Bollettino
Unione Matematica Italiana

D. S. Mitrinovitch

Su un determinante e sui numeri di Stirling che vi si collegano.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 93–96.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_93_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Su un determinante e sui numeri di Stirling che vi si collegano

Nota di D. S. Mitrinovitch (a Belgrado)

Sunto. - *Si indica il modo di sviluppare un determinante che generalizza quello di Vandermonde e si accenna alla possibilità di estendere il risultato conseguito.*

1. Si conoscono numerose generalizzazioni del determinante di Vandermonde. Sopratutto la scuola italiana ha dato importanti contributi a tale questione. Una gran parte di questi risultati, seguiti da indicazioni bibliografiche, è indicata nel noto libro di Pascal [1] (1).

2. L'oggetto di questa nota è il determinante $D_{n,k}$ la cui N^{ma} linea è

$$1, \binom{r_N}{1}, \ldots, \binom{r_N}{k-1}, \binom{r_N}{k+1}, \ldots, \binom{r_N}{n},$$

dove N varia da 1 a n (n e k numeri naturali) e dove gli r_N sono diversi fra loro.

Relativamente a questo determinante, abbiamo ottenuto il seguente risultato:

$$D_{n,k} = V_n(\lambda_{k0}\sigma_{n-k} + \lambda_{k1}\sigma_{n-k-1} + \ldots + \lambda_{k,\,n-k})/[1!\,2!\ldots(k-1)!\,(k+1)!\ldots n!],$$

essendo

V_n il determinante di Vandermonde in $r_1, r_2, \ldots, r_n$;

σ_k la funzione simmetrica elementare in $r_1, r_2, \ldots, r_n$,

(per esempio: $\sigma_2 = r_1r_2 + \ldots + r_1r_n + r_2r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n$).

I coefficienti λ_{pq} si determinano, di volta in volta, per mezzo della relazione

$$\lambda_{pq} = \lambda_{p+1,\,q-1}S^p_{p+1} - \lambda_{p+2,\,q-2}S^p_{p+2} + \ldots + (-1)^{q+1}\lambda_{p+q,\,0}S^p_{p+q}$$

convenendo che $\lambda_{ps} = 1$, se $s = 0$, essendo gli indici p e q, ($q \geq 1$), dei numeri naturali.

I coefficienti S^m_n sono i numeri di Stirling di prima specie

(1) I numeri in parentesi quadra rimandano alla bibliografia indicata alla fine di questa nota.

{ cf. [4] e [5] } definiti dall'identità:

$$r(r-1)\dots(r-k+1) \equiv S_k^1 r + S_k^2 r^2 + \dots + S_k^{k-1} r^{k-1} + S_k^k r^k.$$

Citiamo le formule particolari seguenti:

$$\lambda_{n-k,0} = 1,$$

$$\lambda_{n-k,1} = -\binom{n-k+1}{2},$$

$$\lambda_{n-k,2} = \frac{1}{4}\binom{n-k+2}{3}(3n-3k+1),$$

$$[1!\,2!\dots(n-2)!\,n!]D_{n,n-1} \equiv V_n\left[\sigma_1 - \binom{n}{2}\right],$$

$$[1!\,2!\dots(n-3)!\,(n-1)!\,n!]D_{n,n-2} \equiv V_n\left[\sigma_2 - \binom{n-1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{4}(3n-5)\binom{n}{3}\right],$$

$$[1!\,2!\dots(n-4)!\,(n-2)!\,(n-1)!\,n!]D_{n,n-3} \equiv$$

$$\equiv V_n\left[\sigma_3 - \binom{n-2}{2}\sigma_2 - \frac{1}{4}(3n-8)\binom{n-1}{3}\sigma_1 + \binom{n-2}{2}\binom{n}{4}\right].$$

3. Abbiamo ottenuto il risultato indicato per mezzo di un procedimento il cui punto di partenza è una considerazione parallela della equazione differenziale d'EULERO lineare d'ordine n e della sua soluzione generale, supponendola data in precedenza sotto la forma

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k x^{r_k}, \qquad (C_k \text{ costanti arbitrarie})$$

essendo diversi fra di loro gli r_k.

