Lucio Lombardo-Radice

Sul problema dei k-archi completi in $S_{2,q}$. ($q = p^t$, p primo dispari.)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 178–181.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_178_0>

Sul problema dei k-archi completi in $S_{2,q}$.
($q = p^t$, p primo dispari)

Nota di Lucio Lombardo-Radice (a Palermo)

Sunto. - *Vedi il n. 1.*

1. Chiameremo (¹) $S_{2,q}$ il piano lineare sopra il corpo finito (campo di Galois) $C(q)$ con $q = p^t$ elementi; supporremo sempre che p sia un numero primo dispari; chiameremo k-arco un insieme di k punti di $S_{2,q}$ tre a tre non allineati; k-arco *completo* un k-arco non contenuto in un t-arco, per $t > k$. Era ben noto da tempo (v. ad esempio [1]) che, se $p \neq 2$, non esistono k-archi per $k \geq q+2$, e che una conica irriducibile in $S_{2,q}$ è un $(q+1)$-arco. Era stata affacciata, nel 1949, la congettura (Kustaanheimo) che, viceversa, per q dispari ogni $(q+1)$-arco fosse una conica irriducibile. Tale congettura è stata recentemente dimostrata da B. Segre, il quale ha stabilito che:

I. (1° teorema di B. Segre sui k-archi, o teorema di Segre-Kustaanheimo; v. [2]). In $S_{2,q}$ ($q = p^t$, $p \neq 2$), dati $q+1$ punti tre a tre non allineati, essi costituiscono l'insieme dei punti di *una* conica irriducibile.

B. Segre ha successivamente dimostrato che:

II. (2° teorema di B. Segre sui k-archi).

In $S_{2,q}$ ($q = p^t$, $p \neq 2$, $q \geq 5$), ogni q-arco è contenuto in una conica, può cioè essere « ampliato » in un $(q+1)$-arco (conica irriducibile) in uno ed in un sol modo, con l'aggiunta di un ben determinato punto di $S_{2,q}$.

Il 2° teorema di Segre può essere espresso nella forma equivalente:

II'. Se $p \neq 2$, e $q = p^t \geq 5$, non esistono q-archi completi in $S_{2,q}$.

I risultati ora ricordati di B. Segre suggeriscono il seguente problema generale:

Determinare i valori di k *per i quali esistono* k*-archi completi in* $\mathrm{S}_{2,\mathrm{q}}$.

Tale problema, per $k < q+1$, è limitatamente legato alla costruzione di h-archi non contenuti in una conica (cioè in un $(q+1)$-arco). È chiaro infatti che ogni h arco siffatto è contenuto in un k-arco completo, con $k < q+1$.

(¹) Adottando la terminologia e il simbolismo introdotti da B. Segre in [3].

Nella presente nota ([2]) dopo aver fatto vedere, con un procedimento geometrico elementare, la possibilità di costruire, per q dispari e ≥ 7, un $(q+5)/2$-arco non contenuto in una conica, si fa vedere, con una costruzione di tipo aritmetico-geometrico, che, se $q = 4k + 3 (k \neq 0)$, esistono, in $S_{2,q}$, $(q+5)/2$-archi completi.

Si dà anche notizia di qualche risultato particolare ottenuto dalla signorina Rosanna CRUCIANI ([3]). la quale ha, tra l'altro, stabilito su di un esempio che esistono 8-archi completi, e pertanto non contenuti in una conica, in $S_{2,9}$, facendo così vedere che $q = 7$ non è l'unico valore di q per il quale esistono $(q-1)$-archi non contenuti in una conica.

2. Consideriamo una conica irriducibile K in $S_{2,q}$ $(q = p^t$, p primo dispari). È noto che i q^2 punti di $S_{2,q}$ non appartenenti a K si dividono in due classi: a) quella costituita dai $q(q+1)/2$ punti *esterni* a K, cioè dai punti di $S_{2,q}$ per i quali passano *due* rette tangenti alla conica (aventi *un* punto su K), e $(q-1)/2$ secanti (aventi *due* punti su K); b) quella costituita dai $q(q-1)/2$ punti *interni* a K; tra le $(q+1)$ rette di $S_{2,q}$ per un punto siffatto non vi sono rette tangenti, ma vi sono $(q+1)/2$ secanti.

