a Milano)

Sunto. - *Considerati, negli spazi euclidei, integrali di campo relativi a vettori o a tensori, si mette in evidenza la necessità che, pur facendo uso di coordinate curvilinee generali, si operi solo su componenti cartesiane, o, più in generale, su componenti secondo direzioni costanti. Si chiarisce il motivo di tale limitazione e si illustrano le considerazioni fatte con semplici esempi.*

In alcune questioni di Meccanica dell' ordinario spazio euclideo si presentano integrali di campo relativi a vettori. Basta pensare al risultante o al momento di una distribuzione continua di forze, oppure ad alcuni teoremi sulla trasformazione di integrali, conseguenza del lemma di GAUSS, come il teorema del gradiente e quello del rotore.

Nella deduzione delle equazioni indefinite per la meccanica dei sistemi continui si fa spesso uso di una estensione del teorema della divergenza (divergenza di un tensore doppio) che comporta pure due integrali di campo relativi a vettori.

Nei comuni trattati, per i concetti e i teoremi richiamati, si seguono in generale due indirizzi:

1°) se si fa uso di calcolo vettoriale, concetti e teoremi si considerano come assoluti, indipendenti da ogni riferimento;

2°) se si fa uso di calcolo tensoriale, si indica spesso la necessità, o quanto meno l' opportunità, di far uso di riferimenti cartesiani.

Il primo indirizzo può indurre in errore chi pensi di poter passare alle componenti, senza limitazione alcuna. Si accorgerebbe subito (come verrà mostrato con semplici esempi) che, per componenti covarianti o controvarianti, l' annullamento dell' integrale non ha carattere assoluto e i teoremi non sono validi in generale.

Il secondo indirizzo può destare, a prima vista, sorpresa, specie per quel che riguarda i teoremi sulla trasformazione di integrali. Come mai l' analisi tensoriale, avvezza alle più ampie generalità in fatto di coordinate, pone delle limitazioni che l' analisi comune non esige nel calcolo di integrali di campo? La ragione è che si può benissimo far uso di coordinate curvilinee nel calcolo di detti integrali, purchè si prendano le *componenti* cartesiane dei vettori.

Se invece si calcolano gli integrali per le componenti covarianti o controvarianti dei vettori, non si ottengono componenti di vettori, ma solo sistemi di funzioni.

Poichè in generale non si insiste sulla distinzione tra coordinate e componenti, nè forse si mette in evidenza la ragione del privilegio delle componenti cartesiane, non credo inutile illustrare le precedenti affermazioni, con mire, si intende, puramente didattiche.

1. Somme di vettori definiti in diversi punti dello spazio.

Per calcolare il risultante e il momento di una distribuzione continua di forze, si debbono sommare, per poi passare al limite, vettori definiti in diversi punti dello spazio. Un esempio tipico si ha nella ricerca del peso di un corpo (risultante) o del suo baricentro (momento). Poichè la somma viene definita come operazione locale, si ammette implicitamente che sia possibile trasportare un vettore da un punto ad un altro senza che esso subisca modificazioni per il trasporto. Questo vale infatti per i vettori degli spazi euclidei, ma non per ogni sorta di componenti di detti vettori, bensì solo per le componenti cartesiane. Sono infatti soltanto queste che rimangono inalterate per il trasporto, ciò che si traduce analiticamente nel fatto che soltanto per esse la derivazione covariante coincide con la derivazione ordinaria.

Del resto, la natura di tensore semplice di cui gode un vettore è pure definita con una legge di trasformazione di coordinate di carattere locale. Essa è la legge di covarianza

$$\bar{V}_i = V_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \qquad (i, j, \dots = 1, 2, 3) \tag{1}$$

o di controvarianza

$$\bar{V}^i = V^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \tag{2}$$

dove V_j (V^j) sono le componenti covarianti (controvarianti) rispetto alle coordinate x^j e $\overline{V}_i$ ($\overline{V}^i$) quelle rispetto a nuove coordinate $\overline{x}^i$, e si sottointende il simbolo di sommatoria rispetto agli indici ripetuti. I coefficienti dei secondi membri variano in generale da punto a punto, a meno che si tratti di un passaggio da coordinate cartesiane a coordinate cartesiane. In generale dunque da due relazioni come la (1) o come la (2) non è lecito passare ad una relazione analoga per il vettore somma, se gli addendi sono definiti in punti diversi, a meno che non si tratti di coordinate cartesiane. È questo dunque il solo caso in cui la natura di tensore semplice del vettore somma viene verificata anche per vettori addendi definiti in punti diversi [1].

