Guido Zappa

Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 150–157.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_150_0>

Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo.

Nota di GUIDO ZAPPA (a Firenze)

Sunto. - *Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè il reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito risolubile sia distributivo è che tutti i sottogruppi di* SYLOW *del gruppo siano ciclici.*

I gruppi pei quali il reticolo dei sottogruppi è distributivo sono stati caratterizzati da O. ORE [6], mentre quelli per cui tale reticolo è modulare sono stati determinati da K. IWASAWA [4, 5]. I gruppi pei quali il reticolo dei sottogruppi è sopramodulare, e quelli per cui tale reticolo è sottomodulare, sono stati studiati rispettivamente da S. SATO [8] e da N. ITO [3], mentre R. BAER [1] e M. SUZUKI [9] si sono occupati dei gruppi per cui il reticolo dei sottogruppi è autoduale, e G. ZACHER ha determinato i gruppi finiti risolubili per cui tale reticolo è complementato [12] ed i gruppi finiti per cui esso è relativamente complementato [11].

Non mi consta, invece, che si sia sino ad ora tentato di caratterizzare i gruppi per i quali non il reticolo di tutti i sottogruppi, bensì quello dei sottogruppi normali, o quello dei sottogruppi di composizione, verifica particolari condizioni. Il reticolo dei sottogruppi normali di un gruppo è, come è ben noto, modulare, mentre quello dei sottogruppi di composizione è sottomodulare. Si pongono allora, in primo luogo, i problemi di determinare i gruppi per cui il reticolo dei sottogruppi normali è distributivo, quelli per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare, e quelli per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo. Naturalmente, tali problemi acquistano interesse solo per gruppi che contengano « molti » sottogruppi normali o di composizione, altrimenti si ottengono risultati banali.

In questa Nota, mi occupo dell'ultimo problema indicato, caratterizzando, tra i gruppi finiti risolubili, quelli per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo. Dimostro precisamente (n. 3) che *condizione necessaria e sufficiente affinchè il reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito risolubile sia distributivo è che tutti i sottogruppi di Sylow del gruppo siano ciclici.*

I gruppi finiti a sottogruppi di SYLOW tutti ciclici sono stati caratterizzati da H. ZASSENHAUS [14] e studiati a fondo da K. HONDA [2[. I sottogruppi di composizione di un gruppo sono stati studiati da H. WIELANDT [10], il quale ha tra l'altro dimostrato che essi formano un sottoreticolo del reticolo di tutti i sottogruppi di un gruppo.

Indicheremo con $\varphi(G)$ il reticolo formato dai sottogruppi di composizione di G.

1. Osserviamo in primo luogo che, come del resto è pressochè evidente:

Se G *è un gruppo finito risolubile con* φ(G) *distributivo. e* A *e* B *sono sottogruppi normali di* G *con* A $\supset$ B, *anche* φ(A/B) *è distributivo.*

Infatti, se H è un sottogruppo di composizione di G tale che $A \supset H \supset B$, esiste una catena normale $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset H$, di estremi A ed H. Ma allora la catena A/B, $A_1/B, \ldots H/B$ è una catena normale di A/B, onde ciascuno dei sottogruppi A_1/B, $A_2/B, \ldots$, H/B è di composizione per A/B. Viceversa, invertendo il ragionamento, si vede che se H/B è un sottogruppo di composizione per A/B, H è di composizione per A, e quindi per G. Si ottiene pertanto una corrispondenza biunivoca tra il reticolo L dei sottogruppi di composizione di G contenuti in A e contenenti B, e quello dei sottogruppi di composizione di A/B. Tale corrispondenza, conservando le relazioni di inclusione, è un isomorfismo. E poichè il reticolo L, quale sottoreticolo del reticolo distributivo $\varphi(G)$, è distributivo, tale deve essere $\varphi(A/B)$, c.d.d.

Mostriamo ora che:

Se G *è un gruppo finito risolubile, ed è* φ(G) *distributivo,* G *è supersolubile.*

Il teorema è evidentemente vero se il numero k dei fattori primi (distinti o no) dell'ordine di G è 1, o 2. Possiamo pertanto procedere per induzione rispetto a k.

