Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Gatteschi

Una nuova rappresentazione asintotica dei polinomi di Legendre mediante funzioni di Bessel.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 203–209.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_203_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Una nuova rappresentazione asintotica dei polinomi di Legendre mediante funzioni di Bessel.

Nota di LUIGI GATTESCHI (a Bari)

Sunto. - *Si stabilisce una formula del tipo di* HILB, *per la valutazione asintotica dei polinomi di* LEGENDRE, *determinando un secondo termine; nel n. 3 se ne fa applicazione al calcolo degli zeri degli stessi polinomi.*

1. Per la valutazione del polinomio $P_n(\cos\vartheta)$ di LEGENDRE sussiste la seguente formula asintotica di HILB [1]

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\vartheta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} + \sigma(\vartheta), \tag{1}$$

dove $J_0(x)$ rappresenta la funzione di BESSEL di prima specie e di ordine zero, e per il termine complementare $\sigma(\vartheta)$ si ha [2]

$$|\sigma(\vartheta)| < 0{,}09\vartheta^2, \quad \text{per } 0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2n},$$

$$|\sigma(\vartheta)| < 0{,}358\vartheta^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{2}} + 0{,}394\vartheta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}, \quad \text{per } \frac{\pi}{2n} < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Se poi osserviamo che, per $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2$, è

$$\vartheta^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{2}} < \vartheta^{\frac{1}{2}} \frac{2n}{\pi} n^{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{\pi} \vartheta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}},$$

e quindi

$$0{,}358\vartheta^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{2}} + 0{,}394\vartheta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}} < \left(0{,}358\frac{2}{\pi} + 0{,}394\right)\vartheta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}},$$

potremo anche scrivere più semplicemente

$$\left\{\begin{aligned} &|\sigma(\vartheta)| < 0{,}09\vartheta^2, \quad \text{per } 0 < \vartheta \leq \pi/2n, \\ &|\sigma(\vartheta)| < 0{,}622\vartheta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}, \quad \text{per } \pi/2n < \vartheta \leq \pi/2. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Stabiliremo ora la nuova formula asintotica

$$\boxed{\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\vartheta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} - \frac{\vartheta}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)} J_1\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} + \varepsilon(\vartheta)}, \tag{3}$$

[1] E. HILB, *Ueber die Laplacesche Reihe*, « Math. Zeitsch. », vol. 5, (1919), pp. 17-25; vol. 8, (1920), pp. 79-90.

[2] L. GATTESCHI, *Limitazione dell'errore nella formula di Hilb e una nuova formula per la valutazione asintotica degli zeri dei polinomi di Legendre*, « Boll. Unione Mat. Ital. », (3), vol. 7, pp. 272-281.

dove

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{ll} \varepsilon(\vartheta) = \vartheta^4 O(1), & \text{per } 0 < \vartheta \leq \pi/2n, \\ \varepsilon(\vartheta) = \vartheta^{\frac{5}{2}} O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), & \text{per } \vartheta/2n < \vartheta \leq \pi \; 2, \end{array} \right| .$$

La funzione $\left(\dfrac{\operatorname{sen} \vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \vartheta)$ soddisfa alla seguente equazione integrale del tipo di VOLTERRA ([3])

$$(5) \qquad \left(\frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \vartheta) = J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{8} \int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) t^{-1} \left\{ \left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 \right\} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos t) dt,$$

dove

$$(6) \quad \Delta(t, \vartheta) = J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} Y_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} - Y_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\},$$

avendo denotato con $Y_0(x)$ la funzione di BESSEL di seconda specie e di ordine zero, legata, come noto, alla $J_0(x)$ dalla relazione

$$(7) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \log \frac{x}{2}\right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2} x\right)^{2r}}{(r!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right\},$$

essendo γ la costante di EULERO-MASCHERONI.

Sostituendo la (1) nell'integrale a secondo membro della (5) si ha

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \vartheta) = J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{8} \int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) t^{-1} \left\{ \left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 \right\} J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} dt +$$

$$+ \frac{\pi}{8} \int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) t^{-1} \left\{ \left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 \right\} \sigma(t) dt,$$

ed osservato che è

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 = \frac{t^2}{3} + K(t) t^4, \qquad K(t) = O(1),$$

([3]) G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », XXIII, New York, (1939), p. 207.

otteniamo

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\vartheta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} + \tag{8}$$

$$+\frac{\pi}{24}\int_0^\vartheta \Delta(t,\vartheta) t J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}dt + \frac{\pi}{8}\int_0^\vartheta \Delta(t,\vartheta)K(t)t^3 J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}dt +$$

$$+\frac{\pi}{8}\int_0^\vartheta \Delta(t,\vartheta)t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}\sigma(t)dt.$$

