Bollettino Unione Matematica Italiana

Fulvia Skof

Osservazioni sulle componenti lacunari delle serie ultraconvergenti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 217–228.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_217_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Osservazioni sulle componenti lacunari delle serie ultraconvergenti

Nota di Fulvia Skof (a Milano)

Sunto. - *Si stabiliscono alcune proprietà della successione* $\{n_l\}$ *costituita dagli indici dei coefficienti delle componenti lacunari delle serie di potenze (prolungabili e) ultraconvergenti: queste proprietà riguardano l'andamento della somma* $S(x) = \sum_{n_l \leqq x} (1/n_l)$ *che, tra l'altro, viene valutata al disotto e viene adattata su una funzione prestabilita soddisfacente ad appropriate ipotesi.*

1. Introduzione. Sia $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ convergente per $|z| < 1$, prolungabile fuori del cerchio $|z| < 1$ e ultraconvergente. Un classico teorema di A. Ostrowski [1] assicura che

$$f(z) = g(z) + \varphi(z) \tag{1.1}$$

dove

$$g(z) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} z^{n_l}$$

è una *componente lacunare* ($\limsup n_{l+1}/n_l > 1$), regolare per $|z| < 1$, prolungabile e ultraconvergente, e $\varphi(z)$ è la *parte residua*, cioè una serie (eventualmente un polinomio) avente raggio di convergenza maggiore di 1.

La ripartizione (1.1) di $f(z)$ può essere evidentemente fatta in infiniti modi, a ciascuno dei quali corrisponde una componente

[1] Per le nozioni riguardanti l'ultraconvergenza delle serie di potenze vedere: A. Ostrowski, *On Representation of analytical Functions by power Series*, Journ. London Math. Soc., *1* (1926), pp. 251-263; G. Bourion, *Recherches sur l'ultraconvergence*, Ann. Ecole Norm. Sup., (3), *50*, (1933), pp. 245-318; G. Bourion, *L'ultraconvergence dans les séries de Taylor*, Act. Scient. 472, Paris (1937), pp. 48. A queste opere rimandiamo per la bibliografia.

Vedere anche: G. Ricci, a) *Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti*, Rend. Acc. Lincei (8), *18*, pp. 27-31 (1955); b) *Prolungabilità e ultraconvergenza delle serie di potenze. Modulazione del margine delle lacune*, Rend. di Mat. Univ. Roma, (5), *14* (1955), pp. 602-632; c) id. id., Boll. U.M.I., (3), *10*, (1955), pp. 439-452.

lacunare che dovrà rispettare le condizioni dei due teoremi di A. OSTROWSKI.

Ci proponiamo di studiare l'andamento delle successioni $\{n_l\}$ che sono inerenti alle componenti lacunari $g(z)$, e, più precisamente, l'andamento della somma

$$S(x) = \sum_{n_l \leqq x} \frac{1}{n_l} \tag{1.3}$$

al crescere di x. I risultati sono da interpretarsi come semplici proprietà delle successioni di interi vincolate dai teoremi di A. OSTROWSKI e da quello di G. BOURION.

È utile richiamare le seguenti definizioni:

1) Si dice che $\{p_h, q_h\}$, $(h = 1, 2, 3, ...)$, $(p_h, q_h$ interi; $0 \leqq p_1 < q_1 \leqq p_2 < q_2 \leqq p_3 < q_3 \leqq ...)$, è una *successione di lacune* (H. O.) per $f(z)$ quando è $q_h - p_h > \theta p_h$, $(h = 1, 2, 3, ...; \theta > 0$, indipendente da $h)$, e per la successione parziale degli interi m con $p_h < m < q_h$ $(h = 1, 2, 3, ...)$ si ha

$$\limsup |a_m|^{1/m} < 1.$$

2) Si dice *ordine di lacunarità* (H. O.) l'estremo superiore $\Lambda(f)$ $(\geqq 0)$ dei numeri θ ai quali è possibile coordinare la successione di lacune $\{p_h, q_h\}$.

Consideriamo due componenti lacunari $g(z) = \Sigma a_{n_l} z^{n_l}$ e $\tilde{g}(z) = \Sigma a_{\nu_s} z^{\nu_s}$ di $f(z)$.