Se M è un sottogruppo normale minimo di G, si ha, in base al risultato precedente, che $\varphi(G/M)$ è distributivo; e poichè il numero dei fattori primi di G/M è $< k$, G/M, per l'ipotesi di induzione, è supersolubile.

Il sottogruppo M è abeliano elementare, e pertanto ogni suo sottogruppo è normale in esso, quindi di composizione in esso e in G. Ne segue che il reticolo dei sottogruppi di M, quale sottoreticolo di $\varphi(G)$, è distributivo. Ma allora, per un noto teorema di ORE [6], M è ciclico; ed essendo M d'altra parte abeliano elementare, si ha che esso ha ordine primo.

Poichè G/M è supersolubile, ed M ha ordine primo, si ha subito che G è supersolubile: infatti, se G/M, $G_1/M, \ldots, G_{k-1}/M$ è una serie principale di G/M (necessariamente ad indici tutti primi), $G, G_1, \ldots, G_{k-1} \equiv M, E$ è una serie principale di G, anch'essa ad indici tutti primi. Il teorema è quindi provato.

Dimostriamo ora che:

Se G *è un gruppo finito risolubile, ed è* φ(G) *distributivo, ogni sottogruppo di Sylow di* G *è ciclico.*

Anche ora procederemo per induzione rispetto al numero, k dei fattori primi (distinti o no) dell'ordine del gruppo.

Essendo G, per la proposizione precedente, supersolubile, detto $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} (p_1 > p_2 > \ldots > p_r$ numeri primi distinti) l'ordine di G, si ha [13, 7] che G contiene un sottogruppo normale P d'ordine p_1. Per la prima proposizione di questo n., è $\varphi(G/P)$ anch'esso distributivo, onde, per l'ipotesi di induzione, G/P ha i sottogruppi di Sylow tutti ciclici. Poichè, nell'omomorfismo di G su G/P, ogni sottogruppo di Sylow di G di ordine primo con p_1 si muta in un sottogruppo di Sylow di G/P, ad esso isomorfo, i sottogruppi di Sylow di G d'ordine primo con p_1 risultano ciclici.

L'unico sottogruppo di Sylow di G d'ordine $p_1^{\alpha_1}$ è P. Ogni sottogruppo di P è di composizione per P (perchè P è un p-gruppo) e quindi, essendo P normale in G, ogni sottogruppo di P è sottogruppo di composizione anche per G. Ne segue che il reticolo dei sottogruppi di P è un sottoreticolo di $\varphi(G)$ e quindi è, al pari di esso, distributivo. Ma [6], se un gruppo finito ha il reticolo dei sottogruppi distributivo, è ciclico, onde P, al pari di ogni altro sottogruppo di Sylow di G, risulta ciclico, c.d.d.

È noto [14] che un gruppo finito a sottogruppi di Sylow tutti ciclici può generarsi mediante due elementi a e b, di periodi m ed n primi tra loro, con $m > 1$, e tali che $b\,a\,b^{-1} = a^r$, con $r-1$ primo con m e $r^n \equiv 1 \pmod{m}$, e viceversa.

2. Vogliamo ora invertire l'ultimo risultato, dimostrando che *il reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito i cui sottogruppi di Sylow siano tutti ciclici è distributivo.*

Sia G un gruppo finito, d'ordine $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} (p_1 > p_2 > \ldots > p_r$ numeri primi) a sottogruppi di Sylow tutti ciclici. Allora G è sicuramente supersolubile [1], quindi dispersibile [13, 7], e pertanto

[1] Infatti, G è risolubile, come discende subito dal risultato di Zassenhaus [14]. Inoltre, un sottogruppo normale minimo di G, dovendo essere contenuto in un sottogruppo di Sylow di G stesso, è ciclico, quindi di ordine primo. Di qui, procedendo per induzione, si deduce che G è supersolubile.

contiene un sottogruppo normale P, d'ordine $p_1^{\alpha_1}$. Dimostriamo ora il seguente:

LEMMA. - *Se* H *è un sottogruppo di composizione di* G *non contenente* P, H *appartiene al centralizzante di* P.

