BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO SPERANZA

Classificazione delle trasformazioni puntuali di 2ª specie fra piani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 210–216.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_210_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Classificazione delle trasformazioni puntuali di 2ª specie fra piani.

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna)

Sunto. - *Come il n. 1.*

1. In un lavoro del prof. VILLA, che appare in questo stesso fascicolo. viene fatta una classificazione delle trasformazioni di 3ª specie fra piani fondata sulle corrispondenze linearizzanti relative alle trasformazioni stesse e alle trasformazioni quadratiche ad esse osculatrici.

In questa Nota si fa una classificazione analoga per le trasformazioni di 2ª specie (cioè per quelle trasformazioni fra piani per cui in un punto generico due delle tre direzioni caratteristiche coincidono).

La classificazione qui ottenuta viene raffrontata con altra ottenuta dal MURACCHINI (1).

2. Siano A_0, A_1, A_2; B_0, B_1, B_2 due terne di punti analitici dei piani π e $\bar{\pi}$ rispettivamente; si può sempre supporre, per l'indipendenza dei punti di ciascuna terna

$$|A_0 A_1 A_2| = |B_0 B_1 B_2| = 1. \tag{1}$$

Per i differenziali dei punti stessi valgono le

$$dA_i = \sum_0^2 \omega_{ik} A_k \qquad dB_i = \sum_0^2 \bar{\omega}_{ik} B_k \qquad (0 \leq i \leq 2)$$

dove le ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}$ sono forme di PFAFF nei differenziali dei parametri da cui dipende il riferimento. Dalle (1) si ricava

$$\sum_0^2 \omega_{ii} = \sum_0^2 \bar{\omega}_{ii} = 0.$$

Nel seguito, in luogo delle $\bar{\omega}_{ik}$, si useranno le forme

$$\tau_{ik} = \bar{\omega}_{ik} - \omega_{ik}.$$

(1) Cfr. L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali di seconda e terza specie fra piani proiettivi*, « Mem. Acc Sci. Torino », (3) 1, 25-44 (1953).

Per i differenziali esterni delle forme ω_{ik}, τ_{ik} valgono le *formule di struttura*:

$$
\begin{aligned}
&[d\omega_{ik}] = \sum_{0}^{2}{}_j [\omega_{ij}\omega_{jk}] \\
(2)\qquad &[d\tau_{ik}] = \sum_{0}^{2}{}_j \{ [\tau_{ij}\tau_{jk}] + [\tau_{ij}\omega_{jk}] + [\omega_{ij}\tau_{jk}] \}.
\end{aligned}
$$

Imponendo che le terne A_0, A_1, A_2; B_0, B_1, B_2 soddisfinò alle seguenti proprietà: *a*) A_0 e B_0 coincidano con i punti A, B di una coppia generica; *b*) le due terne si corrispondano in un'omografia tangente K, per la quale si ha, notoriamente,

$$(3)\qquad KdA = dB + \lambda B,$$

si ottengono le condizioni

$$(4)\qquad \tau_{01} = \tau_{02} = 0.$$

Indico allora con ω_1, ω_2 le forme $\bar{\omega}_{01} = \omega_{01}$, $\bar{\omega}_{02} = \omega_{02}$; esse sono forme lineari nei differenziali dei parametri *principali*, cioè quelli dai quali dipende la determinazione dei punti A, B.

Differenzio esternamente le (4). Tenendo conto delle (2), si perviene a due forme quadratiche in ω_1, ω_2:

$$\Omega_i = \Sigma\, C_{rs}{}^i \omega_r \omega_s \qquad (i,\ r,\ s = 1,\ 2)$$

tali che

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\tau_{11} - \tau_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\omega_1} & \tau_{12} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\omega_1} \\
\tau_{21} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\omega_2} & \tau_{22} - \tau_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\omega_2}.
\end{aligned}
$$

Le forme ω_1, ω_2 possono considerarsi come coordinate omogenee nel fascio $A(B)$; allora l'equazione delle *direzioni caratteristiche* di T uscenti da $A(B)$ può scriversi

$$\Omega_1\omega_2 - \Omega_2\omega_1 = 0.$$

Se si assume come retta $\omega_2 = 0$ la retta caratteristica doppia e come $\omega_1 = 0$ la retta caratteristica semplice, ciò comporta le seguenti relazioni nei coefficienti $C_{rs}{}^i$:

$$C_{11}{}^2 = C_{22}{}^1 = 0 \qquad C_{11}{}^1 = 2\, C_{12}{}^2.$$

Si può imporre che l'omografia tangente K in cui si corrispondono le terne A, A_1, A_2; B, B_1, B_2 sia caratteristica, cioè subordini sulle rette caratteristiche le relative *proiettività caratte-*

ristiche del VILLA [2]; cioè per $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ sia

