Bruno Faleschini

Sulle definizioni e proprietà delle funzioni a variazione limitata di due variabili. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 80–92.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_80_0>

Sulle definizioni e proprietà delle funzioni a variazione limitata di due variabili. (Nota I)

Nota di BRUNO FALESCHINI (a Milano)

Sunto. - *Le definizioni di funzione a variazione limitata di due variabili vengono classificate in base alle loro proprietà comuni nelle seguenti sezioni:*

SEZ. I. - *Funzioni a variazioni lineari sommabili o soggette ad altre condizioni particolari.* (*Classi:* $T, \bar{T}, T^*, T_\theta, T_\varphi, ..$).

SEZ. II. - *Funzioni a oscillazione totale limitata.* (*Classi:* P, P^β).

SEZ. III. - *Combinazioni lineari di funzioni monotone.* (*Classi:* $A, \bar{A}, A^*, J_{xy}, J_s, ...$).

SEZ. IV. - *Funzioni a variazione rettangolare limitata.* (*Classi:* $H, V, F^*, F, ...$).

Introduzione.

Il concetto di funzione a variazione limitata, introdotto da CAMILLE JORDAN nel 1881 nello studio delle serie di FOURIER e successivamente in quello della rettificazione di una curva, è divenuto fondamentale nella teoria delle funzioni reali. Si è quindi presentato il problema di estendere alle funzioni di più variabili i risultati ottenuti per le funzioni di una variabile; i tentativi in questo senso sono stati numerosi.

Secondo la denominazione di JORDAN [1], una funzione reale $f(x)$ definita in un intervallo $I[a \leq x \leq b]$, è a variazione limitata in I quando l'insieme numerico descritto dalle somme:

$$\sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | ,$$

è limitato al variare del numero naturale n e dei punti x_i tali che: $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$.

Due proprietà fondamentali di queste funzioni sono:

1) La combinazione lineare di due funzioni monotone è una funzione a variazione limitata, (C. JORDAN);

2) Ogni funzione a variazione limitata ammette quasi ovunque derivata finita (H. LEBESGUE).

(1) *Sur la série de Fourier*, « C. R. Acad. Sci. Paris », t. 92, (1881), pp. 228-230. Sono formalmente diverse le definizioni di E. STUDY, *Über eine besondere Klasse von Funktionen einer reellen Veränderlichen*, « Math. Ann. », 47, (1896), pp. 299-316; W. H. YOUNG, *On functions of bounded variation*, « Quart. J. London », 42, (1910-11), pp. 54-85; R. L. JEFFERY, *Functions defined by sequences of integrals and the inversion of approximate derived numbers*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 41, (1937), pp. 171-192; S. FAEDO, memoria riportata in questa nota con il numero [56] nella bibliografia sulle funzioni a variazione limitata di due variabili. Più generale è invece la definizione di L. C. YOUNG [84] che comprende la definizione data da N. WIENER in *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*. « J. Math. Physics, » 3, (1924), pp 73-94.

La prima di questa proprietà, che è caratteristica per le funzioni a variazione limitata, ha importanza nell'Analisi, per il fatto che possono essere estese alla classe più ampia di funzioni a variazione limitata, diverse proprietà delle funzioni monotone.

Il problema di ottenere analoghi risultati per le funzioni di due variabili, si riallaccia alle diverse definizioni di funzioni monotone nel piano.

La seconda proprietà è strettamente connessa al problema della rettificazione di una curva continua. I tentativi di risolvere il corrispondente problema della quadratura di una superficie (nel senso di LEBESQUE o secondo altri criteri di valutazione dell'area della superficie) hanno dato luogo a numerose definizioni di funzioni a variazione limitata di due variabili.

C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON, in una nota pubblicata nel 1933, *On definitions of bounded variation for functions of two variables* (2), confrontano le definizioni di VITALI (V), FRÉCHET (F), HARDY e KRAUSE (H), ARZELÀ (A), HAHN e PIERPONT (P), TONELLI (T); nella nota successiva, *Properties of functions* f(x, y) *of bounded variation* (3), viene aggiunta una definizione di GERGEN e MORREY ($\overline{T}$) ed una di ADAMS e CLARKSON (F^*). Nel 1942 in una conferenza *Su alcuni concetti dell'Analisi Moderna* (4), LEONIDA TONELLI espone i risultati più notevoli sino allora conseguiti in questo campo.