Anche a prescindere da queste considerazioni, si pensi al seguente semplice esempio. Si abbia una distribuzione continua di forze definita sopra una semisuperficie sferica e si supponga, per fissare le idee, che il cerchio massimo che la limita sia posto in un piano orizzontale. Le forze siano delle attrazioni elastiche verso l'asse di simmetria (raggio verticale), quindi tutte orizzontali, volte verso l'asse e proporzionali alla distanza tra i punti della superficie e l'asse. Il loro risultante è evidentemente nullo. Ma non è nulla la risultante delle componenti di queste forze secondo i raggi della sfera considerata, componenti che si presenterebbero se ci si riferisse a coordinate polari con polo nel centro della sfera. I raggi sarebbero in questo caso linee coordinate, che, pur essendo rette, variano di direzione da punto a punto, mentre per avere risultante nullo bisogna invece considerare le componenti secondo direzioni costanti.

Le considerazioni precedenti vanno tenute presenti in questioni di meccanica della superficie. Per superficie curve, può avere interesse dare forma intrinseca alle equazioni, riferendosi a coordinate curvilinee superficiali e alle componenti (covarianti o controvarianti) secondo queste coordinate; ma se si estendessero gli integrali di campo a tali componenti, non si otterrebbero le componenti di vettori o tensori.

2. Il teorema della divergenza.

Fra le conseguenze del lemma di GAUSS sulla trasformazione di integrali, quella più frequentemente usata è il teorema della divergenza, che, in condizioni di regolarità e con notazioni evi-

(1) Cfr. J. L. SYNGE and A. SCHILD, *Tensor calculus*, « Toronto - Mathematical Expositions », N. 5, 2ª Ed., 1952, p. 158.

denti, si scrive:

$$\int_\tau \operatorname{div} V\, d\tau = -\int_\sigma V \times n\, d\sigma. \tag{3}$$

Ordinariamente la (3) viene scritta, con notazioni tensoriali, così:

$$\int_\tau V_i{}^{|i} d\tau = -\int_\sigma V_i n^i d\sigma. \tag{3'}$$

La (3') vale con riferimento qualunque, perchè le funzioni integrande non sono in questo caso vettori, bensì scalari invarianti, e non è quindi a questo teorema che si riferiscono le considerazioni precedenti.

Si consideri invece il caso in cui viene sostituito al tensore semplice V_i un tensore doppio T_{ik}. Spesso il teorema corrispondente si scrive

$$\int_\tau T_{ik}{}^{|k} d\tau = -\int_\sigma T_{ik} n^k d\sigma \tag{3''}$$

Ma è facile verificare che, se si prendono le componenti cartesiane del tensore T_{ik} e del versore n^k, normale interna al contorno del campo, la (3'') è verificata anche se gli integrali si calcolano in coordinate curvilinee, mentre se si opera sulle componenti covarianti T_{ik} del tensore e controvarianti n^k del vettore, la (3'') non è sempre verificata.

Una constatazione immediata si può fare nel seguente caso particolare, in cui per semplicità si sostituisce al campo tridimensionale τ un campo piano, e precisamente un cerchio, che supponiamo con centro nell'origine e raggio R. Nell'interno del cerchio e sulla circonferenza contorno sia definito un tensore doppio, simmetrico, costante, le cui componenti cartesiane siano:

$$Y_{11} = a, \qquad Y_{12} = Y_{21} = b, \qquad Y_{22} = c. \tag{4}$$

(a, b, c, costanti).