Per il calcolo del primo integrale a secondo membro della (8) si osservi che esso conduce per la (6) al calcolo degli integrali

$$\int_0^\vartheta Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} t dt, \qquad \int_0^\vartheta J_0^2\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} t dt. \tag{9}$$

Se teniamo conto delle note relazioni

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dJ_\nu(z)}{dz} &= \frac{\nu}{z}J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z),\\ \frac{dJ_\nu(z)}{dz} &= -\frac{\nu}{z}J_\nu(z) + J_{\nu-1}(z),\end{aligned}\right. \tag{10}$$

e delle analoghe per le funzioni $Y_\nu(z)$, si ha subito

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{2}\{J_0(z)Y_0(z) + J_1(z)Y_1(z)\}\right] = zJ_0(z)Y_0(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{2}\{J_0^2(z) + J_1^2(z)\}\right] = zJ_0^2(z),$$

ed entrambe queste relazioni ci occorrono per la valutazione dei due integrali (9).

Così pure avendosi per $z \to 0$

$$\left\{\begin{aligned} J_0(z) &\backsim 1,\\ J_1(z) &\backsim z,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} Y_0(z) &\backsim \log\frac{1}{z},\\ Y_1(z) &\backsim z^{-1},\end{aligned}\right. \tag{11}$$

ne segue

$$\int_0^\vartheta Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} t dt =$$

$$= \frac{\vartheta^2}{2}\left[J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} + J_1\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} Y_1\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}\right],$$

$$\int_0^\vartheta J_0^2\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} t dt = \frac{\vartheta^2}{2}\left[J_0^2\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} + J_1^2\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}\right],$$

e quindi

$$\int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} t dt =$$

$$= \frac{\vartheta^2}{2} J_1 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} \left[J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} Y_1 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} - \right.$$

$$\left. - Y_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} J_1 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} \right].$$

Ma per le (10) è

$$J_0(z) Y_1(z) - Y_0(z) J_1(z) = - J_0(z) Y_0'(z) + Y_0(z) J_0'(z) =$$

$$= - \begin{vmatrix} J_0(z) & Y_0(z) \\ J_0'(z) & Y_0'(z) \end{vmatrix} = \frac{-2}{\pi z},$$

ed allora

$$\int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} t dt = \frac{-\vartheta}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} J_1 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\}. \tag{12}$$

Da questa segue appunto la

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \vartheta) = J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} - \frac{\vartheta}{24\left(n + \frac{1}{2}\right)} J_1 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} + \varepsilon(\vartheta), \tag{3}$$

dove abbiamo posto

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{\pi}{8} \int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) K(t) t^3 J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} dt + \tag{13}$$

$$+ \frac{\pi}{8} \int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) t^{-1} \left\{ \left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 \right\} \sigma(t) dt.$$

2. Per la valutazione di $\varepsilon(\vartheta)$ supponiamo dapprima che sia $0 < \vartheta \leq \pi/2n$. Dalla (7) e dalle (11) si ha

$$Y_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} = \frac{2}{\pi} \log \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} + O(1),$$

e quindi

$$\Delta(t, \vartheta) = \frac{-2}{\pi} J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} \log \frac{\vartheta}{t} + O(1) =$$

$$= O(1) \log \frac{\vartheta}{t} + O(1).$$

Osservato inoltre che

$$t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2-1\right\}\sigma(t)=O(1)t^3.$$

avremo

$$\varepsilon(\vartheta)=O(1)\int_0^{\vartheta}t^2\log\frac{\vartheta}{t}\,dt+O(1)\int_0^{\vartheta}t^3dt=$$

$$=O(1)\vartheta^4\int_0^1 z^3\log\frac{1}{z}\,dz+\vartheta^4O(1),$$

cioè

$$\varepsilon(\vartheta)=\vartheta^4O(1),\qquad (0<\vartheta\leq\pi/2n),$$

ed è così provata la prima delle (4).

Per il caso $\pi/2n<\vartheta\leq\pi/2$ si tenga presente che quando $z\to\infty$ è

$$J_0(z)=O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right),\qquad Y_0(z)=O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)$$

ed allora il contributo dell'intervallo $0<t\leq\pi/2n$ al primo integrale della (13), tenuto conto che $(n+1/2)\vartheta>\pi/2$, è

$$O\left\{\left(n\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}\int_0^{\pi/2n}t^3\,|\,Y_0(nt)\,|\cdot|\,J_0(nt)\,|\,dt+O\left\{\left(n\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}\int_0^{\pi/2n}t^3J_0^2(nt)dt=$$

$$=O\left\{\left(n\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}O(n^{-4})=O\left(n^{-\frac{3}{2}}\vartheta^{\frac{5}{2}}\right).$$

Sempre relativamente all'intervallo $0<t\leq\pi/2n$ analogo contributo si ha per l'ultimo integrale della (13).