Vi sono numerosi lavori più recenti sulle estensioni del concetto di funzione a variazione limitata e sullo studio delle proprietà di queste classi di funzioni.

Nella presente nota, le numerose definizioni con le proprietà più importanti sono raggruppate secondo alcune caratteristiche principali. Vengono aggiunte le notizie bibliografiche, che sono ordinate secondo gli argomenti trattati, in quattro sezioni.

Il primo gruppo di definizioni è caratterizzato dall'integrabilità delle variazioni lineari o da altre condizioni particolari cui esse debbono soddisfare. Alle definizioni di L. TONELLI e C. B. MORREY vengono aggiunte quelle di C. MIRANDA e le più recenti di L. CESARI e L. GIULIANO. È notevole l'impiego del concetto di funzione di due variabili a variazione limitata secondo le definizioni di questa sezione, nel problema della quadratura di una superficie e nei criteri di convergenza riguardanti le serie doppie di FOURIER. (Sez. I).

(2) « Trans. Amer. Math. Soc. », v. 35, pp. 824-854.

(3) « Trans. Amer. Math. Soc. » v. 36, (1934), pp. 711-730. Le due note di Adams e Clarkson vengono qui contrassegnate con (A. C. 1), (A. C. 2).

(4) « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa », s. 2, v. 11, pp. 107-118.

Viene poi esteso il concetto di funzione a oscillazione totale limitata dato da E. STUDY per le funzioni di una variabile ([1]) e vengono considerate in questa sezione le funzioni a variazione limitata secondo H. HAHN. (Sez. II).

Il secondo gruppo comprende diverse definzioni di funzioni monotone, incluse in quella più generale di H. LEBESGUE. Con combinazioni lineari di funzioni monotone, si ottengono oltre alle definizioni di funzione a variazione limitata secondo C. ARZELÀ ed E. W. HOBSON, quelle più recenti di G. B. PRICE e di R. CONTI. (Sez. III).

Ponendo inoltre delle condizioni sull' operatore differenza ret tangolare, si ottengono le definizioni di J. H. KRAUSE e G. H. HARDY, G. VITALI, M. FRÉCHET, C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON e più recenti, quelle di S. FAEDO, R. L. JEFFERY, M. S. MACPHAIL, M. MORSE e W. TRANSUE, L. C. YOUNG, B. PINI. (Sez. IV).

Le definizioni di questo gruppo hanno importanza sopratutto nello studio di alcuni criteri di convergenza per serie e sono fondamentali nell' analisi delle serie multiple di FOURIER.

Ricorrono spesso nei lavori su questo argomento le seguenti notazioni: sia $f(x, y)$ una funzione reale della variabile puntuale (x, y) definita in un dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$ del piano; si denota con

$$V_x(b, y_0) \text{ oppure con } V_a{}^b(y_0) \text{ o semplicemente con } V_x(y_0)$$

la variazione totale della funzione $f(x, y_0)$, calcolata al variare della sola x nell'intervallo lineare $I_x(a \leq x \leq b)$, e con $P_x(b, y_0)$. $N_x(b, y_0)$ le variazioni lineari positive e negative ([5]).

SEZ. I. – *Funzioni a variazioni lineari sommabili o soggette ad altre condizioni particolari.*

1. Definizioni.

Una funzione $f(x, y)$ è a variazione limitata secondo L. TONELLI (T) [28] in un dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$ quando:

1) scelta una retta t di equazione $x = x_0$ $(y = y_0)$,

2) determinato il segmento $\sigma = R \cap t$,

3) calcolata la variazione totale lineare V_t della funzione f su σ,

4) risulta definita in un intervallo lineare I_s, al variare delle rette parallele a t, la funzione $V_t(s)$ ivi sommabile ([6]).

([5]) Cfr. (A. C. 2.) pp. 724; in (A. C. 1) compaiono Φ, Ψ, in luogo di V_x, V_y.

