Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Le trasformazioni puntuali che posseggono rette ipercaratteristiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 182–188.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_182_0>

Le trasformazioni puntuali che posseggono rette ipercaratteristiche

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna)

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni fra due spazi proiettivi per le quali, in ogni coppia di punti corrispondenti, esiste una retta tale che le curve ad essa tangenti vengono mutate dalla trasformazione e da una opportuna omografia tangente in due curve aventi contatto analitico del 3° ordine.*

1. - Consideriamo una trasformazione puntuale T fra due spazi proiettivi S_r, $\bar{S}_r$ e sia $(A, \bar{A})$ una coppia regolare di punti corrispondenti. È ben noto [1] che esistono certe rette uscenti da A in S_r (e da $\bar{A}$ in $\bar{S}_r$) che diconsi *rette caratteristiche* della trasformazione T nella coppia $(A, \bar{A})$. Fra le varie definizioni di retta caratteristica, per ciò che intendo esporre nella presente Nota, riporterò la seguente: la retta a uscente da A è caratteristica se ogni curva γ di S_r, passante semplicemente per A e ivi tangente ad a viene mutata da T e da qualche omografia K, tangente a T nella coppia $(A, \bar{A})$ in due curve $T\gamma$ e $K\gamma$, aventi in $\bar{A}$ contatto analitico del 2° ordine. Come è noto fra le ∞^r omografie tangenti ve ne sono ∞^{r-1} che godono della proprietà richiesta; per tutte le altre invece il contatto fra $T\gamma$ e $K\gamma$ è contatto ordinario del 2° ordine. Le rette caratteristiche uscenti da A in S_r (o da $\bar{A}$ in $\bar{S}_r$) sono le generatrici base di un sistema di coni cubici [2] col vertice in A.

Il VILLA [3] considerando più generalmente due trasformazioni T_1, T_2 fra S_r, $\bar{S}_r$ aventi contatto d'ordine s assegnato in una coppia comune $(A, \bar{A})$, ha studiato il modo di operare delle due trasformazioni su di una stessa curva γ di S_r passante per A, e di tale questione si è occupato successivamente anche G. VAONA [4].

(1) Si veda ad esempio: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Note I, II, III, Rend. Acc. Naz. Lincei, 8 (4) 1948, 55-61, 102-106, 295-303.

(2) Si veda ad esempio: L. MURACCHINI, *Trasformazioni puntuali fra due spazi che posseggono un'unica congruenza di curve caratteristiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Torino, 12 (1952-53), 159-176.

(3) M. VILLA, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, Boll. U.M.I., 3 (2) 188-195 (1947).

(4) G. VAONA, *Elementi differenziali d'iperosculazione di due trasformazioui puntuali*, Boll. U.M.I, 3 (3), 40-46 (1948).

Il presente lavoro appartiene anch'esso a tale ordine di idee. La questione che qui ci si propone di esaminare è la seguente: a quali condizioni, per una trasformazione T in una coppia $(A, \bar{A})$, esiste una retta a, uscente da A, tale che ogni curva γ di S, uscente da A e tangente ivi ad a viene mutata da T e da una omografia K_0, tangente a T in $(A, \bar{A})$, in due curve $T\gamma$ e $K\gamma$ aventi in $\bar{A}$ *contatto analitico del 3° ordine.* Una retta a cosifatta la chiamerò *retta ipercaratteristica* di T in $(A, \bar{A})$ e l'omografia K_0, che, come risulterà, è unica, *omografia ipercaratteristica.*

Ebbene dimostreremo che: *condizione necessaria* (ma non sufficiente) *affinchè una retta* a, *uscente dal punto* A *sia ipercaratteristica è che essa sia generatrice base doppia del sistema di coni che forniscono le rette caratteristiche uscenti da* A. Inoltre dimostreremo che si presenta la seguente circostanza interessante: *la precedente condizione necessaria in una coppia, diventa anche sufficiente se la si suppone verificata in ogni coppia e se* r > 2; *non è invece sufficiente, anche se verificata in ogni coppia, per* r $= 2$.