Preso allora un punto interno P_i, « togliamo » dai punti di K *un* punto per ciascuna delle $(q+1)/2$ secanti; rimangono $(q+1)/2$ punti di K. Aggiungiamo ad essi P_i: otteniamo un insieme di punti A composto da $(q+3)/2$ punti. A, per il modo stesso in cui è stato costruito, è evidentemente un $(q+3)/2$-arco (nessuna « corda » avente per estremi due punti distinti di A diversi da P_i può passare per P_i).

Procediamo in modo analogo a partire da un punto P_e esterno a K; togliamo cioè da K un punto su ciascuna delle $(q-1)/2$ corde di K (secanti) per P_e, e aggiungiamo P_e ai $(q+3)/2$ punti rimanenti. Otteniamo un insieme A' costituito da $(q+5)/2$ punti, il quale è un $(q+5)/2$-arco. Se $(q+3)/2 \geq 5$, cioé se $q \geq 7$, *l'arco* A' *è un* (q + 5)/2-*arco non contenuto in una conica.*

Gli archi A' (q dispari ≥ 7) sono inoltre archi, non contenuti in una conica, contenenti il massimo numero possibile di punti di una conica. Tale numero è infatti $(q+3)/2$, giacchè le corde congiungenti due a due $(q+5)/2$ punti comunque presi su di una conica irriducibile K « invadono » $S_{2,q} - K$ (perchè un punto P

([2]) La presente nota è, con qualche lieve aggiunta, il testo della comunicazione dal medesimo titolo svolta dall'autore alla Sezione di Geometria del V° Congresso dell'U. M. I., a Pavia, il 7 ottobre 1955

([3]) In una tesi di laurea svolta sotto la guida di B. SEGRE e dell'autore di questa nota.

fuori di una conica irriducibile K non appartenga a nessuna corda avente per estremi due punti di un k-arco estratto da K, occorre « togliere » da K almeno un punto per ciascuna delle corde della conica passanti per P, le quali corde sono almeno $(q-1)/2$, ecc.).

Per $q=7$, $(q+5)/2=6$; si costruiscono così 6-archi in $S_{2,7}$ non contenuti in una conica ([4]) (e pertanto completi, per il 1° teorema di SEGRE). Da ciò si vede che il 2° teorema di SEGRE (nella forma II') non può, almeno senza qualche più forte limitazione per q, essere esteso dai q-archi ai $(q-1)$-archi di $S_{2,q}$. La signorina CRUCIANI, come si è accennato alla fine di 1, è riuscita, nel caso $q=9$, ad aggiungere a un $(q+5)/2$-arco A', cioè a un 7-arco A' di $S_{2,9}$, un ulteriore punto in modo da ottenere un 8-arco completo in $S_{2,9}$; se perciò l'analogo di II' è valido per $k=q-1$, dovrà essere almeno $q \geq 11$.

3. Dimostriamo ora il seguente teorema:

III. *Se* $\mathrm{q}=4\mathrm{k}+3$ $(\mathrm{k}\neq 0)$, *si può costruire in* $\mathrm{S}_{2,\mathrm{q}}$ *un* $(\mathrm{q}+5)/2$-*arco del tipo* A' (vedi il n. 2), *il quale è completo in* $\mathrm{S}_{2,\mathrm{q}}$.

La conica irriducibile K dalla quale si parte abbia l'equazione:

$$(K) \qquad xy - z^2 = 0.$$

Tale conica passa per i punti impropri degli assi coordinati; i suoi $q-1$ punti propri possono essere suddivisi in due classi, composte ciascuna da $(q-1)/2$ punti, che saranno da noi chiamate *rami*, per una ragione che apparirà tra un momento:

1) il *ramo dei residui*, costituito dai punti $(a^{2i}, a^{-2i}, 1)$, ([5]) per i quali x e y, quando si assuma $z=1$, sono residui quadratici in $C(q)$;

2) il *ramo dei non residui*, costituito dai punti $(a^{2k+1}, a^{-(2k+1)}, 1$

L'uso del: termine « ramo », ha la seguente giustificazione: si controlla senza difficoltà, usando ad esempio un criterio analitico di QVIST [1], che il punto all'infinito della corda congiungente due punti propri di K è esterno o interno a seconda che i due punti appartengano o no a un medesimo ramo.