([6]) Nel senso di LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, ed. Gauthier, Parigi 1904 (nuova ristampa 1950). La

Si ottengono definizioni più generali sostituendo le quattro condizioni precedenti, con una o più tra le corrispondenti condizioni:

1′) posto:

$$x' = \quad x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta,$$
$$y' = -x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

sia t una retta di equazione $x' = x'_0$ $(y' = y'_0)$: C. MIRANDA [21];

2′) detto E un insieme di punti di R, di misura superficiale nulla, sia σ l'insieme lineare $(R - E) \cap t$: L. CESARI [7];

3′) detta v_t la variazione totale lineare della funzione f su σ, indicando con $\varphi(z)$ una funzione reale continua e crescente nello intervallo $(0 \leq z \leq \infty)$ e tale che $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{z \to \infty} \varphi(z) = \infty$, sia $V_t = \varphi(v_t)$: L. GIULIANO [12];

4′) risulta definita in un intervallo lineare I_s, al variare delle rette parallele a t, la funzione $V_t(s)$ superiormente limitata da una funzione sommabile nello stesso intervallo: G. B. MORREY [23].

C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON [7] denotano con T la classe di funzioni che verificano le condizioni 1, 2, 3, 4′). Le funzioni che verificano le condizioni 1, 2′, 3, 4) vengono chiamate da L. TONELLI « generalmente a variazione limitata » (T^*). Quelle che verificano le condizioni 1′, 2, 3, 4) sono qui indicate con T_θ e quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ sono chiamate a « variazione diagonale limitata » da C. MIRANDA. Si indicano inoltre con T_φ quelle funzioni che verificano le condizioni 1, 2, 3′, 4) e in particolare con T_α quelle che si ottengono ponendo nella 3′) $\varphi(z) = z^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

In alcuni casi particolari, in luogo della condizione 4) della definizione di TONELLI, sono state esaminate le condizioni più o meno restrittive per cui le variazioni lineari totali sono finite, o limitate, o integrabili BRIEMANN, o a variazione limitata, o misurabili, ecc. nei rispettivi intervalli in cui sono definite.

2. Relazioni tra classi.

Tra le classi T, $\overline{T}$, T^*, T_θ, T_φ si stabiliscono le seguenti relazioni:

$$\overline{T} \cap T_\varphi = T.$$
$$\overline{T},\ T^*,\ T_\theta.\ T_\varphi \supset T.$$

sommabilità delle variazioni lineari implica per definizione che esse siano misurabili e quasi ovunque finite (Lebesgue) e quasi continue (Tonelli) nei rispettivi intervalli di definizione; cfr. L. TONELLI, *Sulla nozione di Integrale*, « Ann. di Mat. Pura e Appl. », (4) 1, (1923), pp. 105-145.

[7] Cfr. (A. C. 2) pp. 712; si veda inoltre J. J. GERGEN [9].

Nella prima, se $f(x, y) \in T_\varphi$, allora la funzione $\varphi[v_t(s)]$ e quindi $v_t(s)$ è misurabile nell'intervallo I_s e poichè $f \in \overline{T}$, $v_t(s)$ è sommabile.

Le seconde relazioni si ottengono immediatamente dalle definizioni e seguono per gli esempi che vengono ora citati. Si hanno infatti le seguenti relazioni di appartenenza:

Esiste $\quad f \in T_\varphi - (\overline{T} \cup T^* \cup T_\theta)$, [8]

Esiste $\quad f \in T^* - (\overline{T} \cup T_\varphi \cup T_\theta)$,

tale è ad esempio una funzione che assume il valore ∞ sul contorno di R ed è nulla internamente.

Esiste $\quad f \in (T^* \cap T_\varphi) - T_\theta$, [9]

Esiste $\quad f \in (T^* \cap \overline{T}) - T_\theta$, [10]

Esiste $\quad f \in (T^* \cap \overline{T} \cap T_\theta) - T$,

ad esempio, $f(x, y)$ sia definita nel quadrato di estremi (0, 0), (2, 2) come funzione caratteristica dell'insieme H [10] posto sul segmento di estremi (0, 1), (1, 0) e dell'insieme complementare di H posto sul segmento di estremi (1, 2), (2. 1).

Esiste $\quad f \in (T^* \cap T_\theta) - (\overline{T} \cup T_\varphi)$ [11].

Rimane da provare che esistono funzioni $f \in (T^* \cup T_\varphi \cup T_\theta) - T$, la cui costruzione effettiva è alquanto laboriosa [12].

(8) L. Giuliano [12].

(9) L. Cesari [7].

(10) Cfr. (A. C. 1.) esempio (*D*); $f(x, y)$, è definita nel quadrato unità, come funzione caratteristica di un insieme lineare H non misurabile, posto su una delle diagonali.