Le trasformazioni T che posseggono in ogni coppia una retta ipercaratteristica godono di notevoli proprietà atte a caratterizzarle; dimostreremo infatti che: *le curve ipercaratteristiche,* cioè quelle che hanno in ogni punto come tangente la retta ipercaratteristica uscente da quel punto, *sono sempre rette* e la corrispondenza subordinata fra due tali rette dalla T è proiettiva

Su tali proprietà si può fondare la costruzione delle trasformazioni in esame.

Infine osserverò che le trasformazioni T di cui si tratta sono fra quelle per le quali, in ogni coppia, esiste un'omografia tangente la cui corrispondenza linearizzante è degenere di 1ª specie [5].

Mi limiterò a trattare il caso $r = 3$ perchè in tale caso i calcoli non sono inutilmente complicati, mentre l'estensione al caso $r > 3$ qualunque non presenta difficoltà, escluse le complicazioni formali [6].

2. - Esamineremo in seguito, a parte, il caso $r = 2$. Consideriamo dunque una trasformazione T fra due spazi ordinari $S_3(x_1, x_2, x_3)$,

(5) Il VILLA ha conseguito recentemente risultati notevoli considerando corrispondenze linearizzanti relative alla trasformazione data e a trasformazioni cremoniane osculatrici. Si veda ad es. M. VILLA, questo stesso Bollettino, pag. 141.

(6) Del resto per l'estensione basterà utilizzare le formule già stabilite nell'op. cit. in (2).

$\overline{S}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Le lettere in parentesi indicano coordinate proiettive non omogenee relative a riferimenti in cui si corrispondono le origini $A(0, 0, 0)$. $\overline{A}(0, 0, 0)$ in T. Le equazioni di T, sviluppate in serie, secondo le potenze della x_i, sono

$$\xi_i = x_i + \sum_{1}^{3}{}_{l,m}\, a^i{}_{lm} x_l x_m + \sum_{1}^{3}{}_{l,m,n}\, a^i{}_{lmn} x_l x_m x_n + [4] \tag{1}$$

con $a^i{}_{lm} = a^i{}_{ml}$, $a^i{}_{lmn} = a^i{}_{mln} = a^i{}_{nlm}$ ecc., $(i = 1, 2, 3)$ quando si supponga che i riferimenti in S_3, $\overline{S}_3$ si corrispondano in una qualsiasi omografia tangente. Le equazioni della ∞^3 omografie tangenti sono poi:

$$\xi_i = x_i(1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)^{-1}, \tag{2}$$

Ora cerchiamo le condizioni affinchè la retta a, $x_1 = x_2 = 0$, sia ipercaratteristica; consideriamo la curva γ (limitatamente all'intorno del 3° ordine) di S_3 uscente da A e tangente ivi ad a

$$(\gamma) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_2 x_3{}^2 + \alpha_3 x_3{}^3 \\ x_2 = \beta_2 x_3{}^2 + \beta_3 x_3{}^3 . \end{cases}$$

Le due trasformate mediante T e una generica omografia tangente sono:

$$(T\gamma) \quad \begin{cases} \xi_1 = (\alpha_2 + a^1{}_{33})\, x_3{}^2 + (\alpha_3 + 2a^1{}_{13}\, \alpha_2 + 2a^1{}_{23}\, \beta_2 + a^1{}_{333})\, x_3{}^3 \\ \xi_2 = (\beta_2 + a^2{}_{33})\, x_3{}^2 + (\beta_3 + 2a^2{}_{13}\, \alpha_2 + 2a^2{}_{23}\, \beta_2 + a^2{}_{333})\, x_3{}^3 \\ \xi_3 = x_3 + a^3{}_{33}\, x_3{}^2 + (2a^3{}_{13}\alpha_2 + 2a^3{}_{13}\, \beta_2 + a^3{}_{333})\, x_3{}^3 \end{cases}$$

ed

$$(K\gamma) \quad \begin{cases} \xi_1 = \alpha_2\, x_3{}^2 + (\alpha_3 - \lambda_3\, \alpha_2)\, x_3{}^3 \\ \xi_2 = \beta_2\, x_3{}^2 + (\beta_3 - \lambda_3 \beta_2)\, x_3{}^3 \\ \xi_3 = x_3 - \lambda_3\, x_3{}^2 + (-\lambda_1\, \alpha_2 - \lambda_2\, \beta_2 + \lambda^2{}_3)\, x_3{}^3 . \end{cases}$$