$$Kd^2A = d^2B + 2\lambda dB + \mu B$$

oltre, naturalmente, alla (3). Si ottiene

$$C_{11}{}^1 = C_{22}{}^2 = 0.$$

Si verifica facilmente che $C_{12}{}^1$ è un invariante relativo, che è certo $\equiv\!\!|\!\!\equiv 0$ (altrimenti le direzioni caratteristiche sarebbero indeterminate); onde si può porre $C_{12}{}^1 = -1$ e di conseguenza le forme Ω_1, Ω_2 risultano così normalizzate

$$\Omega_1 = -2\omega_1\omega_2 \qquad \Omega_2 = 0. \tag{6}$$

Differenziando esternamente le (5), e tenendo conto delle (6), si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} 2[\tau_{10} - \omega_{12}\ \omega_1] + [\tau_{20} + \omega_{00} - \omega_{22}\ \omega_2] &= 0 \\ [\tau_{20} + \omega_{00} - \omega_{22}\ \omega_1] - [2\,\omega_{21} - \omega_1\ \omega_2] &= 0 \\ [\tau_{10} + \omega_{12}\ \omega_2] &= 0 \\ [\tau_{10} + \omega_{12}\ \omega_1] + 2[\tau_{20}\ \omega_2] &= 0. \end{aligned}$$

Se ne deduce l'esistenza di due forme cubiche Θ_1, Θ_2:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \alpha_{30}\omega_1{}^3 + 3\alpha_{21}\omega_1{}^2\omega_2 + 3\alpha_{12}\omega_1\omega_2{}^2 + \alpha_{03}\omega_2{}^3 \\ \Theta_2 &= 3\beta_{12}\omega_1\omega_2{}^2 + \beta_{03}\omega_2{}^3 \end{aligned}$$

tali che

$$\begin{aligned} 2\tau_{10} - 2\omega_{12} &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1{}^2} \\ \tau_{20} + \omega_{00} - \omega_{22} &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \\ -2\omega_{21} + \omega_1 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_2{}^2} \\ \tau_{10} + \omega_{12} &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \\ 2\tau_{20} &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_2{}^2}. \end{aligned}$$

(2) Cfr. M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*. II. *Loro costruzione*, « Accad. Ital. Rend. », (7), 4, 1-7 (1943). Per le coppie di punti con due direzioni caratteristiche distinte, cfr. M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali con direzioni caratteristiche coincidenti*, « Rend. Ist. Lombardo Sci. Lett. », 78, (1944-45), 321-328.

3. Gli sviluppi locali della T, fino all'intorno del 3° ordine, sono

$$\begin{cases} \bar{x} = x - xy - \frac{1}{6}[\alpha_{30}x^3 + 3\alpha_{21}x^2y + 3(\alpha_{12} - 1)xy^2 + \alpha_{03}y^3] + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{6}[3\beta_{12}xy^2 + \beta_{03}y^3] + [4]. \end{cases}$$

Si noti come da questi sviluppi si ritrovi che la direzione caratteristica doppia ($y = 0$) è inflessionale di 2ª specie almeno (3).

Al variare della retta A_1A_2 del riferimento, il coefficiente β_{03} non varia, mentre gli altri variano secondo le

$$\begin{array}{c} \delta\alpha_{30} = 2\alpha_{30}(e_{11} - e_{00}) \qquad \delta\alpha_{21} = \alpha_{21}(e_{11} - e_{00}) \\ \delta\alpha_{12} = -2e_{20} \quad \delta\alpha_{03} = \alpha_{03}(e_{00} - e_{11}) \quad \delta\beta_{12} = \beta_{12}(e_{11} - e_{00}) + 2e_{10} \end{array} \tag{8}$$

dove, al solito, δ indica differenziazione eseguita rispetto ai soli parametri non principali (secondari) ed $e_{ik} = \omega_{ik}(\delta)$.

La T ammette quindi tre invarianti nell'intorno del 3° ordine:

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_{21}^2}, \quad \alpha_{21}\alpha_{03}, \quad \beta_{03}.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le curve caratteristiche doppie (semplici) siano rette è $\alpha_{30} = 0 (\alpha_{03} = 0)$.

Le ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici della T nella coppia (A, B) sono (4):

$$\begin{cases} \bar{x} = x\dfrac{\lambda x + (\mu - 1)y + 1}{\lambda xy + \lambda x + \mu y + 1} \equiv x - xy + \mu xy^2 + [4] \\ \bar{y} = y\dfrac{\lambda x + \mu y + 1}{\lambda xy + \lambda x + \mu y + 1} \equiv y \qquad - \lambda xy^2 + [4] \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \neq \infty)$$

i cui punti singolari sono, in entrambi i piani, $\left(0, -\frac{1}{\mu}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\lambda}, 0\right)$ la retta singolare è $\lambda x + (\mu - 1)y + 1 = 0$.