Si dice che $\tilde{g}(z)$ è *contenuta* in $g(z)$ (e scriveremo $\tilde{g}(z) \subseteq g(z)$) quando $\{\nu_s\} \subseteq \{n_l\}$.

Si dice che $\tilde{g}(z)$ è *contenuta e aderente* a $g(z)$ (e scriveremo $\tilde{g}(z) \dot{\subseteq} g(z)$) quando, a partire da un certo indice k_0 in poi (cioè per $k \geqq k_0$) ogni lacuna $(\tilde{p}_h, \tilde{q}_h)$ di $\tilde{g}(z)$ contiene una e una sola lacuna (p_h, q_h) di $g(z)$.

L'andamento di $\{n_l\}$ si pensa descritto dalla funzione $S(x)$ che ne pone in evidenza la cosiddetta « densità logaritmica » (2).

Sussistono i tre teoremi seguenti, dei quali il primo intende valutare al disotto l'andamento della somma $S(x)$; il secondo

(2) Alla successione $\{n_l\}$ associamo il rapporto

$$\rho(x) = \sum_{n_l \leqq x} \frac{1}{n_l} : \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \backsim S(x) : \log x.$$

Diremo, seguendo una locuzione classica, che $\{n_l\}$ ha la *densità logaritmica positiva* quando $\liminf \rho(x) > 0$, $(x \to +\infty)$.

pone in relazione l'andamento di una somma $S(x)$ con quello della somma analoga $\tilde{S}(x)$ inerente alle componenti lacunari contenute; il terzo stabilisce l'esistenza di componenti lacunari la cui somma $S(x)$ ha un andamento che segue quello di una funzione prestabilita, soddisfacente ad appropriate ipotesi.

2. Teorema I. *a*) *Per ogni* $g(z)$ *è* $S(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$.

b) *Se* $\Lambda(f)$ *è finito, allora per ogni* $g(z)$ *è*

$$\gamma \log x < S(x) \, (< \log x + C), \quad (\gamma = \gamma(g) > 0, \; x \geqq x_1) \tag{2.1}$$

(cioè la densità logaritmica di $\{n_l\}$ è positiva).

c) *Esistono* $f(z)$ *con* $\Lambda(f) = +\infty$ *tali che per ogni loro componente* $g(z)$ *risulta ancora valida la* (2.1) *e altre* $f(z)$ *con* $\Lambda(f) = +\infty$ *che ammettono componenti lacunari* $g(z)$ *con* $\{n_l\}$ *di densità logaritmica nulla.*

Dimostrazione.

a) Sia $\{p_h, q_h\}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ una successione di lacune (H. O.). Indichiamo con $L(x)$ il numero degli interi $m \leqq x$ appartenenti alle lacune cioè tali che $p_h < m < q_h$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$, e con $N(x)$ il numero degli indici $n_l \leqq x$, dove $q_{h-1} \leqq n_l \leqq p_h$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$: allora risulta $N(x) = x - L(x)$. Un noto teorema sulla consistenza delle lacune, conseguenza del secondo teorema di A. Ostrowski, garantisce che per ogni componente lacunare è verificata la relazione [3]

$$\liminf L(x)/x < 1,$$

e quindi la funzione $N(x)$ verifica la disuguaglianza

$$\limsup N(x)/x = 2\tau > 0 \qquad (\tau \leqq 1/2).$$

Si può supporre $\tau < 1/2$ (altrimenti si assumerebbe $\tau' < \tau$). Esiste una successione $\{x_j\}$ tale che sia $N(x_j) > \tau x_j$, $x_j > (2/\tau) x_{j-1}$. Allora risulta

$$S(x_j) - S(x_{j-1}) = \sum_{x_{j-1} < n_l \leqq x_j} \frac{1}{n_l} \quad (\text{almeno } \tau x_j - x_{j-1} > x_{j-1} \text{ termini})$$

$$\geqq \frac{1}{x_j} + \frac{1}{x_j - 1} + \ldots + \frac{1}{x_j - x_{j-1} + 1}$$

$$\geqq \log\left(1 - \frac{x_{j-1}}{x_j} + \frac{1}{x_j}\right)^{-1} + O(1/x_{j-1})$$

$$\geqq - \log(1 - \tau/2) + O(1/x_{j-1}).$$

(3) Vedere per. es. G. Ricci, loc. cit. in (1), a), p. 31.