Per avere il contatto analitico del 3° ordine deve dunque essere:

$$a^1{}_{33} = a^2{}_{33} = a^1{}_{23} = a^2{}_{13} = a^3{}_{33} - 2a^1{}_{13} = a^3{}_{33} - 2a^2{}_{23} = 0 , \tag{3}$$

$$a^1{}_{333} = a^2{}_{333} = 0 , \tag{4}$$

$$a^3{}_{333} = (a^3{}_{33})^2 , \tag{5}$$

$$\lambda_1 = -2a^3{}_{13} , \quad \lambda_2 = -2a^3{}_{23} . \quad \lambda_3 = -a^3{}_{33} . \tag{6}$$

Ma le rette caratteristiche di T, uscenti da A, sono le generatrici base della rete di coni cubici:

$$\sum_{1}^{3}{}_{i,j}\, \mu_{ij}(x_i\, \Omega_j - x_j\, \Omega_i) = 0 \qquad (\mu_{ij},\ \text{parametri}) \tag{7}$$

dove

$$\Omega_i = \sum_{1}^{3}{}_{lm}\, a^i{}_{lm}\, x_l\, x_m\,.$$

Le (3) mostrano dunque che la retta a, $x_1 = x_2 = 0$, è generatrice base doppia della rete (7). Le (6) mostrano che è unica l'omografia K_0 per cui $T\gamma$ e $K\gamma$ hanno in $\overline{A}$ contatto analitico del 3° ordine. Assumendo i riferimenti in S_3, $\overline{S}_3$ che si corrispondano nella omografia ipercaratteristica K_0, le equazioni di T diventano (fino al 2° ordine):

$$\xi_i = x_i + \sum_{1}^{2}{}_{l,\,m}\, a^i{}_{l,\,m}\, x_l\, x_m + [3]. \tag{8}$$

La corrispondenza linearizzante relativa a K_0, che ha le equazioni

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Omega_1 : \Omega_2 : \Omega_3\,, \tag{9}$$

è dunque degenere di 1ª specie. La condizione (5) diventa ora

$$a^3{}_{333} = 0. \tag{10}$$

3. - Esaminiamo ora dapprima il caso $r = 2$. Semplici calcoli, analoghi a quelli effettuati sopra per $r = 3$, mostrano che: una retta a è ipercaratteristica se è caratteristica doppia (cioè conta per due fra le tre rette caratteristiche attualmente esistenti). Tale condizione per l'ipercaratteristicità di a non è sufficiente nemmeno se è verificata in ogni coppia. In tale caso infatti la T diventa una trasformazione di 2ª specie e da quanto è noto per le trasformazioni di tale tipo risulta che esse presentano la particolarità richiesta (cioè di avere in ogni coppia una retta ipercaratteristica) soltanto quando le caratteristiche doppie sono rette (7) e questa ulteriore condizione è sufficiente.

Veniamo ora al caso $r = 3$. Dimostriamo che:

Se in ogni coppia di punti corrispondenti in una trasformazione T *esiste una retta* a *base doppia della rete di coni cubici* (7), *avente per generatrici base le rette caratteristiche di* T, *allora* a *è ipercaratteristica e le relative curve caratteristiche sono rette.*

Prima di dare la dimostrazione della proposizione ora enunciata è necessario premettere la seguente osservazione: le equazioni (8) della trasformazione T non sono canoniche poichè il riferimento non è completamente fissato in modo intrinseco in S_3. È facile

(7) Si veda: L. Muracchini, *Sulle trasformazioni puntuali di seconda e terza specie fra piani proiettivi*, Mem. Acc. Sci. Torino, 3 (1) a pag. 32 e segg. (1953). Si veda anche: F. Speranza, questo stesso Bollettino, pag. 210.

verificare che, con un opportuno cambiamento di riferimento, si può fare assumere ai coefficienti a_{22}^1, a_{11}^2, valori arbitrari salvo che le forme Ω_1, Ω_2 non siano identicamente nulle [8]. Ma quest'ultimo caso si presenta per quelle trasformazioni che in ogni coppia posseggono due piani di rette caratteristiche, esse sono state determinate e studiate dal Čech [9] e si può verificare direttamente che soddisfano all'enunciato dato sopra. Escluderemo dunque tale caso e, in virtù dell'osservazione fatta, potremo sempre supporre che risulti

$$\begin{vmatrix} a_{12}^1 & a_{22}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{11}$$