A ciascuna t. q. o. e alla T si può associare la relativa corrispondenza linearizzante (5) γ, di equazioni

$$\begin{cases} p' = \alpha_{30}p^3 + 3\alpha_{21}p^2q + 3(\alpha_{12} - 1 + 2\mu)pq^2 + \alpha_{03}q^3 \\ q' = \qquad\qquad\qquad 3(\beta_{12} - 2\lambda)pq^2 + \beta_{03}q^3 \end{cases}$$

(3) Cfr. G. Vaona, *Sulle trasformazioni puntuali di 2ª e 3ª specie fra piani*, « Atti IV Congresso U. M. I. Taormina » (1951), 449-454.

(4) Cfr. M. Villa, la seconda op. cit. in (2).

(5) Cfr. M. Villa, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali* « Compositio Math. », **12**, 137-146 (1954).

essendo p, q coordinate omogenee nel fascio A. Si tratta evidentemente di una corrispondenza algebrica, in generale di indici (1, 3), le cui 4 direzioni unite sono le direzioni d'iperosculazione di T e della t. q. o. (6).

Per

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \lambda = 0$$

si ha la corrispondenza

$$p' = \Theta_1(p, q) \qquad q' = \Theta_2(p, q). \tag{10}$$

Al variare della retta A_1A_2 le forme Θ_1, Θ_2 variano secondo le (8); in questo modo si possono ottenere tutte le corrispondenze linearizzanti. Fissata la A_1A_2, restano fissate Θ_1 e Θ_2 e la t. q. o., relativa alla linearizzante (10), è quella individuata dai punti singolari $(0, -2)$ e $(\infty, 0)$: cioè il punto singolare sulla retta caratteristica doppia è A_2, mentre, indicata con U l'intersezione della retta caratteristica semplice con la retta unità, il punto singolare su tale retta caratteristica è il quarto armonico dopo A_1, U, A.

Nel seguito converrà far uso di una forma diversa delle equazioni delle corrispondenze linearizzanti: posto

$$\bar{\lambda} = \beta_{12} - 2\lambda \qquad \bar{\mu} = \alpha_{12} - 1 + 2\mu$$

le (9) divengono

$$\left\{ \begin{aligned} p' &= \alpha_{30}p^3 + 3\alpha_{21}p^2q + 3\bar{\mu}pq^2 + \alpha_{03}q^3 \\ q' &= \phantom{\alpha_{30}p^3 + 3\alpha_{21}p^2q +{}} 3\bar{\lambda}pq^2 + \beta_{03}q^3 \end{aligned} \right. \tag{9'}$$

Converrà individuare intrinsecamente una particolare t. q. o., e quindi una particolare corrispondenza linearizzante. Si noti [cfr. le (9)] che una direzione d'iperosculazione di T e d'una qualsiasi t. q. o. cade sempre nella direzione caratteristica doppia. Le restanti tre soddisfano all'equazione cubica:

$$\alpha_{30}p^3 + 3(\alpha_{21} - \bar{\lambda})p^2q + (3\bar{\mu} - \beta_{03})pq^2 + \alpha_{03}q^3 = 0.$$

Esiste quindi una ed una sola t. q. o., per la cui terna (residua) di direzioni d'iperosculazione, la coppia di direzioni caratteristiche distinte $(pq = 0)$ è la coppia hessiana. Essa si ha per

$$\bar{\lambda} = \alpha_{21} \qquad \bar{\mu} = \frac{1}{3}\beta_{03}$$

(6) Cfr. M. VILLA, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), 2, 188-195, (1947).

e la relativa corrispondenza linearizzante γ^* ha equazioni

$$\begin{cases} p' = \alpha_{30}p^3 + 3\alpha_{21}p^2q + \beta_{03}pq^2 + \alpha_{03}q^3 \\ q' = \qquad\qquad\qquad 3\alpha_{21}pq^2 + \beta_{03}q^3. \end{cases}$$

4. Una classificazione delle trasformazioni puntuali di 2ª specie si ottiene usufruendo delle corrispondenze linearizzanti. Precisamente tali trasformazioni possono distinguersi, in base al comportamento di γ, in quattro tipi:

1° tipo, quando γ è di indici (1,3). Esso dà luogo a due sottotipi, a seconda che γ^* è pure di indici (1,3) oppure (1,2);

2° tipo, quando γ è di indici (1,2); esso dà luogo a tre sottotipi, a seconda della posizione della retta singolare di γ e del comportamento di γ^*;

3° tipo, quando γ è una proiettività non degenere; questo dà luogo a 3 sottotipi, a seconda della posizione delle rette singolari e del comportamento di γ^*;

4° tipo, quando γ è totalmente degenere, e allora la trasformazione è una trasformazione quadratica di 2ª specie.