Ne segue

$$S(x_j) = \sum_{h=1}^{j} \{ \tau/2 + O(1/x_{h-1}) \} = j \cdot \tau/2 + O(1),$$

da cui l'asserto.

b) È noto che, quando l'ordine $\Lambda(f)$ è finito, per ogni componente lacunare $g(z)$ di $f(z)$ è $\limsup L(x)/x < 1$ e di conseguenza $\liminf N(x)/x > 0$ per $x \to +\infty$ ([4]).

Considerando $x = n_l$ $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ risulta $\liminf l/n_l = 2\sigma > 0$ e quindi $l/n_l > \sigma$ per $l > L_0$ abbastanza grande.

Sia $n_K \leqq x < n_{K+1} < n_K\,(1 + 2\Lambda(f))$; allora

$$\begin{aligned} S(x) = S(n_K) &= S(n_{L_0}) + \sum_{n_{L_0} < n_l \leq n_K} \frac{1}{n_l} \geqq \sigma \sum_{L_0 < l < K} \frac{1}{l} \\ &= \sigma(\log K - \log L_0) + O\,(1/L_0) \\ &= \sigma \log K + O(1) \geqq \sigma \log (\sigma n_K) + O\,(1) \\ &= \sigma \log n_K + O(1) = \sigma \log n_{K+1} + O(1) \\ &\geqq \sigma \log x + O(1). \end{aligned}$$

Con $\gamma(g)$ opportuno è $S(x) \geqq \gamma \log x$ per $x \geqq x_1$.

c) Costruiamo una $f(z)$ con $\Lambda(f) = +\infty$ e tale che per ogni sua componente $g(z)$ sia valida la (2.1).

Scegliamo una qualunque successione crescente $\{\mu_h\}$ di interi μ_h $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ tale che siano soddisfatte le condizioni seguenti (che sono compatibili fra loro come facilmente si verifica):

i) $\quad 1 < \liminf \mu_{h+1}/\mu_h < \limsup \mu_{h+1}/\mu_h = +\infty$

ii) $\quad \mu_{h+1} < \mu_h^{c_1}, \; (c_1 > 1) \qquad$ iii) $\quad \log \mu_h < c_2 h, \quad (c_2 > 0)$.

(Si può assumere, per esempio, $\delta > 1$, $\mu_1 = 1$ e

$$\mu_{h+1} = [\delta^2 \mu_h] + 1 \qquad \text{per} \quad h \neq k^2 \qquad (k = 3, 4, 5, \ldots)$$
$$\mu_{h+1} = [\delta^2 \mu_h \cdot \gamma_h] + 1 \quad \text{per} \quad h = k^2 \qquad (k = 3, 4, 5, \ldots)$$

dove $\gamma_h \to +\infty$ per $h \to +\infty$, $\gamma_h < \mu_h^c$, $\log(\gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_h) = O(h)$).

Sia $\delta > 1$ e $\{\mu_h\}_\delta$ la successione degli interi n soddisfacenti ad una almeno delle disuguaglianze

$$\mu_h/\delta < n < \mu_h \delta \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

e $\{\mu_h\}_\delta'$ la successione complementare di $\{\mu_h\}_\delta$.

([4]) Vedere G. Ricci, loc cit. in ([1]), a), p 31.

In base ad un noto teorema di G. BOURION (5) si costruisca la serie $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ ultraconvergente lungo tutte e sole le successioni $\{m_k\}$ a ciascuna delle quali si può coordinare un $\delta > 1$ in guisa che $\{m_k\}$ sia contenuta in $\{\mu_k\}_{\delta'}$; allora da $\limsup \mu_{h+1}/\mu_h = +\infty$ segue $\Lambda(f) = +\infty$.

Sia $\delta^2 < \liminf \mu_{h+1}/\mu_h$ e $g(z)$ la componente lacunare per la quale $\{n_l\}$ coincide con $\{\mu_k\}_\delta$ e poniamo

$$S_h = \sum_{\mu_h/\delta < n \leq \mu_h \delta} \frac{1}{n}.$$

Allora è $S_h \sim 2 \log \delta$ e quindi per ogni $\mu_h \delta < x \leqq \mu_{h+1} \delta$ risulta, almeno per $h \geqq h_0$ conveniente,

$$S_{h_0} + S_{h_0+1} + \ldots + S_h \leqq S(x) \leqq S_1 + S_2 + \ldots + S_{h+1},$$

da cui $S(x) \sim 2h \log \delta$ per $h \to +\infty$.