Consideriamo dunque ora una trasformazione T che in ogni coppia di punti corrispondenti possegga una retta a, generatrice base doppia per la rete di coni cubici relativa alle rette caratteristiche di T. Si vede subito che le equazioni di T, fino all'intorno del 2° ordine, relative ad una coppia generica si possono ridurre alla forma (8), valendo la (11), se si esclude il caso indicato prima. Associando ad ogni coppia i riferimenti per cui valgono le (8) si hanno per gli spostamenti infinitesimi di tali riferimenti le formule

$$\begin{aligned} dA_i &= \omega_{i0} A_0 + \omega_{i1} A_1 + \omega_{i2} A_2 + \omega_{i3} A_3 \\ dB_i &= \tau_{i0} B_0 + \tau_{i1} B_1 + \tau_{i2} B_2 + \tau_{i3} B_3 \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{12}$$

dove $A_0 \equiv A$, $B_0 \equiv \bar{A}$ e i punti A_i, B_i rimanenti sono i punti fondamentali dei riferimenti considerati sopra. Si ha, poichè i riferimenti si corrispondono in una omografia tangente a T in $(A, \bar{A})$:

$$\tau_{0i} = \omega_{0i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Note formule [10] che collegano le forme di Pfaff ω_{ij}, τ_{ij} con gli sviluppi locali (8), permettono di giungere immediatamente alle relazioni seguenti, che del resto si ottengono anche derivando esternamente le (13) e imponendo a T le condizioni volute:

$$\begin{aligned} \tau_{11} - \omega_{11} - \tau_{00} + \omega_{00} &= c^1_{11}\,\omega_{01} + c^1_{12}\,\omega_{02} \\ \tau_{21} - \omega_{21} &= c^1_{12}\,\omega_{01} + c^1_{22}\,\omega_{02} \\ \tau_{31} - \omega_{31} &= 0. \end{aligned} \tag{14'}$$

[8] Oppure che lo siano tutte e tre le Ω_i. In tale caso, se la circostanza si verifica in ogni coppia, è noto che T si riduce ad una omografia.

[9] E. Čech, op. cit. in [5], Parties II e III, Čas pro Pest. Mat. a Fys., 75 (1950) 123-136 e 137-157.

[10] Si veda l'op. cit. in [2] a pag. 164 e segg.

$$\begin{aligned}(14'')\qquad \tau_{12} - \omega_{12} &= c^2{}_{11}\,\omega_{01} + c^2{}_{12}\,\omega_{02}\\ \tau_{22} - \omega_{22} - \tau_{00} + \omega_{00} &= c^2{}_{12}\,\omega_{01} + c^2{}_{22}\,\omega_{02}\\ \tau_{32} - \omega_{32} &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(14''')\qquad \tau_{13} - \omega_{13} &= c^3{}_{11}\,\omega_{01} + c^3{}_{12}\,\omega_{02}\\ \tau_{23} - \omega_{23} &= c^3{}_{12}\,\omega_{01} + c^3{}_{22}\,\omega_{02}\\ \tau_{33} - \omega_{33} - \tau_{00} + \omega_{00} &= 0.\end{aligned}$$

La direzione della retta a base doppia per la rete dei coni cubici (7) è $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$ e si hanno le relazioni

$$(15)\qquad c^i{}_{lm} = 2a^i{}_{lm}$$

che collegano le (14) con le (8).

La derivazione esterna delle (14) conduce a certe relazioni delle quali scriveremo soltanto le seguenti che conducono al risultato voluto:

$$(16)\qquad\begin{aligned} c^1{}_{12}\,\omega_{31} + c^1{}_{22}\,\omega_{32} &= \lambda\omega_{01} + \mu\,\omega_{02}\\ c^2{}_{11}\,\omega_{31} + c^2{}_{12}\,\omega_{32} &= \alpha\omega_{01} + \beta\omega_{02}\\ (\tau_{30} - \omega_{30}) + c^1{}_{11}\,\omega_{31} + c^1{}_{12}\,\omega_{32} &= h\omega_{01} + h\,\omega_{02}\\ (\tau_{30} - \omega_{30}) + c^2{}_{12}\,\omega_{31} + c^2{}_{22}\,\omega_{32} &= \gamma\omega_{01} + m\,\omega_{02}\end{aligned}$$

