BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Francesco Sbrana

Sulle condizioni sufficienti per l'equilibrio di un sistema materiale, dedotte mediante il principio dei lavori virtuali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 123–125.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Sulle condizioni sufficienti per l'equilibrio di un sistema materiale, dedotte mediante il principio dei lavori virtuali.

Nota di FRANCESCO SBRANA (a Genova)

Sunto. - *Una dimostrazione della «sufficienza» del principio dei lavori virtuali per l'equilibrio di un sistema materiale, fondata su particolari ipotesi, e data dell' A. nel 1953, fu in seguito generalizzata dal* Prof. CARLO CATTANEO. *Facendo nuove ipotesi, analoghe a quelle del* CATTANEO, *quest' ultima dimostrazione viene ad essere sensibilmente semplificata.*

1. In una breve Nota, pubblicata in questo Bollettino, [1] ho dato una semplice dimostrazione, fondata sul teorema dell' energia, della proprietà di un sistema di punti materiali, (in numero finito), di restare in quiete, se le velocità iniziali sono nulle; mi limitavo però a considerare il caso in cui i vincoli siano bilaterali, e le forze (attive e vincolari) non dipendano esplicitamente dal tempo [2]. La dimostrazione era ottenuta facendo uso soltanto delle seguenti disuguaglianze:

$$\frac{|v_i|}{\sqrt{T}} \leq \sqrt{\frac{2}{m_i}}, \tag{1}$$

dove m_i indichi la massa generica v_i la sua velocità; e della variabile s definita da

$$s = \int_0^t T(t')dt'. \tag{2}$$

In seguito il Professore CARLO CATTANEO, considerando ancora un sistema formato da un numero finito di punti materiali, e servendosi nuovamente delle (1), (2), riusciva [3] ad estendere la dimostrazione al caso di condizioni più generali per i vincoli e per le forze attive [4].

(1) Serie III, anno VIII, Giugno 1953, pp. 123-127.

(2) Di un'altra ipotesi mi servivo, cioè che l'istante iniziale, $t = 0$, non fosse punto di accumulazione (destro) per gli eventuali zeri nell'energia cinetica $T(t)$, in un possibile moto del sistema, a partire da $t = 0$.

(3) Oltre che a togliere la restrizione per $T(t)$.

(4) CARLO CATTANEO, *Sulla «sufficienza» del principio dei lavori virtuali all' equilibrio di un generico sistema materiale*, «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni» Serie V, Vol. XIII, Fasc. 3-4, Roma, (1954).

Nelle righe che seguono mi propongo, facendo ipotesi analoghe, di ottenere qualche semplificazione nel procedimento adottato dal Prof. CATTANEO; e inoltre di rilevare come il risultato conclusivo dello stesso A. fosse già in germe contenuto nella mia Nota. Per brevità indicherò con I) quest'ultima, con II) l'altra.

2. Seguendo, in parte, le notazioni della II), rappresentiamo con $A(A_1, A_2, \dots, A_N)$ la posizione del sistema all'istante t, con $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ il suo atto di moto nello stesso istante. Supporremo. in ogni moto reale, e ad ogni istante,

$$\Sigma \, \boldsymbol{F}_i(A^*, 0, t) \times \boldsymbol{v}_i \leq 0, \tag{3}$$

dove A^* indichi la posizione in cui il sistema si trova per $t = 0$, con atto di moto nullo; i vincoli indipendenti dal tempo, e tali che le rispettive reazioni $\boldsymbol{R}_i$ soddisfino in ogni istante alla condizione

$$\Sigma \, \boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{v}_i \leq 0. \tag{4}$$

In base a queste ipotesi, e dal teorema dell'energia, segue subito che durante il moto eventuale si ha al tempo t,

$$\frac{dT}{dt} \leq \Sigma \, \boldsymbol{F}_i(A, V, t) \times \boldsymbol{v}_i,$$

od anche, per la (3),

$$\frac{dT}{dt} \leq \Sigma \, [\boldsymbol{F}_i(A, V, t) - \boldsymbol{F}_i(A^*, 0, t)] \times \boldsymbol{v}_i. \tag{5}$$

Supponiàmo che tutti gli eventuali moti del sistema possano aver luogo (solo) in un intervallo di tempo finito, $(0, t_1)$, con $t_1 > 0$, in corrispondenza di un intorno completo e chiuso J di A, e di atti di moto contenuti in un intorno completo J' dell'atto di moto nullo, sotto l'azione di forze $\boldsymbol{F}_i$, limitate e lipschitziane, (uniformemente rispetto a t, per $0 \leq t \leq t_1$), come funzioni di A e V, negli intorni rispettivi J, J', per modo che risulti:

$$| \boldsymbol{F}_i(A. V, t) | \leq F;$$

$$| \boldsymbol{F}_i(A, V, t) - \boldsymbol{F}_i(A^*, 0, t) | \leq H \, | \Delta A | + K \sqrt{T}, \tag{6}$$

con H e K costanti non negative, e non simultaneamente nulle, e

$$| \Delta A | = \sqrt{\Sigma m_i \, | A_i^* A_i |^2} \ (^5).$$

(5) Le ipotesi sopra enunciate sono analoghe a quelle della Nota II); abbiamo ritenuto opportuno, (allo scopo già dichiarato di voler semplificare la dimostrazione), e sostanzialmente privo di conseguenze pratiche, il sostituire l'intervallo di tempo $(0, \infty)$ con un intervallo $(0, t_1)$, grande quanto occorra, ma finito.

Si ha così dalla (3)

$$\frac{dT}{dt} \leq \Sigma \frac{|F_\iota(A, V, t) - F_\iota(A^*, 0, t)|}{\sqrt{m_\iota}} \sqrt{m_\iota} \mid v_\iota \mid = \tag{7}$$

$$= \sqrt{T}\left(\sqrt{\frac{2}{N}}\, G_1 \mid \Delta A \mid + G_2 \sqrt{T}\right);$$

dove G_1 e G_2 sono due costanti, analoghe ad H e K, (ed N è il numero dei punti del sistema). D'altra parte risulta

$$\mid \Delta A \mid \leq \sqrt{2N}\, s,$$

dove naturalmente s s'intenda definito secondo la (2). [6] Per conseguenza dalla (7) segue

$$\frac{dT}{dt} \leq 2G_1 \sqrt{T}\, s + G_2 T. \tag{8}$$

Questa disuguaglianza comprende quella cui pervenivo a pag. 3, ultima riga, della mia Nota I), (nell'ipotesi che le F_ι siano indipendenti da V e quindi si abbia $G_2 = 0$).

Dalla (8), integrando, e tenendo presente il teorema di SCHWARZ, (come nella Nota II), si ottiene

$$T(t) \leq (G_1 t + G_2) \cdot \int_0^t T(t')dt',$$

cioè la (37) della Nota II).

Poniamo ora

$$h = G_1 t_1 + G_2 .$$

Dalla disuguaglianza precedente si trae:

$$T(t) \leq h \int_0^t T(t')dt', \text{ con } T(0) = 0,$$

per t variabile da zero a t_1; quindi, come è notissimo, necessariamente,

$$T(t) = 0,$$

in tutto il detto intervallo, c. v. d.

[6] Cfr., salvo l'intervento di un inessenziale fattore costante, la (26_3) della Nota II).