Tenendo conto della condizione iii) e poi della ii), si trova che, per h abbastanza grande, è

$$S(x) > c' \log \mu_h > c'' \log \mu_{h+1} > c''' \log x.$$

Sia $\tilde{g}(z) = \sum a_{\nu_l} z^{\nu_l}$ una qualunque componente lacunare di $f(z)$ esiste τ tale che la successione $\{\nu_l\}$ contiene (almeno per l abbastanza grande) la successione $\{\mu_h\}_\tau$ e la considerazione precedente conduce alla (2.1).

Un semplice esempio di funzione $f(z)$ che presenta le proprietà $\Lambda(f) = +\infty$ e (2.1) per ogni componente lacunare, è fornito da

$$f(z) = \sum_{h=1}^{\infty} P_h \quad , \quad P_h = \frac{\{z(1-z)\}^{2^{v_h}}}{C_h} \quad , \quad C_h = \binom{2^{v_h}}{2^{v_h - 1}}.$$

$\{v_h\}$ è la successione crescente degli interi v positivi soddisfacenti alla condizione $u^2 + u \leqq v \leqq (u+1)^2$, $(u = 1, 2, 3, \ldots)$.

Una funzione $f(z)$ per la quale (2.1) non è valida si può ottenere sostituendo alle condizioni i), ii), iii) le seguenti:

$$\text{i)}' \quad \mu_{h+1}/\mu_h \to +\infty \qquad\qquad \text{ii)}' \quad h/\log \mu_h \to 0.$$

(5) Per questo teorema vedere: G. BOURION, Ann. Éc. Norm., loc. cit. (1), p. 274 e per la forma nella quale è considerato qui: G. RICCI, Boll. U. M. I., loc. cit. in (1), p. 449.

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, ogni successione $\{\mu_h\}_\delta$ $(\delta > 1)$ è tale che per $\mu_h{}^\delta < x \leqq \mu_{h+1}{}^\delta$ e per h abbastanza grande risulta

$$S(x)/\log x < S(x)/\log \mu_h \sim \bar{c}\, h/\log \mu_h < \varepsilon .$$

Si può assumere, per esempio, $\mu_h = h\,!$.

3. Teorema II. *Sia* $\Lambda(f) = +\infty$.

a) *Se per la componente* $g(z)$ *di* $f(z)$, *con la successione di lacune* $\{p_h, q_h\}$, *esiste una successione* $\{u_h, v_h\}$ *tale che*

$$q_{h-1} \leqq u_h \leqq v_h \leqq p_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(3.1) \qquad |a_{u_h}|^{1/u_h} \rightarrow 1 \quad , \quad |a_{v_h}|^{1/v_h} \rightarrow 1$$

$$(3.2) \qquad 0 < \liminf v_h/p_h \leqq \limsup u_h/q_{h-1} < +\infty,$$

allora da $\tilde{g}(z) \dot{\subseteq} g(z)$ *segue*

$$\gamma S(x) \leqq \tilde{S}(x) < S(x) \qquad (\gamma = \gamma(g, \tilde{g}) > 0).$$

b) *Fissati due numeri reali* α *e* β *tali che* $0 \leqq \alpha \leqq \leqq \beta \leqq 1$, *esistono* $f(z)$ *(con* $\Lambda(f) = +\infty$*) che ammettono componenti* $g(z)$, $\tilde{g}(z)$ *per le quali si verifica*

$$\tilde{g}(z) \dot{\subseteq} g(z) \qquad \alpha = \liminf \tilde{S}(x)/S(x) \leqq \limsup \tilde{S}(x)/S(x) = \beta.$$

Dimostrazione.

a) Osserviamo che, nel caso in cui p_h/q_{h-1} si mantenga limitato, le condizioni (3.1) e (3.2) sono soddisfatte tutte le volte che in ogni tratto (q_{h-1}, p_h), $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ si può scegliere un intero w_h tale che $|a_{w_h}|^{1/w_h} \rightarrow 1$, e si può assumere $u_h = v_h = w_h$.