Tenuto conto delle (11) e (15) si conclude che

$$(17')\qquad [\omega_{31}\,\omega_{01}\,\omega_{02}] = [\omega_{32}\,\omega_{01}\,\omega_{02}] = 0$$

$$(17'')\qquad [(\tau_{30} - \omega_{30})\,\omega_{01}\,\omega_{02}] = 0\,.$$

Le (17') significano che ogni curva definita dalle $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$, cui è tangente in ogni punto A la retta a uscente da quel punto, è una retta. Infatti per $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$ si ha:

$$d^2A = (d\omega_{00} + \omega^2{}_{00} + \omega_{03}\,\omega_{30})A + (d\omega_{03} + \omega_{03}\,\omega_{00} + \omega_{03}\,\omega_{33})A_3$$

sicchè risulta su ogni curva $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$

$$[A,\ dA,\ d^2A] = 0\,.$$

La (17'') mostra poi che la retta a è ipercaratteristica. Infatti note formule già ricordate ([11]) danno per il coefficiente $a^3{}_{333}$ delle

([11]) Cfr. l'op. cit. in ([2]) a pag. 165.

equazioni (8) relative alla trasformazione in esame:

$$(18)\quad 3\,\{a^3{}_{331}\,\omega_{01}+a^3{}_{332}\,\omega_{02}+a^3{}_{333}\,\omega_{03}\}=da^3{}_{33}+a^3{}_{33}(\tau_{33}-\tau_{00})-$$
$$-2a^3{}_{33}(\omega_{33}-\omega_{00})+a^1{}_{33}\tau_{13}+a^2{}_{33}\tau_{23}-2a^3{}_{13}\omega_{31}-2a^3{}_{23}\omega_{32}+\omega_{30}-\tau_{30}.$$

e poichè attualmente $a^3{}_{33}=a^1{}_{33}=a^2{}_{33}=a^3{}_{13}=a^3{}_{23}=0$ in ogni coppia, sicchè anche:

$$da^3{}_{33}=0\,;$$

e dato inoltre che vale la (17''), il coefficiente di ω_{03} nel secondo membro di (18) è nullo; pertanto si deve avere

$$a^3{}_{333}=0$$

ed è così soddisfatta la condizione (10). Il teorema è così completamente dimostrato.

Che la T subordini poi fra due rette $\omega_{01}=\omega_{02}=0$ corrispondenti una proiettività segue subito se si tien presente che quelle rette sono ipercaratteristiche e quindi la corrispondenza fra esse subordinata da T è approssimata, in ogni coppia, fino al 3° ordine da una proiettività e pertanto è essa stessa una proiettività.

La proprietà delle trasformazioni T sopra esaminate, di mutare ∞^2 rette di S_3 in ∞^2 rette di $\overline{S}_3$ subordinando fra rette corrispondenti una proiettività risulta caratteristica quando si aggiunga la condizione che in ciascuna di quelle proiettività si corrispondono i punti di incidenza di una retta con quelle infinitamente vicine e incidenti. La verifica non presenta difficoltà. Ad esempio: se le ∞^2 rette di S_3 costituiscono una congruenza generale, sia $x(u,\ v)$ il punto di S_3 che descrive un primo fuoco e sia esso così normalizzato che x_u descriva l'altro fuoco. Analogamente in $\overline{S}_3$ sia $y(u,\ v)$ il punto che descrive un primo fuoco della congruenza in quello spazio e y_u l'altro fuoco. Allora la corrispondenza definita dalla

$$\begin{cases} X=x(u,\ v)+wx_u(u,\ v)\\ Y=y(u,\ v)+\overline{w}y_u(u,\ v)\end{cases}$$

con

$$\overline{w}=\alpha(u,\ v)\,w$$

$\alpha(u,\ v)$ arbitraria, è del tipo voluto, in quanto, come si verifica [12] subito, le caratteristiche $du=dv=0$ sono generatrici doppie, in ogni coppia, dei coni cubici che determinano le rette caratteristiche.

[12] Si potranno utilizzare le equazioni a pag. 227 del lavoro di G. VAONA: *Le trasformazioni fra due spazi che posseggono iperpiani di rette caratteristiche*, Rend. Sem. Mat. Torino, 12 (1952-53).