La divergenza di questo tensore è evidentemente nulla, e quindi il primo membro della (3'') è zero, sia per componenti cartesiane, sia per componenti covarianti e controvarianti generali, polari per esempio. Calcoliamo ora il secondo membro. Per componenti cartesiane si ha:

$$(5)\qquad -\int_l (Y_{11}n^1 + Y_{12}n^2)dl = \int_0^{2\pi} (a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta)Rd\theta = 0$$

$$(5')\qquad -\int_l (Y_{21}n^1 + Y_{22}n^2)dl = \int_0^{2\pi} (b\cos\theta + c\,\mathrm{sen}\,\theta)Rd\theta = 0.$$

Per le componenti convarianti polari del tensore (4) si ha:

$$(6)\qquad \begin{cases} T_{11} = Y_{ij}\dfrac{\partial y_i}{\partial\rho}\dfrac{\partial y_j}{\partial\rho} = a\cos^2\theta + 2b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + c\,\mathrm{sen}^2\theta \\[2ex] T_{12} = T_{21} = Y_{ij}\dfrac{\partial y_i}{\partial\rho}\dfrac{\partial y_j}{\partial\theta} = (c-a)\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + b\rho(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) \\[2ex] T_{22} = Y_{ij}\dfrac{\partial y_i}{\partial\theta}\dfrac{\partial y_j}{\partial\theta} = \rho^2(a\,\mathrm{sen}^2\theta + c\cos^2\theta) - 2b\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Per le componenti controvarianti polari del versore normale al contorno si ha:

$$n^1 = -1, \qquad n^2 = 0$$

e quindi

$$(7)\qquad -\int_l (T_{11}n^1 + T_{12}n^2)dl = \int_0^{2\pi} (a\cos^2\theta + b\,\mathrm{sen}\,2\theta + c\,\mathrm{sen}^2\theta)Rd\theta \neq 0$$

L'analogo integrale per la componente $T_{21}n^1 + T_{22}n^2$ si annulla in questo caso. Ma basterebbe abbandonare l'ipotesi della simmetria del tensore per avere anche per essa un integrale diverso da zero.

3. Le equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui.

Del teorema ora ricordato si fa spesso uso per la deduzione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. Lo richiamo brevemente nel caso dell'equilibrio.

Se τ' è una qualunque porzione del sistema considerato, $\boldsymbol{F}$ sono le forze esterne per unità di volume distribuite in tale porzione, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{p}_k n^k$ gli sforzi che si esercitano sul contorno σ' della porzione stessa, si ha, annullando il risultante di tutte le forze:

$$\int_{\tau'} \boldsymbol{F} d\tau' + \int_{\sigma'} \boldsymbol{p}_k n^k d\sigma' = 0. \tag{8}$$

Questa relazione si scrive spesso, con notazioni tensoriali, nel modo seguente:

$$\int_{\tau'} F_i d\tau' + \int_{\sigma'} p_{ki} n^k d\sigma' = 0. \tag{8'}$$

E, per la (3″), si ha da essa:

$$\int (F_i - p_{ki}{}^{|k}) d\tau' = 0. \tag{9}$$

Poichè questa relazione deve aver luogo qualunque sia la porzione τ' si ha:

$$p_{ki}{}^{|k} = F_i\,; \tag{10}$$

queste sono appunto le equazioni di equilibrio del sistema continuo. L'annullarsi del momento porta poi alla simmetria $p_{ik} = p_{ki}$ del tensore degli sforzi.

La (10) è valida per qualunque sistema di riferimento e per componenti covarianti (controvarianti o miste) dei tensori che vi figurano. Ma la deduzione di essa mediante la (8′) e la (9) è errata se non si opera sulle componenti cartesiane dei vettori che vanno integrati. Soltanto dopo essere arrivati ad una relazione di carattere locale, come la (10), si può riferire tale relazione a componenti generali di vettori e tensori.

Se si conservano le notazioni vettoriali, si ha, in luogo della (9):

$$\int_{\tau'} (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{p}_k{}^{|k}) d\tau' = 0$$

e conseguentemente si ottiene:

$$\boldsymbol{p}_k{}^{|k} = \boldsymbol{F}, \tag{10'}$$

che, per componenti covarianti coincide con la (10). Sotto questa forma la dimostrazione non è errata, purchè il passaggio a componenti covarianti o controvarianti si faccia solo per la relazione (10′) di carattere locale.