In ogni caso la condizione (3.2) dice che esistono due numeri $\eta > 0$ (abbastanza piccolo) e $K > 0$ (abbastanza grande) tali che $u_h < K q_{h-1}$ e $v_h > \eta p_h$.

Sia $\{\tilde{p}_h, \tilde{q}_h\}$, $(h = 1, 2, 3, \ldots)$, la successione delle lacune della componente lacunare $\tilde{g}(z)$. Essendo $\tilde{g}(z) \dot{\subseteq} g(z)$, per h abbastanza grande è $\tilde{p}_h \leqq p_h < q_h \leqq \tilde{q}_h$ e anche $\tilde{q}_{h-1} \leqq u_h \leqq v_h \leqq \tilde{p}_h$, perchè se così non fosse per la (3.1) la differenza $f(z) - \tilde{g}(z) = \tilde{\varphi}(z)$ non avrebbe raggio di convergenza > 1; di più, in forza del II teorema di A. OSTROWSKI, essendo $f(z)$ prolungabile dovrà esistere un numero $\delta > 1$ tale che

$$\tilde{q}_{h-1} < u_h/\delta < v_h\delta < \tilde{p}_h .$$

Ne segue, per h abbastanza grande,

$$\tilde{p}_h/\tilde{q}_{h-1} > \delta^2 v_h/u_h > \delta^2 \eta p_h/(Kq_{h-1}) = cp_h/q_{h-1}, \quad (0 < c < 1).$$

Si osservi ora che esiste un numero $\tau > 0$, indipendente da h, tale che, per h abbastanza grande, risulta

$$\log(\tilde{p}_h/\tilde{q}_{h-1}) > \tau \log(p_h/q_{h-1}). \tag{3.3}$$

Infatti, se $(p_k/q_{k-1})^{1/2} \geqq 1/c$, è $\log(\tilde{p}_h/\tilde{q}_{h-1}) \geqq (1/2)\log(p_h/q_{h-1})$; se $(p_h/q_{h-1})^{1/2} < 1/c$, essendo in ogni caso $\tilde{p}_h/\tilde{q}_{h-1} > \delta^2 v_h/u_h \geqq \delta^2$, è $2\log\delta < \log(\tilde{p}_h/\tilde{q}_{h-1}) < \log(p_k/q_{h-1}) < 2\log(1/c)$, e quindi $\log(\tilde{p}_h/\tilde{q}_{h-1}) >$ $> \{-\log\delta / \log c\} \log(p_h/q_{h-1})$.

La (3.3) risulta così dimostrata, quando si assuma per τ il minore dei due numeri $1/2$ e $-\log\delta / \log c$.

A questo punto poniamo

$$(I_k) \equiv (q_{k-1} \leqq n_l \leqq p_k) \quad , \quad (\tilde{I}_k) \equiv (\tilde{q}_{k-1} \leqq \nu_s \leqq \tilde{p}_k),$$

$$S_k = \sum_{n_l \in I_k} \frac{1}{n_l} \quad , \quad \tilde{S}_k = \sum_{\nu_s \in \tilde{I}_k} \frac{1}{\nu_s}.$$

Allora risulta $S_k = \log(p_k/q_{k-1}) + O(1/q_{k-1})$, $\tilde{S}_k = \log(\tilde{p}_k/\tilde{q}_{k-1}) +$ $+ O(1/\tilde{q}_{k-1})$.

Sia $q_{h-1} \leqq x < q_h$; ci proponiamo di confrontare fra loro le somme

$$\begin{cases} S(x) = S_1 + S_2 + \ldots + S_{h-1} + S_h' , & (S_h' = \theta S_h;\ 0 \leqq \theta \leqq 1) \\ \tilde{S}(x) = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \ldots + \tilde{S}_{h-1} + \tilde{S}_h' , & (\tilde{S}_h' = \bar{\theta}\tilde{S}_h;\ 0 \leqq \bar{\theta} \leqq 1). \end{cases} \tag{3.4}$$

La (3.3) ci dice che per k abbastanza grande è $\tilde{S}_k > \tau S_k +$ $+ O(1/q_{k-1})$. Allo scopo di confrontare fra loro S_h' e $\tilde{S}_h'$ suddivideremo l'intervallo (q_{h-1}, p_h) in tre intervalli parziali:

1) $p_h \leqq x < q_h$. Risulta $\tilde{S}_h' > \tau S_h'$, essendo $\tilde{S}_h' = \tilde{S}_h$ e $S_h' \leqq S_h$.