(11) Cfr. (A. C. 2) p. 726; $f(x, y)$ è definita nel quadrato unità, come funzione caratteristica di un insieme E di punti (x, y) per i quali x ed y espressi in rappresentazione ternaria, mancano rispettivamente delle cifre 2 o 1; posto $\xi = \frac{x-y}{2}$, $\eta = \frac{x+y}{2}$, $f(\eta + \xi, \xi - \eta) \varepsilon T_\theta$ ma non appartiene a $(\overline{T} \cup T_\varphi)$ perchè le sue variazioni lineari rispetto agli assi ξ, η non sono quasi ovunque finite; $f \varepsilon T^*$, cfr. L. Cesari [7].

(12) Ad esempio, ricorrendo all'insieme E definito nella nota precedente, si deve indicare un procedimento per eliminare un sottoinsieme di punti di E, in modo tale da ottenere una funzione caratteristica dell'insieme risultante, le cui variazioni lineari siano sommabili solamente se elevate ad un esponente $\alpha < 1$.

Non si conoscono funzioni che appartengano ad una delle classi:

$$\overline{T} - (T^* \cup T_\varphi \cup T_\theta)\,; \qquad T_\theta - (T^* \cup T_\varphi \cup \overline{T})\,;$$
$$(\overline{T} \cap T_\theta) - T^*\,; \qquad (T_\varphi \cap T_\theta) - T^*\,;$$

si osserva che queste classi, per quanto sarà detto nel numero seguente, se non sono vuote, contengono solamente funzioni non misurabili superficialmente. La non misurabilità non esclude il fatto che la funzione possa essere a variazione limitata; si può anzi costruire una funzione che ha variazioni lineari costanti e non è misurabile in un dominio rettangolare.

W. Sierpinski [13] ha dimostrato che esiste un insieme di punti non misurabile e tale che ogni retta parallela agli assi, lo incontra al più in due punti.

Detto E questo insieme, sia:

E_1 l'insieme di punti di maggiore ascissa, tra le coppie di punti di E che hanno uguale ordinata,

E_1' l'insieme di punti di maggiore ordinata, tra le coppie di punti di E_1 che hanno uguale ascissa,

E_2 l'insieme di punti di maggiore ordinata, tra le coppie rimanenti di punti di E che hanno uguale ascissa.

Posto: $E_1'' = E_1 - E_1'$, $E_3 = E - (E_1 \cup E_2)$, almeno uno degli insiemi E_1', E_1'', E_2, E_3 non è misurabile. Se G è un tale insieme e lo si suppone contenuto nel quadrato di estremi $(0, 0)$, $(1/2, 1/2)$, si consideri l'insieme G', simmetrico di G rispetto alla diagonale di estremi $(0, 1)$, $(1, 0)$; sia inoltre G_d l'insieme di punti della stessa diagonale, che non sono proiezioni di G secondo gli assi x, y.

La funzione $f(x, y)$, definita nel quadrato unità come funzione caratteristica dell'insieme $K = (G \cup G' \cup G_d)$, ha variazioni lineari $V_x(y)$, $V_y(x)$, che sono identicamente costanti nei rispettivi intervalli di definizione.

Infatti, considerando i valori delle ordinate y dei punti di K come funzioni delle x, si ottiene una funzione biunivoca, definita in tutto l'intervallo $(0, 1)$, il cui grafico è un insieme non misurabile.

Sullo studio delle relazioni tra le classi più generali $\overline{T}_\varphi$, T_φ^*, ..., $\overline{T}^*_{\varphi\theta}$ [14] è sufficiente fare notare che sussistono relazioni del tipo:

$$\overline{T}_\varphi \supset (\overline{T} \cup T_\varphi).$$

[13] *Sur un problème concernant les ensembles misurables superficiellement*, « Fund. Math. » 1, (1920), pp. 112-115.

[14] $f \in \overline{T}_\varphi$ quando sono verificate le condizioni 1, 2, 3', 4') del numero precedente. Con le 4 condizioni della definizione di Tonelli e le 4 condizioni più generali si ottengono in modo analogo 16 definizioni distinte.

Infatti, se $f_1 \in T_\varphi - \overline{T}$ (8) nel quadrato di estremi (0, 0), (1, 1) ed è nulla altrove nel quadrato di estremi (0, 0), (2, 2) e se $f_2 \in \overline{T} - T_\varphi$ (10) nel quadrato di estremi (1, 1), (2, 2) ed è nulla altrove nel quadrato di estremi (0, 0), (2, 2), allora in questo ultimo si ha che $(f_1 + f_2) \in \overline{T}_\varphi - (T \cup T_\varphi)$.

