Bollettino Unione Matematica Italiana

Dragoslav S. Mitrinovitch

Inégalités pour les dérivées des polynômes de Legendre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 172–177.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_172_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Inégalités pour les dérivées des polynômes de Legendre.

Nota di Dragoslav S. Mitrinovitch (a Belgrado)

Sunto. - *On indique quelques formules de majoration pour les polynômes de* Legendre *sur le segment* $[-1, +1]$ *et on les compare avec celles de* Sansone *et de* Picone.

Notations : 1° $n = 0, 1, 2, \ldots; \; s = 1, 2, 3, \ldots;$

2° $P_n(x)$ polynôme de Legendre ;

$$3^\circ \quad N = \begin{cases} \dfrac{n-s}{2} + 1, \text{ pourvu que } n-s \text{ pair,} \\ \dfrac{n-s-1}{2} + 1, \text{ pourvu que } n-s \text{ impair.} \end{cases}$$

1. Considérons la formule de F. Neumann {cf. [1], p. 35}

$$\frac{d^s}{dx^s} P_n(x) \equiv \tag{1}$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{N} \left\{ \binom{s+k-2}{s-1} (2n-2s-4k+5) P_{n-s-2k+2} \prod_{\mu=2}^{s} (2n-2k-2\mu+5) \right\},$$

ainsi que la formule suivante, correspondant à $s = 1$,

$$\frac{d}{dx} P_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{M} (2n-4k+3) P_{n-2k+1}, \tag{2}$$

avec

$$M = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} + 1, \text{ si } n-1 \text{ pair,} \\ \dfrac{n}{2}, \qquad \text{ si } n-1 \text{ impair.} \end{cases}$$

Grâce à la relation bien connue

$$|P_n(x)| \leq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \text{ si } -1 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

on obtient, à partir de (2),

$$\left| \frac{d}{dx} P_n(x) \right| \leq n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \text{ pourvu que } -1 \leq x \leq +1. \tag{4}$$

Après la dérivation de l'expression (2), et mettant à profit les inégalités (3) et (4), on établit

$$\left| \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) \right| \leq n^4 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \text{ pourvu que } -1 \leq x \leq +1.$$

En continuant ainsi, on trouve finalement :

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \leq n^{2s}, \ (n=0,\ 1,\ 2, \ldots), \text{ si } -1 \leq x \leq +1, \tag{5}$$

ce qui est une estimation connue pour la dérivée d^sP_n/dx^s sur le segment $[-1, +1]$, { cf. par exemple [2], p. 189-190 }.

Dans le livre de TRICOMI { cf. [3], p. 195 } on trouve comme « *inégalité importante* » :

$|dP_n(x)/dx| \leq n(n+1)/2$, sur le segment $[-1, +1]$, inégalité qui donne une estimation plus précise, meilleure, que (5) pour $s=1$.

2. Cependant, si l'on part de la formule de NEUMANN (1), on peut établir au lieu de l'inégalité (5) une autre qui permet de serrer la dérivée du polynôme $P_n(x)$ de plus près.

Tous les coefficients

$$\binom{s+k-2}{s-1}(2n-2s-4k+5)\prod_{\mu=2}^{s}(2n-2k-2\mu+5)$$

de $P_{n-s-2k+2}$, pour $k=1, 2, \ldots, N$, étant positifs, on peut écrire l'inégalité

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \leq \tag{6}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N}\left\{\binom{s+k-2}{s-1}(2n-2s-4k+5)\prod_{\mu=2}^{s}(2n-2k-2\mu+5)\right\},$$

pour $-1 \leq x \leq +1$.

D'autre part, pour $x=1$, la relation (1) fournit

$$\left\{\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right\}_{x=1} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left\{\binom{s+k-2}{s-1}(2n-2s-4k+5)\prod_{\mu=2}^{s}(2n-2k-2\mu+5)\right\}$$

étant donné que

$$P_n(1)=1, \quad n=0,\ 1.\ 2, \ldots .$$

Les relations (6) et (7) conduisent immédiatement à l'inégalité

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \leq \left\{\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right\}_{x=1}, \qquad -1 \leq x \leq +1. \tag{8}$$

On peut calculer la valeur de

$$\frac{d^s}{dx^s}P_n(x) \qquad \text{pour } x=1$$

par le procédé suivant. Prenons l'identité

$$(9)\quad (1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)t^n,\quad (-1\leq x\leq +1,\quad |t|<1),$$

qui définit les polynômes de Legendre.