Supponiamo, in un primo tempo, che, entro una serie di composizione Σ di G passante per H, questo sia il primo sottogruppo che non contenga P. Sia D il sottogruppo, necessariamente contenente P, che precede H in Σ. Essendo G supersolubile, H ha indice primo in D, e quindi è massimo in esso; si ha pertanto $D = P \bigcup H$. Essendo sia P che H normali in D, si ha $\frac{D}{P \bigcap H} = \frac{P}{P \bigcap H} \times \frac{H}{P \bigcap H}$. Se γ è un generatore di P, e η un qualunque elemento di H, si avrà allora $\eta^{-1}\gamma\eta = \gamma k$, con k elemento di $P \bigcap H$. Ma per ipotesi, si ha $P \bigcap H \subset P$, onde k è della forma γ^{lp_1}, e pertanto sarà $\eta^{-1}\gamma\eta = \gamma^{1+lp_1}$. Allora, avendosi $(1 + lp_1)^{p_1^{\alpha_1}} \equiv 1$ (mod $p_1^{\alpha_1}$), si ha $\eta^{-p_1^{\alpha_1}}\gamma\eta^{p_1^{\alpha_1}} = \gamma$, onde η induce in P un automorfismo d'ordine potenza di p_1. D'altra parte, essendo P abeliano, il centralizzante C di P contiene P stesso, e quindi l'indice ν di C in G è primo con p_1. E poichè ν eguaglia l'ordine del gruppo degli automorfismi indotti in P dagli elementi di G, si ha che l'automorfismo indotto in P da η deve avere ordine primo con p_1. Tale ordine, d'altra parte, deve, come si è visto sopra, essere potenza di p_1, quindi è uguale ad 1, onde η, e con esso ogni elemento di H, è permutabile con ogni elemento di P, è pertanto H è in C, come si voleva.

Se poi H, entro una serie di composizione Σ cui appartiene, non è il primo sottogruppo che non contenga P, esisterà in Σ un sottogruppo H_1, contenente H, ma non P, e tale che il sottogruppo che lo precede in Σ contenga P. Allora, il ragionamento precedente mostra che H_1 è contenuto nel centralizzante di P. A maggior ragione vi sarà contenuto H. Il lemma e quindi provato in ogni caso.

3. Passiamo ora a dimostrare il teorema enunciato all'inizio del n. prec. Sia pertanto G un gruppo finito a sottogruppi di SYLOW tutti ciclici e sia $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ ($p_1 > p_2 > \dots > p_r$ numeri primi) il suo ordine; vogliamo provare che $\varphi(G)$ è distributivo.

Il teorema è evidentemente vero quando il numero dei fattori primi (distinti o no) dell'ordine del gruppo è uguale a 1. Dimostriamo pertanto il teorema per induzione rispetto al numero dei fattori primi (distinti o no) del suo ordine. Sia P il sottogruppo di G d'ordine $p_1^{\alpha_1}$, necessariamente normale.

Supponiamo, in un primo momento, che P appartenga al centro di G. Allora, detto B un sottogruppo di G d'indice $p_1^{\alpha_1}$ (necessariamente esistente per un noto teorema di P. Hall, essendo G risolubile), si avrà $G = P \times B$ (onde B risulta unico del suo ordine). Essendo gli ordini di P e B primi tra loro, il reticolo dei sottogruppi di G è il prodotto cardinale dei reticoli dei sottogruppi di P e B, e quindi, comunque si prenda un sottogruppo A di G, si ha $A = (A \cap P) \cup (A \cap B)$. Inoltre, A è normale in un sottogruppo S di G che lo contenga se e solo se sono normali in S tanto $A \cap P$ che $A \cap B$, ossia se e solo se $A \cap P$ e $A \cap B$ sono rispettivamente normali in $S \cap P$ ed $S \cap B$. Di qui segue facilmente che A è un sottogruppo di composizione di G se e solo se $A \cap P$ e $A \cap B$ sono rispettivamente sottogruppi di composizione di P e di B. Di conseguenza $\varphi(G)$ è il prodotto cardinale di $\varphi(P)$ e $\varphi(B)$; e poichè sia $\varphi(P)$ che $\varphi(B)$, per l'ipotesi di induzione, sono distributivi, anche G lo è, come si voleva.