3. Sottoclassi di funzioni misurabili, di Baire e continue.

Funzioni misurabili (M).

1) Ogni funzione $f(x, y) \in M \cap T_\alpha{}^*$ è quasi ovunque asintoticamente differenziabile e anzi « quasi lipschitziana » (secondo GIULIANO) in R (15).

2) Se una funzione $f(x, y)$ è sommabile in R e la sua variazione lineare — calcolata in una direzione qualsiasi senza tenere conto dei valori che la funzione assume in un insieme di misura nulla di R — è quasi ovunque finita, allora la variazione lineare, così calcolata, è misurabile in ogni intervallo in cui è definita (16).

3) Poichè ogni funzione $f(x, y) \in M \cap \overline{T}_\theta{}^*$ è sommabile in R, risulta:

$$M \cap \overline{T}_\theta{}^* = M \cap T^* \text{ (16)}.$$

Funzioni di BAIRE (B).

4) Se $f(x, y)$ è una funzione di BAIRE in R, allora le variazioni lineari $V_x(y)$, $V_y(x)$, sono misurabili nei rispettivi intervalli (a, b), (c, d) (17).

In particolare risulta:

$$\overline{T} \cap B = T \cap B.$$

5) Se la funzione $f(x, y) \in T \cap B$, allora le derivate parziali prime sono quasi ovunque finite e sono sommabili in R (18).

(15) L. GIULIANO [12]. Per la definizione di differenziale asintotico, cfr. W. STEPANOFF, *Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale*, « Rec. Math. », 32, (1924), 511-526. Per le $M \cap \overline{T}$, la differenziabilità asintotica era stata dimostrata in (A. C. 2) pp. 723; cfr. pure, *A correction to Properties of functions* f(x, y) *of bounded variation*, degli stessi autori, in « Trans. Amer. Math. Soc. », v. 46, (1939), p. 468. Cfr. inoltre L. GIULIANO [10] per le $f \in M \cap T^*$, J. C. BURKILL e U. S. HASLAM-JONES [3] per le $f \in M \cap T$.

(16) L. CESARI [6].

(17) D. MONTGOMERY, *Properties of plane sets and functions of two variables*, « Amer. J. Math. » 56, (1934), pp. 569-586.

(18) È una conseguenza della misurabilità delle derivate parziali di una funzione di Baire; si veda la nota (15) sulla correzione del teorema 18 in (A. C. 2), p. 723.

Funzioni continue (C).

6) Sussistono le relazioni:

$$T^* \cap C = T \cap C \quad \text{ed in particolare} \quad T_\theta \cap C = T \cap C \text{ (}^{19}\text{)}.$$

Sono a variazione limitata secondo TONELLI ($T \cap C$) le funzioni lipschitziane e uniformemente lipschitziane, le funzioni assolutamente continue secondo TONELLI e secondo L. C. YOUNG, le funzioni $f(x, y)$ rappresentazione cartesiana di una superficie quadrabile nel senso di LEBESGUE ([20]).

Le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti affinchè una funzione continua sia a variazione limitata secondo TONELLI. Gli insiemi numerici descritti dalle somme ([21]):

$$s_1 = \Sigma_{i,j} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} | f(x, y_j) - f(x, y_{j-1}) | \, dx \right| ;$$

$$s_2 = \Sigma_{i,j} \left| \int_{y_{j-1}}^{y_j} | f(x_i, y) - f(x_{i-1}, y) | \, dy \right| ;$$

oppure dalle somme ([22]):

$$G_1 = \Sigma_{i,j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} | f(x, y_j) - f(x, y_{j-1}) | \, dx ;$$

$$G_2 = \Sigma_{i,j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} | f(x_i, y) - f(x_{i-1}, y) | \, dy ;$$

([19]) L. TONELLI, v. nota ([4]); C. MIRANDA [21 . Non sussiste una relazione analoga per le $f \varepsilon T_\varphi \cap C$.

([20]) Cfr. nell'ordine (A. C. 2), R. CACCIOPPOLI [4], L. TONELLI [31], L. C. YOUNG [36].

([21]) L. TONELLI [32].