Per i contributi dell'intervallo $(\pi/2n,\ \vartheta)$ si ha rispettivamente: Per il primo integrale della (13)

$$O\left\{\left(n\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}\int_{\pi/2n}^{\vartheta}\left(nt\right)^{-\frac{1}{2}}t^3\left(nt\right)^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=O\left\{\left(n\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}n^{-1}O(\vartheta^3)=O\left(n^{-\frac{3}{2}}\vartheta^{\frac{5}{2}}\right),$$

e per il secondo integrale

$$O\left\{\left(n\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}\int_{\pi/2n}^{\vartheta}\left(nt\right)^{-\frac{1}{2}}t\cdot t^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=O\left\{\left(n\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}n^{-2}O(\vartheta^2)=\vartheta^{\frac{5}{2}}O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Abbiamo così provato che, per $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2$, è

$$\varepsilon(\vartheta) = \vartheta^{\frac{5}{2}} O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

cioè la seconda delle (4).

3. Vogliamo in questo numero applicare i precedenti risultati al calcolo degli zeri di $P_n(\cos\vartheta)$. A tale scopo conviene innanzi tutto scrivere la (3) sotto un'altra forma, e basterà limitarci a considerare l'intervallo $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2$, in quanto, in $0 < \vartheta \leq \pi/2n$, non cadono zeri di $P_n(\cos\vartheta)$.

Tenuto conto della nota relazione $J_0'(x) = -J_1(x)$ si ha dalla (3)

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\vartheta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\vartheta}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right\} - $$

$$- \frac{\vartheta^2}{2\left\{24\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}^2} J_0''(\xi) + \varepsilon(\vartheta),$$

con ξ nell'intervallo $\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \vartheta/24\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$.

Ma è per $x \to \infty$

$$J_0''(x) = -J_1'(x) = \frac{J_2(x) - J_0(x)}{2} = O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right),$$

e quindi, per $\frac{\pi}{2n} < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\vartheta^2}{2\left\{24\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}^2} J_0''(\xi) = \vartheta^2 n^{-2} O\left\{(n\vartheta)^{-\frac{1}{2}}\right\} = O\left(\vartheta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

e la (3) può allora scriversi nella forma

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\vartheta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\vartheta}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right\} + O\left(\vartheta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{14}$$

$$\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2.$$

Per gli zeri $\vartheta_{n,r}$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$, di $P_n(\cos\vartheta)$ valgono le limitazioni (4)

$$\frac{j_{0,r-1}}{n+\frac{1}{2}} < \vartheta_{n,r} < \frac{j_{0r}}{n+\frac{1}{2}}, \qquad r = 1, 2, \dots, n,$$

essendo $j_{0,r}$ l'r-mo zero positivo di $J_0(x)$, $(j_{0,0} = 0)$.

Dalla (14) si deduce che, *fissato r*, risulta

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta_{n,r} + \frac{\vartheta_{n,r}}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)} = j_{0r} + O(n^{-4})$$

e cioè

$$\boxed{\vartheta_{n,r} = \frac{j_{0r}}{n+\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{1}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right\} + O(n^{-5})}\,. \tag{15}$$

Corrispondentemente per gli zeri $x_{n,r}$ di $P_n(x)$, posto

$$x_{n,r} = \cos\vartheta_{n,r},$$

si ha, *fissato r*,

$$x_{n,r} = 1 - \frac{j_{0,r}^2}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left\{1 - \frac{1}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^2 + \frac{j_{0,r}^4}{4!\left(n+\frac{1}{2}\right)^4} + O(n^{-6}),$$

da cui

$$\boxed{x_{n,r} = 1 - \frac{j_{0,r}^2}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{j_{0,r}^2 + j_{0,r}^4}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)^4} + O(n^{-6})}\,. \tag{16}$$

Se si applica la (16) al calcolo di $x_{16,1}$ e di $x_{16,2}$ si ha

$$x_{16,1} = 0{,}98940095\dots, \qquad x_{16,2} = 0{,}94457717\dots,$$

mentre i valori con otto cifre decimali esatte sono rispettivamente (5)

$$0{,}98940093, \qquad 0{,}94457502.$$

(4) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna, (1948), vol. I, pp. 201-203.

(5) A. N. LOWAN, N. DAVIDS, A. LEVENSON, *Table of the zeros of Legendre Polynomials of order* 1 — 16 *and the weight coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature formula*, « Bull. Amer. Math. Soc. », 48, (1942), pp. 738-743.