Potremo quindi, d'ora in poi, limitarci al caso in cui P non appartenga al centro di G. Per provare che $\varphi(G)$ è distributivo, occorre e basta mostrare che, se X, Y e Z sono tre sottogruppi di composizione di G, si ha

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \tag{1}$$

Dato che la formula precedente è simmetrica rispetto ad X e Y, basta dimostrarla nei seguenti casi:

$a)$ $X \supseteq P$, $Y \supseteq P$, $Z \supseteq P$

$b)$ $X \not\supseteq P$, $Y \not\supseteq P$, $Z \not\supseteq P$

$c)$ $X \supseteq P$, $Y \supseteq P$, $Z \not\supseteq P$

$d)$ $X \not\supseteq P$, $Y \not\supseteq P$, $Z \supseteq P$

$e)$ $X \not\supseteq P$, $Y \supseteq P$, $Z \supseteq P$

$f)$ $X \not\supseteq P$, $Y \supseteq P$, $Y \not\supseteq P$

Nel caso $a)$ i sottogruppi $\bar{X} = \frac{X}{P}$, $\bar{Y} = \frac{Y}{P}$, $\bar{Z} = \frac{Z}{P}$ sono sottogruppi di composizione di $\frac{G}{P}$; e poichè $\frac{G}{P}$ ha anch'esso i sottogruppi di Sylow tutti ciclici, e il suo ordine ha un numero di fattori primi minore che quello di G, si ha che $\varphi\left(\frac{G}{P}\right)$ è distributivo, per l'ipotesi di induzione. Sarà pertanto $(\overline{X} \cup \overline{Y}) \cap \overline{Z} = (\overline{X} \cap \overline{Z}) \cup (\overline{Y} \cap \overline{Z})$ da cui segue la (1) a causa dell'isomorfismo intercorrente tra $\varphi\left(\frac{G}{P}\right)$ e il reticolo dei sottogruppi di composizione di G contenenti P.

Nel caso b), per il lemma (n. 2), X, Y, Z sono nel centralizzante C di P. Allora X, Y, Z sono anche sottogruppi di composizione di C; e poichè, nelle nostre ipotesi, il teorema vale per C (che ha anch'esso sottogruppi di Sylow tutti ciclici e non coincide con G), si ha subito la (1).

Nel caso c), avendosi, per il lemma (n. 2), $Z \subseteq C$, cioè $Z = Z \cap C$, otteniamo:

(2) $$(X \cup Y) \cap Z = (X \cup Y) \cap C \cap Z = [(X \cup Y) \cap C] \cap Z.$$

Ma poichè X, Y. C contengono P e C è normale in G, quindi anche di composizione, si avrà, per il caso a):

(3) $$(X \cup Y) \cap C = (X \cap C) \cup (Y \cap C)$$

Dalle (2) e (3) segue

(4) $$(X \cup Y) \cap Z = [(X \cap C) \cup (Y \cap C)] \cap Z$$

e poichè $X \cap C$, $Y \cap C$ sono sottogruppi di composizione di G, e sono contenuti in C al pari di Z, per essi si avrà (in base al caso b)), tenuto anche presente che $Z = Z \cap C$:

(5) $$[(X \cap C) \cup (Y \cap C)] \cap Z = (X \cap C \cap Z) \cup (Y \cap C \cap Z) = \\ = (X \cap Z) \cap (Y \cap Z)$$

Dalle (4) e (5) segue allora la (1).

Nel caso d), avendosi, per il lemma, $X \subseteq C$, $Y \subseteq C$, quindi $X \cup Y \subseteq C$, ossia $X \cup Y = (X \cup Y) \cap C$, otteniamo:

(6) $$(X \cup Y) \cap Z = (X \cup Y) \cap C \cap Z = (X \cup Y) \cap (C \cap Z)$$

e poichè X, Y, $C \cap Z$ sono in C, si ha per il caso b), tenuto anche presente che $X \cap C = X$, $Y \cap C = Y$:

(7) $$(X \cup Y) \cap (C \cap Z) = [X \cap (C \cap Z)] \cup [Y \cap (C \cap Z)] = \\ = (X \cap C \cap Z) \cup (Y \cap C \cap Z) = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

Dalle (6) e (7) seguono la (1).

