Salvatore Cherubino

Su un'equazione della teoria delle vibrazioni.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 133–136.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_133_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Su un' equazione della teoria delle vibrazioni.

Nota di SALVATORE CHERUBINO (a Pisa)

Sunto. - *Riottenuta la simultanea riduzione a forma diagonale di due matrici hermitiane* A *e* B, *la prima definita positiva, se ne fa applicazione ad una classica equazione completando una nota proprietà. Si assegna anche una doppia limitazione per le radici di questa equazione.*

Nel recensire il *Mémorial* di MAURICE PARODI: *Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carreés,* ci è capitato di rilevare una svista in cui egli è incorso nell'interpretare alcuni passi del capitolo sulla teoria delle vibrazioni di un classico trattato [1].

Sembraci che valga la pena di esporre più chiaramente la questione cui quei passi si riferiscono servendosi del compatto simbolismo delle matrici. La nostra esposizione ci fornisce anche un completamento, forse ancora non segnalato esplicitamente, di un risultato noto e cioè che affinchè le radici della equazione qui appresso indicata con (1) siano tutte negative è non soltanto sufficiente ma anche necessario che la matrice hermitiana B sia anch' essa definita positiva.

Al n. 2 diamo due limitazioni per le radici della (1) costruibili meno faticosamente del limite superiore indicato da PARODI come applicazione di un teorema generale di OSTROWSKI.

1. Siano A e B due matrici hermitiane di ordine n, in particolare reali e simmetriche, la prima definita positiva, e si consideri l'equazione in z:

$$\det. [Az + B] = 0. \tag{1}$$

È ben noto [2] che le radici di questa equazione sono tutte

[1] E. T. WHITTAKER, *Analitical dynamics of particles and rigid bodies,* IV ed., New York, Dover Publication, 1944, Chap. VII pp. 177-186.

[2] Cfr. la mia Nota, *Su certe equazioni fondamentali e sul simbolismo delle matrici,* «Rend. Sem. Roma», s. IV, v. I, 1936, n. 4.

reali, come si vede subito osservando che se λ è una di esse. si ha

$$[A\lambda + B]\mathrm{x}_{-1} = 0 \tag{2}$$

con $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vettore non nullo, cioè a componenti non tutte zero. Moltiplicando a sinistra per $\bar{\mathrm{x}}$, vettore complesso coniugato di x, e ricordando che $\bar{\mathrm{x}}\, A\mathrm{x}_{-1} > 0$, si ha:

$$\lambda = -\frac{\bar{\mathrm{x}}B\mathrm{x}_{-1}}{\bar{\mathrm{x}}A\mathrm{x}_{-1}}. \tag{3}$$

Il numeratore $\bar{\mathrm{x}}B\mathrm{x}_{-1}$ coincide, come scalare, col proprio trasposto $\mathrm{x}B_{-1}\bar{\mathrm{x}}_{-1}$, cioè essendo $B_{-1} = \bar{B}$ perchè B è hermitiana, ($\bar{B}$ matrice complessa coniugata di B) con $\mathrm{x}\bar{B}\bar{\mathrm{x}}_{-1}$ che è il proprio coniugato. Dunque λ è reale e sarà < 0 allora e solo che $\bar{\mathrm{x}}B\,(\mathrm{x}_{-1} > 0$, il che non significa ancora che B è definita positiva, (perchè x non è un qualsiasi vettore $\neq 0$.)

Le matrici A e B, essendo hermitiane, sono diagonizzabili con matrici unitarie (ortogonali se A e B sono reali e simmetriche). Siano queste H e K, sicchè si abbia $\bar{H}H_{-1} = \bar{K}K_{-1} = I$ ed

$$\bar{H}AH_{-1} = D, \qquad \bar{K}BK_{-1} = D'$$

con I matrice identica di ordine n e D, D' matrici diagonali reali i cui elementi principali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sono rispettivamente le radici caratteristiche di A e B, le α_s essendo tutte positive perchè A è definita positiva. Poniamo $D = E^2$, E matrice diagonale reale i cui elementi principali sono le radici quadrate delle α_s, $s = 1, 2, \dots, n$. Le radici di (1) coincidono con quelle dell' equazione

$$\det. [\mathrm{I}z + B'] = 0 \tag{4}$$

essendo $B' = E^{-1}\bar{H} \cdot B \cdot H_{-1}E^{-1}$. Questa B' è ancora hermitiana, quindi diventa diagonale reale trasformando con una matrice unitaria L che ci dà:

$$\bar{L}[Iz + B']L_{-1} = \mathrm{I}z + D'' \tag{5}$$

con D'' diagonale reale i cui elementi principali sono le radici caratteristiche di B'. Questa (5) ci assicura che le radici di (4), cioè di (1), sono tutte e sole le radici caratteristiche *di* B' cambiate di segno perciò tutte negative allora e solo che B', quindi B, è definita positiva, cioè si ha $\bar{x}Bx_{-1} > 0$ qualunque sia il vettore $x \neq 0$.