([22]) Z. DE GEÖCZE, *Quadrature des surfaces courbes*, « Math. Nat. Berichte Ung. », 26, (1910), pp. 1-88; cfr. M. T. RADÒ [25]. A. MAMBRIANI [19], cfr. inoltre una condizione equivalente di S. KEMPISTY [14].

oppure dalle somme [23]:

$$v' = \Sigma_j \int_a^b | f(x, y_j) - f(x, y_{j-1}) | \, dx ;$$

$$v'' = \Sigma_i \int_c^d | f(x_i, y) - f(x_{i-1}, y | \, dy ;$$

siano superiormente limitati al variare di m, n e dei punti (x_i, y_j) tali che $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_m = b$; $c = y_0 \leq y_1 \leq ... \leq y_n = d$.

4. Notizie bibliografiche. [24]

Si accennano alcune definizioni che rientrano in questa sezione. H. P. Mulholland [24] chiama variazione totale di una funzione $f(x, y) \in T \cap C$, il valore

$$V_D(f) = \frac{1}{2}\int_0^\pi W(\theta)d\theta \quad \text{dove} \quad W(\theta) = \int \Big[\int_{(t,\, y) \in D_\theta} | d_t f_\theta(t, y) | \Big] dy$$

e la funzione $f_\theta(x, y) = f(x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta, \; - x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$, è definita al variare di (x, y) nel dominio D_θ ottenuto ruotando il dominio piano e convesso D di un angolo θ.

A. S. Kronrod [16, 17] chiama variazione totale di una funzione $f(x, y) \in T \cap C$, il valore

$$V(f, R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(E_t) dt$$

dove $\nu(E_t)$ è la misura di Hausdorff dell'insieme E_t di punti di un dominio rettangolare R nei quali $f(x, y) = t$.

E. V. Glivenko [13] dà una definizione assiomatica della variazione totale $V(f, R)$ di Kronrod.

Altre definizioni che impongono condizioni più restrittive di quelle di Tonelli, sono date da P. Nalli e G. Andreoli [1, 2], da J. C. Burkill e U. S. Haslam-Jones [3] e da A. Mambriani [20]. Sull'interpretazione geometrica delle variazioni delle $f(x, y) \in T$, si vedano L. Tonelli [25] ed A. Mambriani [18].

[23] A. Mambriani [20].

[24] Le indicazioni bibliografiche si riferiscono solamente alle varie classi di funzioni a variazione limitata considerate in ciascuna sezione. Oltre ai lavori citati vengono riportati alcuni sulle applicazioni più importanti.

[25] V. nota [4].

C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON, v. note (2), (3), (15).

G. ANDREOLI e P. NALLI

[1] *Sull'area di una superficie, sugli integrali multipli di Stieltjes e sugli integrali multipli delle funzioni di più variabili complesse,* « Rend. Accad. Lincei », (6) 5, (1927), pp. 963-966.

[2] *Sull' area di una superficie, sugli integrali multipli di Stieltjes e sugli integrali doppi delle funzioni di due variabili complesse,* « Rend. Circ. Mat. Palermo », 52, (1928), pp. 30-43.

J. C. BURKILL e U. S. HASLAM-JONES

[3] *Notes on the differentiability of functions of two variables,* « J. London Math. Soc. », 7, (1932), pp. 297-305.

R. CACCIOPPOLI

[4] *Sulla definizione dell' area di una superficie,* « Rend. Accad. Lincei », (6) 8, (1928), pp. 34-40.

F. CAFIERO

[5] *Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata,* « Rend. Accad. Lincei », 8 (8), (1950), pp. 305-311, 450-457.

L. CESARI

[6] *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata secondo Tonelli e sulla convergenza delle rispettive serie doppie di Fourier,* « Rend. Sem. Mat. Univ. Roma », (4) 1, (1936), pp. 277-294.

[7] *Sulle funzioni a variazione limitata,* « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa », (2) 5, (1936), pp. 299-313.

J. A. CLARKSON (v. Adams).

S. FAEDO

[8] *Sulle medie delle funzioni a variazione limitata di due variabili,* « Rend. Istituto Lombardo », (3) 71, (1957-38), pp. 147-164.

J. J. GERGEN

[9] *Convergence criteria for double Fourier series,* « Trans. Amer. Math. Soc. » 35, (1933), pp. 29-63.

L. GIULIANO

[10] *Sulla differenziabilità asintotica delle funzioni di due variabili a variazione limitata,* « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa », (2) 8, (1939), pp. 41-50.