5. Come s'è detto, le trasformazioni del 1° tipo sono caratterizzate dal fatto che γ è di indici (1,3). Affinchè ciò accada debbono essere verificate le seguenti condizioni: $\alpha_{30} \neq 0$ e almeno uno dei due coefficienti α_{03}, β_{03} dev'essere $\neq 0$.

Sotto queste ipotesi, γ^* può essere di indici (1,3) (sottotipo 1.*a*)), oppure di indici (1.2) (sottotipo 1.*b*)) con retta singolare

$$3\alpha_{21}p + \beta_{03}q = 0$$

e questo accade quando

$$\alpha_{30}\beta_{03}^3 - 27\alpha_{03}\alpha_{21}^3 = 0 \quad (^7).$$

6. Le trasformazioni del 2° tipo sono tali che γ è di indici (1,2). Esse si distinguono in tre sottotipi:

a) ad una retta (p', q') corrisponde una terna di rette fra cui v'è sempre la retta caratteristica doppia $q = 0$; γ^* è pure di indici (1,2). Questo accade quando $\alpha_{30} = 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ e $\alpha_{03} \neq 0$.

b) la retta singolare è la $q = 0$, ma γ^* e una proiettività, anzi l'identità; ciò si ha per $\alpha_{30} = \alpha_{03} = 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ e $\beta_{03} \neq 0$.

(7) Si noti che, in conseguenza delle (8), $\dfrac{\alpha_{30}\beta_{03}^3}{\alpha_{03}\alpha_{21}^3}$ è un invariante assoluto di T.

c) la retta singolare è distinta dalla caratteristica doppia; ciò accade se $\alpha_{03} = \beta_{03} = 0$, $\alpha_{30} \neq 0$. γ^* è sempre di indici (1,2).

7. Le trasformazioni del 3° tipo sono caratterizzate dal fatto che γ è una proiettività non degenere. Si hanno tre sottotipi:

a) le 2 rette singolari coincidono nella retta caratteristica doppia, e γ^* è pure una proiettività non degenere; ciò accade quando $\alpha_{30} = \alpha_{21} = 0$, $\beta_{03} \neq 0$;

b) le rette singolari coincidono nella retta caratteristica doppia, e γ^* è totalmente degenere; ciò si ha per $\alpha_{30} = \alpha_{21} = \beta_{03} = 0$, $\alpha_{03} \neq 0$;

c) le rette singolari cadono ciascuna in una retta caratteristica; γ^* è sempre una proiettività: ciò si ha per $\alpha_{30} = \alpha_{03} = \beta_{03} = 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ [8].

8. Per le trasformazioni del quarto tipo γ è totalmente degenere, e così pure γ^*. Le rette singolari cadono due nella caratteristica doppia, una nella caratteristica semplice. Si ha:

$$\alpha_{30} = \alpha_{21} = \alpha_{03} = \beta_{03} = 0.$$

Le trasformazioni di questo tipo sono, come s'è già detto, le trasformazioni quadratiche di 2ª specie [9].

[8] Nel lavoro citato di MURACCHINI vengono distinti: un caso generale ($g_2 \neq 0$), che comprende i tipi 1*a*), 1*b*), e 2*c*); un secondo caso ($g_2 = 0$), comprendente i sottotipi 2*a*), 2*b*) e parte del tipo 3°: (vengono qui distinti tre sottocasi, secondo che l, n sono generici, oppure $l \neq 0$, il che equivale a supporre $\alpha_{21} \neq 0$, oppure $n \neq 0$, il che equivale a supporre $\alpha_{03} \neq 0$); e infine un terzo caso ($g_2 = k = l = n = 0$), che rientra nei tipi 3° e 4°.

[9] Si verifica infatti che queste trasformazioni rientrano nel 3° caso del lavoro cit. del MURACCHINI, anzi sono tutte e sole quelle di tale caso che si riducono a trasformazioni quadratiche.

Lo stesso risultato può ottenersi più rapidamente osservando che, per le (8), può porsi $\alpha_{12} = 1$, $\beta_{12} = 0$; allora si dimostra che ogni coefficiente successivo a quelli dei termini di 2° grado è nullo, onde T è la trasformazione quadratica di 2ª specie:

$$\bar{x} = x - xy, \quad \bar{y} = y$$

Fra le trasformazioni di 2ª specie, le trasformazioni quadratiche possono pure caratterizzarsi come quelle trasformazioni per le quali esiste, in una coppia generica, una t. q. o. tale che ogni retta (p', q') abbia corrispondente indeterminata in γ. Le due caratterizzazioni valgono pure per le trasformazioni quadratiche di 1ª specie.