In $C(q)$, -1 è residuo quadratico o no a seconda che $q=4k+1$ o $q=4k+3$; ([6]) perciò quando e soltanto quando $q=4k+3$ un punto proprio $(a^t, a^{-t}, 1)$ di K e il suo simmetrico $(-a^t, -a^{-t}, 1)$

([4]) Un esempio concreto, numerico, di 6-arco completo in $S_{2,7}$ era stato dato oralmente da B. SEGRE nel corso di Geometria Superiore all'Università di Roma, nella primavera del 1955, ed è esposto in [3], p. 378.

([5]) Con a indichiamo un generatore del gruppo (ciclico) moltiplicativo degli elementi non nulli di $C(q)$; $a^q=1$, $a^t \neq 1$, se $t<q$.

([6]) Si tratta di un classico teorema di FERMAT-EULERO.

rispetto all'origine O appartengono a rami diversi (O è in ogni caso un punto esterno a K, giacchè gli assi coordinati sono tangenti a K). Affermiamo ora che i $(q-1)/2$ punti di un ramo, ad esempio quelli del ramo dei residui, insieme ai punti impropri degli assi e dell'origine O, costituiscono un $(q+5)/2$-arco A' *completo* di $S_{2,q}$.

A' è intanto un $(q+5)/2$-arco, giacchè è stato ottenuto da K con la costruzione del n. 2. Facciamo ora vedere che le corde di A' invadono $S_{2,q}$, e che pertanto A' è completo. Consideriamo le corde di A' passanti per O; esse sono gli assi, e le $(q-1)/2$ rette di equazione:

$$x = a^{2j}y, \; j = 1, \dots, (q-1)/2.$$

Un punto proprio $(x', y', 1)$ di $S_{2,q}$ non giacente su dette corde di A', apparterrà necessariamente a una retta per O di equazione:

$$x = a^{2t+1}y, \; t = 1, \dots, (q-1)/2.$$

Ma se per un punto siffatto y' è residuo, $x' = a^{2t+1}y'$ è non residuo, e viceversa; tale punto appartiene perciò ad una corda di A', ed esattamente alla $y = y'$, se y' è residuo, alla $x = x'$ se x' è residuo (sulla $y = y'$ giacciono due punti di A': il punto improprio dell'asse x, il punto $(y'^{-1}, y', 1)$, ecc.). La retta impropria, congiungente i punti impropri degli assi, è anche corda di A'; le corde di A' invadono $S_{2,q}$, A' è completo.

Se invece dell'arco A' sopra definito si considera l'arco A_1' che si ottiene da A' sostituendo a un punto del ramo dei residui il suo simmetrico rispetto ad O sul ramo dei non residui (per es. sostituendo al punto $(1, 1, 1)$ il punto $(-1, -1, 1)$), si è controllato con il calcolo diretto che, per $q = 19 = 4 \cdot 4 + 3$ si ottiene ancora un $(q+5)/2$-arco, cioè un 12-arco, completo, mentre per $q = 11 = 4 \cdot 2 + 3$ si ottiene un 8-arco incompleto, contenuto in un 9-arco completo.

Nel caso $q = 4k + 1$, e precisamente nel caso $q = 13$, la signorina CRUCIANI ha ottenuto in $S_{2,13}$ un 10-arco completo, ampliamento di un $(q+5)/2$-arco, cioè di un 9-arco, del tipo A (vedi n. 2).

BIBLIOGRAFIA

[1] B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Annales Academiae Scientiarum Fennicae », serie A, 134, 1952.

[2] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, «Canadian J. of Math»,7 (1955).

[2'] B. SEGRE, *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », serie VIII, vol. XVII, fasc. 5, novembre 1954 (nota preventiva).

[3] B. SEGRE, *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti*, « Annali di Matematica pura e applicata », IV Serie, **39** (1955).