[11] *Una proprietà delle successioni di funzioni generalmente a variazione limitata.* « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa ». (3) 6, (1952), pp. 99-107.

[12] *Sopra un'estensione del concetto di funzione generalmente a variazione limitata,* « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa », (3) 7, (1953), pp. 65-78.

E. V. GLIVENKO

[13] *Sulla variazione piana* (in russo), « Rec. Math. (Mat. Sbornik) », (72), 30, (1952), pp. 581-600. Recensione su « Mathematical Reviews », 1953, p. 30 di H. P. Mulholland.

U. S. HASLAM-JONES (v. Burkill).

S. KEMPISTY

[14] *Sur les fonctions a variation bornée au sens de Tonelli*, « Bull. Sem. Mat. Univ. Wilno », 2, (1939), pp. 13-21.

[15] *Fonctions d'intervalle non additives*, Hermann, Parigi, 1939.

A. S. KRONROD

[16] *Variazioni lineari e piane di funzioni di più variabili* (in russo), « Doklady Akad. Nauk SSSR », 66, (1949), pp. 797-800. Recensione su « Mathematical Reviews », 1950, p. 19 di H. P. Mulholland.

[17] *Sulle funzioni di due variabili* (in russo), « Uspehi Matem. Nauk », (35) 1, (1950), pp. 24-134. Recensione su « Mathematical Reviews », 1950, p. 648 di H. P. Mulholland.

A. MAMBRIANI

[18] *Alcuni legami fra funzioni di due variabili a variazione limitata e funzioni di due variabili a variazione doppia limitata*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (2) 5, (1943), pp. 150-156.

[19] *Su due notevoli integrali del Tonelli*, « Ann. Mat. Pura Appl. », (4) 23, (1944), pp. 51-68.

[20] *Sul concetto di Tonelli di funzioni di due variabili a variazione limitata*, « Atti Sem. Mat. Fis. Modena », 1, (1947) pp. 121-130.

C. MIRANDA

[21] *Sommazione per diagonali delle serie doppie di Fourier*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Roma », (3) 1, (1931-33), pp. 191-217.

[22] *Sommazione per diagonali delle serie doppie di Fourier*, « Rend. Accad. Lincei », (6) 17, (1933), pp· 803-806.

C. B. MORREY JR.

[23] *A class of representations of manifolds*, « Amer. J. Math., 55, (1933), pp. 683-707; 56, (1934), pp. 275-293.

H. P. MULHOLLAND

[24] *On the total variation of a function of two variables*, « Proc. London Math. Soc. », (2) 46, (1940), pp. 290-311. « *Corrigendum* », (2) 50, (1949), pp. 559-560.

P. NALLI (v. Andreoli).

T. RADÒ

[25] *Sur le calcul des surfaces courbes*. « Fund. Math. », 10, (1927), pp. 197-210.

[26] *Lenght and Area*. New York, 1948.

S. SAKS

[27] *Théorie de l'Intégrale*, « Monografie Mat. », Varsavia 1933; *Theory of Integral*, « Monografie Mat. » Varsavia, 1937.

L. TONELLI

[28] *Sulla quadratura delle superficie*, « Rend. Accad. Lincei » (6) 3, (1926), pp. 312-357; pp. 445-450; pp. 633-638; pp. 714-719.

[29] *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier*. « Ann. Mat. Pura Appl. (4) 4, (1927), pp. 29-72.

[30] *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, 1928.

[31] *Sulle funzioni di due variabili assolutamente continue*, « Mem. Accad. Bologna, (8) 6, (1928), pp. 1-10.

[32] *Sulla definizione di funzioni di due variabili a variazione limitata*, « Rend. Accad. Lincei », (6) 7, (1928), pp. 357-363.

[33] *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata*, « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, (2) 5, (1936), pp. 315-320.

[34] *Sulle serie doppie di Fourier*, « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa », (2) 6, (1937), pp. 315-326.

— inoltre v. nota (4) —

G. TORRIGIANI

[35] *Sulle funzioni di più variabili a variazione limitata*, « Riv. Mat. Univ. Parma », 1, (1950), pp. 59-83.

L. C. YOUNG

[36] *An expression connected with the area of a surface* z = f(x, y), « Duke Math. J. » 11, (1944), pp. 43-57.