Nel caso e) si ha, essendo $X \cup Y \supseteq Y \supseteq P$, quindi $(X \cup Y) \cup P = X \cup Y$:

$$(8) \qquad (X \cup Y) \cap Z = [(X \cup P) \cup Y] \cap Z$$

e poichè $X \cup P$, Y, Z contengono P, si ha, per il caso a):

$$(9) \qquad [(X \cup P) \cup Y] \cap Z = [(X \cup P) \cap Z] \cup (Y \cap Z).$$

Ma P, quale sottogruppo normale in G, è permutabile con X; avendosi $Z \supseteq P$, vale allora per X, P, Z la relazione di DEDEKIND:

$$(10) \qquad (X \cup P) \cap Z = P \cup (X \cap Z)$$

Dalle (8), (9), (10), segue, tenendo presente che $Y \supseteq P$, $Z \supseteq P$, onde $Y \cap Z \supseteq P$;

$$(X \cup Y) \cap Z = P \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z) = (X \cap Z) \cup [P \cup (Y \cap Z)] = \\ = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z),$$

cioè la (1).

Infine, nel caso f), essendo $P \subseteq Y \subseteq X \cup Y$, quindi $X \cup Y \cup P = X \cup Y$, si ha:

$$(11) \qquad (X \cup Y) \cap Z = (X \cup Y \cup P) \cap Z = [(X \cup P) \cup Y] \cap Z$$

e poichè $X \cup P \supseteq P$, $Y \supseteq P$, si ha per il caso c):

$$(12) \qquad [(X \cup P) \cup Y] \cap Z = [(X \cup P) \cap Z] \cup (Y \cap Z).$$

E poichè X, Z, per il lemma, sono in C al pari di P, si ha per il caso b):

$$(13) \qquad (X \cup P) \cap Z = (X \cap Z) \cup (P \cap Z).$$

Dalle (11), (12), (13) segue

$$(14) \qquad (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (P \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

e poichè $Y \supseteq P$, si ha che $Y \cap Z \supseteq P \cap Z$, onde la (14) diviene

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

cioè la (1). Il teorema è quindi dimostrato in ogni caso.

Possiamo pertanto concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito risolubile G *sia distributivo, è che ogni sottogruppo di Sylow di* G *sia ciclico.*

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER, *Duality and commutativity in groups*, Duke Math. J., 5 (1939), pp. 824-838.

[2] K. HONDA, *On finite groups, whose Sylow-groups are all cyclic*, Proc. Japan Acad. 25 (1949) pp. 154-159; Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, Tokyo, 1 (1952), pp. 5-39.

[3] N. ITO, *Note on* (LM)-*groups of finite orders.*, Kodai Math. Sem. Rep. 1951 (1951), pp. 1-6.

[4] K. IWASAWA, *Ueber die Gruppen und die Verbande ihrer Untergruppen*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sec. I, IV-3 (1941) pp. 171-199.

[5] K. IWASAWA, *On the structure of infinite* M-*groups*, Japan. Journ. Math., 18 (1943), pp. 709-728.

[6] O. ORE, *Structures and groups theory*, II, Duke Math. J., 4 (1938), pp. 247-269.

[7] O. ORE, *Contributions to the theory of groups of finite orders*, Duke Math. J., 5, (1939), pp. 431-460.

[8] S. SATO, *On groups and the lattices of subgroups.* Osaka Math. J., 1 (1949), pp. 135-149.

[9] M. SUZUKI, *On the lattice of subgroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), pp. 345-371.

[10] H. WIELANDT, *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*, Math. Zeit., 45 (1939) pp. 209-244.

[11] G. ZACHER, *Determinazione dei gruppi d'ordine finito relativamente complementati*, Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat, Soc. Naz. Napoli, 19 (1952), pp. 200-206.

[12] G. ZACHER, *Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 22 (1953), pp. 113-122.

[13] G. ZAPPA, *Sui gruppi supersolubili*, Rend. Sem. Mat. Roma, 2 (1938), pp. 323-330.

[14] H. ZASSENHAUS, *Ueber endliche Fastkörper*, Hamb. Abh. 11 (1935), pp. 187-220.