Si l'on dérive ([1]) s fois par rapport à t les deux membres de (9) et si l'on fait ensuite $x=1$, on obtient

$$\frac{(2s-1)!!\,t^s}{(1-t)^{2s+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right\}_{x=1}\cdot t^n,$$

ou bien

$$(2s-1)!!\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-2s-1}{n}t^{n+s}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right\}_{x=1}\cdot t^n.$$

On en tire

$$(10)\quad \left\{\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right\}_{x=1}=(-1)^{n-s}(2s-1)!!\binom{-2s-1}{n-s}$$
$$=\frac{s!}{2^s}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}$$
$$=(2s-1)!!\binom{n+s}{2s}.$$

Par suite, la relation (8) devient

$$(11)\quad \left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right|\leq\frac{s!}{2^s}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s},\ \text{pourvu que}\ -1\leq x\leq +1$$
$$(n=1,\ 2,\dots;\ s\leq n).$$

Étant donné que $s\leq n$, on a

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)<n^s,$$
$$(n+s)(n+s-1)(n+s-2)\dots(n+1)<(2n)^s,$$

ce qui permet d'établir, à partir de (11),

$$(12)\quad \left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right|<\frac{n^{2s}}{s!},\qquad (-1\leq x\leq +1),$$
$$(n=1,\ 2,\dots;\ s\leq n).$$

Pour les valeurs élevées de n et pour les valeurs suffisamment petites de s par rapport à n, on peut, toujours partant de (11),

([1]) La justification de ce procédé se fait sans difficulté.

établir la formule approximative que voici :

$$\max\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \approx \frac{n^{2s}}{s!\,2^s}, \qquad (-1 \leq x \leq +1), \tag{13}$$

$$(n \text{ grand}, \ s << n).$$

3. À partir de l'inégalité (11) on peut obtenir une autre que nous allons établir dans ce qui suit. Si l'on pose $n-s-1$ à la place de n dans (11), on admet

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_{n-s-1}\right| \leq \frac{s!}{2^s}\binom{n-s-1}{s}\binom{n-1}{s}, \qquad x \in [-1, +1].$$

Pour que la dernière inégalité ait un sens, il faut que

$$n-s-1 \geq s, \ n-1 \geq s,$$

ou bien

$$s \leq \frac{n-1}{2}, \qquad s \leq n-1.$$

Ces deux inégalités se remplacent avec la suivante $s \leq \dfrac{n-1}{2}$, ou, ce qui revient au même, $n \geq 2s+1$.

Si la dernière condition est remplie et étant donné que

$$\binom{n-s-1}{s} = \frac{(n-s-1)(n-s-2)\dots(n-2s)}{s!}, \tag{14}$$

$$\binom{n-1}{s} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-s)}{s!}, \tag{15}$$

on trouve

$$\binom{n-s-1}{s} \leq \frac{n^s}{s!}, \quad \binom{n-1}{s} \leq \frac{n^s}{s!},$$

en majorant par n chacune des différences suivantes

$$n-1, \ n-2, \dots, \ n-s, \ n-s-1, \dots, \ n-2s$$

figurant dans les produits qui se trouvent dans les seconds membres des relations (14) et (15).

Ainsi, nous obtenons l'estimation suivante pour les dérivées du polynôme $P_n(x)$ de Legendre :

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_{n-s-1}\right| \leq \frac{n^{2s}}{2^s\,s!}, \quad x \in [-1, +1],$$

avec

$$n \geq 2s+1, \ (n, \ s \text{ nombres naturels}).$$

Par suite, on a l'estimation

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \leq \frac{(n+s+1)^{2s}}{2^s s!}, \qquad x \in [-1, +1],\ n \geq s.$$

En partant de la dernière relation on peut aussi obtenir la formule (13).