4. Lo stesso procedimento può essere utilizzato per ottenere lo sviluppo di un determinante più generale di $D_{n,k}$, cioè del determinante la cui N^{ma} linea è

$$1,\ r_N^{(1)},\ r_N^{(2)}, \dots,\ r_N^{(k-1)},\ r_N^{(k+1)}, \dots,\ r_N^{(n)}$$

con

$$r_N^{(i)} = (r_N + a_1)(r_N + a_2)\dots(r_N + a_i)$$

dove

$$N = 1,\ 2, \dots,\ n;\ i = 1,\ 2, \dots,\ n-1.$$

L. TOSCANO [3] ha studiato, da un punto di vista molto differente dal nostro, il caso particolare del determinante in questione corrispondente a $k = n-1$. A proposito di questo argomento occorre vedere anche uno studio di G. PALAMÀ [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. PASCAL, *I determinanti,* seconda edizione, Milano, 1923. Cfr. particolarmente p. 192-202.

[2] G. PALAMÀ, 1° *Su due nuove generalizzazioni del determinante di Vandermonde,* « Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. 23, serie 6, 1936, p. 28-35.
2° *Sugli sviluppi di potenze più generali di quelle fattoriali N^{me} a differenza D, di un binomio e di un polinomio, e su alcune generalizzazioni del determinante di Vandermonde,* « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. 69, 1936, p. 729-740.

[3] L. TOSCANO, *Su alcuni determinanti dedotti da quello di Vandermonde,* « Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli », serie 4, vol. 6, 1936, p. 257-261.

[4] CH. JORDAN, 1° *On Stirling's numbers,* « The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 37, 1933, p. 254-278.
2° *Calculus of Finite Differences,* Budapest, 1930. - *Cfr.* in particolare p. 142-168.

[5] D. S. MITRINOVITCH, 1° *Sur un procédé fournissant des solutions d'une équation aux différences finies rattachée à la théorie des coefficients de Stirling,* « Bulletin de l'Académie royale de Belgique », Classe des sciences, 5e série, t. 33, 1947 pp. 244 - 247.
2° *Sur les nombres de Stirling,* « Annuaire de la Faculté de philosophie de l'Université de Skopje », Section des sciences naturelles, t. 1, 1948, p. 49-89. - *Cfr.* in particolare p. 93-95.

OSSERVAZIONE I.

Modificando convenientemente il procedimento usato, si può ottenere anche uno sviluppo del determinante D la cui N^{ma} linea è della forma

$$1,\ \binom{a_N}{k_1},\ \binom{a_N}{k_2}, \dots,\ \binom{a_N}{k_{n-1}},$$

con $N = 1, 2, \dots, n$ e dove $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ sono numeri naturali differenti.

Lo stesso procedimento si applica anche a dei determinanti che generalizzano il determinante D definito sopra.

Questo sarà l'oggetto di uno studio che apparirà altrove.

OSSERVAZIONE II.

K. A. HIRSCH [2], ha dato una espressione di un determinante, chiamato $D_{n,k}$ nella nostra nota.

La via seguita nella nostra nota non soltanto è molto differente da quella di HIRSCH, ma conduce anche a una espressione per $D_{n,k}$ avente una forma più perfetta e più esplicita di quella di HIRSCH. Inoltre la nostra via dà la possibilità di fare generalizzazioni diverse (*).

(2) K. A. HIRSCH, *A note on Vandermonde's determinant*, «The Journal of the London Math. Soc.», vol. 24, 1949, pp. 144-145.

(*) N.D.R. Le osservazioni I e II sono state aggiunte successivamente dall'Autore alla sua Nota.