SEZ. II. - *Funzioni a oscillazione totale limitata.*

1. Definizioni e proprietà.

Sia $f(x, y)$ una funzione reale definita nel dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$ del piano e si decomponga R in n^2 domini rettangolari R_i, non sovrapposti, con lati paralleli agli assi x, y e di dimensioni $\dfrac{b-a}{n}$, $\dfrac{d-c}{n}$.

Si dice che la funzione $f(x, y)$ è a oscillazione totale limitata di ordine $o(n^{-\beta})$ in R, $(0 \leq \beta < 2)$, quando la successione numerica descritta dalle somme:

$$\sum_{=1}^{n^2} \frac{1}{n^\beta} \operatorname{osc.} (f,\ R_i)$$

è limitata al variare di n. Tale classe di funzioni si denota con P^β.

La definizione coincide con quella di H. HAHN **[39]** allorchè $\beta = 1$ (26).

Esempio: Siano $\{x_h\}$, $\{y_h\}$ due successioni di coordinate $x_h = y_h = \dfrac{h}{n}$, $h = 1, 2, \dots, n$ e si ponga:

$$f_n(0,\ 0) = 1,$$

$$f_n(0,\ y_h) = f_n(x_1,\ y_h) = \dots = f_n(x_h,\ y_h) = f_n(x_h,\ y_{h-1}) = \dots =$$
$$= f_n(x_h,\ 0) = \frac{(h+1)^\gamma - h^\gamma}{2h+1}$$

(26) Per l'equivalenza tra la definizione di H. HAHN (P_H) con quella di J. PIERPONT (P), **[40]**, cfr. (A. C. 1).

dove γ è un numero reale fissato, tale che $0 < \gamma < 2$,

$f_n(x, y) = 0$ in ogni altro punto del quadrato di estremi $(0, 0), (1, 1)$.

L'estremo superiore delle somme $\sum_{i=1}^{n^2}$ osc. (f, R_i) è un numero P_n^0, $(n+1)^\gamma < P_n^0 < 3(n+1)^\gamma$.

Al divergere del numero intero positivo n, si ottiene una funzione $f(x, y)$ che è limitata e ad oscillazione totale limitata di ordine $o(n^{-\beta}) \leq o(n^{-\gamma})$, ma non di ordine superiore a $o(n^{-\gamma})$.

1) Ogni funzione a oscillazione totale limitata di ordine $o(n^{-\beta})$ in R, è ivi limitata e continua rispetto ad (x, y) salvo in un insieme di punti di R di misura nulla ([27]).

Per la classe P, di HAHN, PIERPONT, valgono inoltre le proprietà:

2) Le variazioni lineari $V_x(y)$, $V_y(x)$, sono superiormente limitate da funzioni sommabili nei rispettivi intervalli (a, b), (c, d). Si ha quindi:

$$\overline{T} \cap M \supset P \ (^{28}).$$

3) E. M. BEELSEY [37] dimostra che una funzione $f(x, y) \in P \cap C$ può non essere totalmente differenziabile (nel senso di STOLZ) in alcun punto del dominio rettangolare R ([29]).

2. Notizie bibliografiche.

C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON, v. note ([2]), ([3]).

E. M. BEELSEY

[37] *Concerning total differentiability of functions of class* P, « Pacific Math. J. » 4, (1954), pp. 169-205.

R. CONTI

[38] *Su una nuova classe di funzioni a variazione limitata di due variabili e le sue relazioni con le classi* H, A, P, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) 4, (1949), pp. 53-57.

H. HAHN

[39] *Theorie der Reellen Funktionen*, Berlino, 1921.

J. PIERPONT

[40] *The theory of functions of real variables,* Londra, New York, 1905.

([27]) La dimostrazione di C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON (A. C. 2. pp. 713) per $\beta = 1$, è vera anche per $\beta \neq 1$, purchè in luogo di $\frac{1}{n}$ si sostituisca $\frac{1}{n^\beta}$, $0 \leq \beta < 2$.

([28]) Cfr. (A. C. 2.), pp. 713.

([29]) Sugli esempi di funzioni assolutamente continue (secondo Tonelli) che non sono totalmente differenziabili in alcun punto di R, cfr. S. SAKS, *On the surfaces without tangent planes,* « Ann. of Math. », 34, (1933), pp. 114-124, inoltre L. CESARI, *Sulle funzioni assolutamente continue in due variabili,* « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa », (2) 10, (1941), pp. 91-101.