La matrice $LE^{-1}H$ riduce dunque simultaneamente A e B a forma diagonale, anzi trasforma A in I e B in D''. Trasformando invece con $ELE^{-1}H$, cioè moltiplicando (5) a destra ed a sinistra per E, la (1) diventa:

$$\det.\,[Dz + D_1] = 0, \tag{6}$$

nella quale la matrice diagonale D_1 è il prodotto DD''. Le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di (1) sono perciò i rapporti

$$\lambda_s = -\frac{\gamma_s}{\alpha_s}; \qquad (s = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{7}$$

ove i numeratori γ_s sono non le radici caratteristiche di B, ma gli elementi principali di D_1.

Se A e B fossero permutabili e allora soltanto si potrà prendere [3] $K = H$, ottenendo $\bar{H}BH_{-1} = D'$ e sarebbe

$$B' = E^{-1}\bar{H}BH_{-1}E^{-1} = D^{-1}D'. \tag{8}$$

Si ha perciò $L = I$ e risulta $D_1 = D'$, quindi $\gamma_s = \beta_s$; $s = 1, 2, \ldots, n$. radici caratteristiche di B.

Chiudiamo questo n. ricordando che nel citato trattato di WHITTAKER, A e B sono matrici costanti reali e simmetriche e che le forme quadratiche

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{q}A\dot{q}_{-1}; \qquad V = \frac{1}{2}\,qBq_{-1}$$

sono l'energia cinetica e rispettivamente quella potenziale del sistema, mentre

$$q = (q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n); \qquad \dot{q} = (\dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots,\ \dot{q}_n)$$

sono i vettori delle coordinate del sistema e delle loro derivate rispetto al tempo. La trasformazione lineare (reale) di coordinate

[3] S. CHERUBINO, *Sulle matrici permutabili e diagonalizzabili*, « Atti Acc. Peloritana », XXXVII, 1935, p. II, pp 299-308, n. 5 *a*.

di matrice $LE^{-1}H$ porta T e V simultaneamente a forma canonica nelle nuove coordinate (dette normali) indicate ancora con q, facendo anzi acquistare a T la forma $\frac{1}{2}\dot{\mathrm{q}} \cdot \dot{\mathrm{q}}_{-1} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \dot{q}^2_r$.

2. Alterando x di un conveniente fattore scalare costante si può sempre supporre che nella (3) si abbia $\mathrm{x}\bar{\mathrm{x}}_{-1} = 1$. Allora numeratore e denominatore della frazione a secondo membro sono compresi, com'è noto, tra le minime, β_1, α_1, e le massime, β_2, α_2 radici caratteristiche rispettivamente di B ed A. Si ha quindi:

$$-\frac{\beta_2}{\alpha_1} \leqq \lambda \leqq -\frac{\beta_1}{\alpha_2}. \tag{9}$$

Orbene, indicando con P_r, Q_r ordinatamente le somme dei moduli degli elementi della riga e della colonna r^{ma} di A esclusi gli elementi principali, con P_r', Q_r' le analoghe somme per B, sappiamo [4] che valgono le disuguaglianze:

$$\min(a_{rr} - P_r) \leqq \alpha_1; \qquad \min(\mathrm{mod.}\, b_{rr} - P_r') \leqq \beta_1 \tag{10}$$

$$\alpha_2 \leqq \max(a_{rr} + P_r'); \qquad \beta_2 \leqq \max(\mathrm{mod.}\, b_{rr} + P_r') \tag{11}$$

insieme ad altre due ottenute da queste scrivendo Q_r e Q_r' invece di P_r e P_r'. Le (9) danno così due limitazioni, ossia due coppie di limiti inferiori e superiori delle radici di (1) espresse assai semplicemente mediante gli elementi di A e di B [5]. Questi si calcolano molto più agevolmente di quello, solo superiore, indicato da PARODI [6], che esige il calcolo dell'inversa della matrice B, quindi non è applicabile per B singolare.

[4] V. il citato *Mémorial* di M. PARODI, cap. II, s. I, formole (5) e (6) pp. 20 e 21. Si tenga presente che è certo $a_{rr} > 0$, non così b_{rr}, perchè solo A è supposta definita positiva.

[5] Se il primo minimo nelle (10) fosse zero (sia con P_r che con Q_r) il limite inferiore sarebbe $-\infty$.

[6] *Mémorial*, cit., cap. III, applicazione II, pp. 46-47.