4. En passant, on peut mettre en évidence une identité fournissant les faits indiqués plus haut.

L'identité en question est la suivante

$$\sum_{k=1}^{N} \left\{ \binom{s+k-2}{s-1} (2n-2s-4k+5) \prod_{\mu=2}^{s} (2n-2k-2\mu+5) \right\}$$
$$= \frac{s!}{2^s} \binom{n}{s} \binom{n+s}{s},$$

avec $s \leq n$ et

$$N = \begin{cases} \dfrac{n-s}{2} + 1, & \text{si } n-s \text{ pair,} \\ \dfrac{n-s-1}{2} + 1, & \text{si } n-s \text{ impair.} \end{cases}$$

5. Après la rédaction du texte précédent de cette Note, nous avons rencontré un résultat de G. SANSONE [4], et celui de M. PICONE (²) [5].

G. SANSONE, dans la Note précitée, a montré, en suivant une voie simple et élégante, que

$$(16) \qquad \left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| < \frac{n^{2s}}{s!}, \qquad x \in [-1, +1].$$

Il a fait voir, de même, que l'on a

$$\left|\frac{d}{dx}P_n(x)\right| \leq 2^{2n-2}\, n^2,$$

$$(17) \qquad \left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \leq 2^{2n-2}\, n^2(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)$$
$$(s = 2, 3, \dots, n).$$

M. PICONE [5] a donné une formule de majoration pour $| d^sP_n(z)/dz^s |$, valable dans tout le plan complexe de la variable z. Cette formule a la forme suivante

$$(18) \qquad \left|\frac{d^s}{dz^s}P_n(z)\right| \leq (n\ s)\,\frac{(2n-1)!!}{n!}\,(|z|+1)^{n-s},$$

(²) Nous sommes redevables à Monsieur le Professeur G. SANSONE qui a attiré notre attention sur la Note de PICONE.

avec

$$(n, s) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-s+1), & \text{pour } s \geq 1 \text{ et } n \geq 1, \\ 1, & \text{pour } s = 0. \end{cases}$$

À la suite de la Note de PICONE indiquée plus haut, A. COLUCCI a montré, dans une Note intéressante [6], l'origine vraie du résultat de PICONE.

En comparant les formules de SANSONE et de PICONE avec les nôtres, on arrive aux conclusions que voici:

1° Notre formule (11) donne une estimation qui informe mieux que la formule (16), due à SANSONE, formule que nous avons déduite, d'ailleurs, comme un cas particulier de la formule (11).

En ce qui concerne les formules (17), on peut faire une observation analogue.

2° La formule (18) est très générale, puisqu'elle est valable dans tout le plan de z. Mais si l'on a besoin de donner une estimation, assez précise, pour $| d^sP_n(x)/dx^s |$ sur le segment $[-1, +1]$, la formule de PICONE n'est nullement commode. Par contre, nos formules permettent de serrer $| d^sP_n(x)/dx^s |$ de plus près que ne le fait pas la formule due à M. PICONE. Les exemples numériques le confirment le mieux.

Partant de ces faits, nous pensons que nos formules de majoration peuvent être utiles à côté de celles de SANSONE et de PICONE, car elles s'obtiennent immédiatement, par une voie directe et élémentaire.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] E W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge, 1931, 500 pp.

[2] R. V. CHURCHILL, *Fourier series and boundary value problems*, New York, 1941, 206 pp.

[3] F. G. TRICOMI, *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Berlin - Göttingen Heidelberg, 1955, 264 S. *(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 76)*.

[4] G. SANSONE, *Su una immediata limitazione delle derivate dei polinomi di Legendre* (Bollettino della Unione matematica italiana, serie II, anno IV, 1942, pp. 145-147).

[5] M. PICONE, *Una semplicissima formola di maggiorazione per i polinomi di Legendre e per le loro derivate* (Bollettino della Unione matematica italiana, serie III, anno VIII, 1953, pp. 1-2).

[6] A COLUCCI, *Generale maggiorazione dei polinomi e delle derivate e una sua conseguenza* (Bollettino della Unione matematica italiana, serie III, anno VIII, 1953, pp 258-260).