Naturalmente è anche possibile, per quanto meno semplice, evitare questi accorgimenti ed operare sempre con componenti generali; ma allora bisogna negli integrali della (8′) sostituire ai vettori degli invarianti, così che la conseguente trasformazione di integrali sia del tipo (3′) e non del tipo (3″). Negli spazi euclidei, dove esistono quantisivogliano vettori costanti, (a derivato tensoriale nullo) ciò si può fare nel modo seguente ([2]). Essendo λ^i le componenti controvarianti di uno di tali vettori, dalla (8′) si deduce:

$$\int_{\tau'} F_i \lambda^i d\tau' + \int_{\sigma'} p_{ki} n^k \lambda^i d\sigma' = 0 \tag{11}$$

(il che equivale a proiettare sopra una direzione costante). Posto allora $p_{ki}\lambda^i = q_k$, si ha per il secondo integrale:

$$\int_{\sigma'} q_k n^k d\sigma' = -\int_{\tau'} q_k{}^{|k} d\tau' = -\int_{\tau'} p_{ki}{}^{|k} \lambda^i d\tau'$$

l'ultima trasformazione conseguendo dal fatto che $\lambda^{i|k} = 0$. La (9) diviene allora:

$$\int_{\tau'} (F_i - p_{ki}{}^{|k}) \lambda^i d\tau' = 0. \tag{11′}$$

Ma poichè questa relazione deve aver luogo per τ' arbitrario e per λ^i pure arbitrario, ne viene la (10).

4. Il teorema del gradiente e del rotore.

Naturalmente le considerazioni fatte al n. 2 si possono ripetere anche per i teoremi del gradiente e del rotore. Ma, poichè essi sono meno usati del teorema della divergenza, accennerò solo brevemente al primo. Esso si scrive, per una funzione f, regolare in τ e sul contorno σ,

$$\int_{\tau} \operatorname{grad} f \, d\tau = -\int_{\sigma} f \, \boldsymbol{n} \, d\sigma \tag{12}$$

o, ordinariamente con notazioni tensoriali:

$$\int_{\tau} f_{|i} d\tau = -\int_{\sigma} f n_i d\sigma. \tag{12′}$$

Se, per semplicità, ci si limita al campo piano considerato nell'esempio del n. 2, basta porre ad esempio

$$f = x^2 = \rho^2 \cos^2 \theta$$

per verificare che la formola corrispondente alla (12′) è verificata

([2]) Cfr. I. S. Sokolnikoff, *Tensor Analysis - Theory and Applications*, New York, London, 1951, p. 308.

per le componenti cartesiane

$$f_{|1} = 2x = 2\rho \cos \theta, \qquad n_1 = -\cos \theta$$

e non per le componenti covarianti polari

$$f_{|1} = 2\rho \cos^2 \theta, \qquad n_1 = -1.$$

Nel primo caso infatti i due membri della formola corrispondente alla (12') si annullano, nel secondo caso, il primo membro dà $\frac{2}{3}\pi R^3$, il secondo πR^3

5. Integrali relativi a tensori. - Cenno agli spazi riemanniani.

Le considerazioni fatte al n. 1, relative a vettori (tensori semplici) valgono inalterate per i tensori multipli, e quindi le limitazioni messe in evidenza valgono per gli integrali relativi.

Così il teorema della divergenza come (3'') si può applicare a un tensore multiplo, purchè si operi sulle componenti cartesiane di un tale tensore, o se ne facciano proiezioni su direzioni costanti.

Naturalmente questa possibilità è solo degli spazi euclidei e quindi non è possibile estendere a spazi riemanniani i teoremi sulla trasformazione di integrali nella forma consueta. Si pensi del resto che, volendo eseguire somme di vettori o tensori definiti in diversi punti dello spazio, essi si dovrebbero trasportare per equipollenza (parallelismo) e che tale trasporto non è univocamente determinato, bensì dipendente dalla linea di trasporto.

Bisogna quindi, per dare alle operazioni significato univoco, trasformare le funzioni integrande in scalari invarianti (o densità scalari).

È ciò che si fa per i tensori emisimmetrici, ottenendo delle estensioni sulle trasformazioni di integrali che contengono contemporaneamente sia il teorema della divergenza, sia il teorema di STOKES (3). Ciò si può anche fare mediante l'introduzione delle forme differenziali esterne e degli invarianti integrali di POINCARÉ (4).

Naturalmente si possono sempre integrare i sistemi di funzioni che costituiscono le componenti generali di un tensore, ma il risultato dell'integrazione non dà le componenti di un tensore.

(3) V. SYNGE and SCHILD, Loco cit., p. 269 e p. 275.

(4) V. H. POINCARÉ, *Sur les résidus des intégrales doubles*, « Acta Mathematica », Vol. 9, 1887, pp. 323-337.