2) $u_h \leqq x < \tilde{p}_h$. È $\tilde{S}_h' = \sum_{\tilde{q}_{h-1} \leqq \nu_s \leqq x} \frac{1}{\nu_s}$ e

$$S_h' = \sum_{q_{h-1} \leqq n_l \leqq x} \frac{1}{n_l} = \sum_{q_{h-1} \leqq n_l \leqq \tilde{q}_{h-1}} \frac{1}{n_l} +$$

$$+ \tilde{S}_h' \leqq \log K + \tilde{S}_h' + O(1/q_{h-1}).$$

3) $q_{h-1} \leqq x < u_h$. È $\tilde{S}_h' \geqq 0$ e $S_h' \leqq \log(u_h/\log q_{h-1}) +$
$+ O(1/q_{h-1}) \leqq \log K + O(1/q_{h-1})$.

In ogni caso, essendo $\tau \leqq 1/2$, si può scrivere

$$\tilde{S}_h' > \tau S_h' - \log K - O(1/q_{h-1}). \tag{3.5}$$

Le (3.4) unite alla (3.5) dànno

$$\tilde{S}(x) > \tau S(x) - \log K - O(1), \quad (\text{essendo} \sum_{j=1}^{h-1} O(1/q_j) = O(1)),$$

e poichè $S(x) \to +\infty$ (per $x \to +\infty$), risulta per x abbastanza grande

$$\tilde{S}(x) > (\tau/2)S(x).$$

b) Sia $\{\mu_h\}$ una successione crescente di interi μ_h ($h = 1, 2, 3, \ldots$) soddisfacente alla condizione $\mu_{h+1}/\mu_h \to +\infty$.

Poniamo

$$f(z) = \sum_{h=1}^{\infty} P_h \quad , \quad P_h = \frac{|z(1-z)|^{\mu_h}}{C_h} \quad , \quad C_h = \binom{\mu_h}{[\mu_h/2]}.$$

Fissato $\delta > 1$, poniamo $\tau = \delta^\alpha$, $\omega = \delta^\beta$ e siano $\{n_l\}$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$) la successione degli interi n per cui

$$\mu_h/\delta < n < \mu_h\delta \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

e $\{\nu_s\}$ ($s = 1, 2, 3, \ldots$) la successione degli interi ν per cui

$$\mu_h/\delta' < \nu < \mu_h\delta' \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

dove il moltiplicatore $\delta' = \delta'(h)$ viene scelto con la legge seguente:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{per } \quad (2k)! < h \leqq (2k+1)! & \delta'(h) = \tau = \delta^\alpha \\ \text{per } (2k+1)! < h \leqq (2k+2)! & \delta'(h) = \omega = \delta^\beta \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Posto

$$I_h \equiv (\mu_h/\delta < n < \mu_h\delta), \qquad \tilde{I}_h \equiv (\mu_h/\delta' < \nu < \mu_h\delta'),$$

$$S_h = \sum_{n_l \in I_h} \frac{1}{n_l} \quad , \quad \tilde{S}_h = \sum_{\nu_s \in \tilde{I}_h} \frac{1}{\nu_s},$$

risulta

$$S_h \sim 2\log\delta \qquad \text{e} \qquad \tilde{S}_h \sim 2\log\delta'.$$

Sia $\mu_h/\delta \leqq x < \mu_{h+1}/\delta$. Per $x \to +\infty$ è

$$2h\log\delta \sim \sum_{u=1}^{h} S_u \leqq S(x) \leqq \sum_{j=1}^{h+1} S_j \sim 2h\log\delta.$$

Poniamo

$$\sigma_{2k} = \sum_{(2k)!<h\leqq(2k+1)!} \tilde{S}_h \quad , \quad \sigma_{2k+1} = \sum_{(2k+1)!<h\leqq(2k+2)!} \tilde{S}_h :$$

risulta per $k \to +\infty$

$$\sigma_{2k} \backsim (2k)!\, 2k \cdot 2\alpha \log \delta \quad , \quad \sigma_{2k+1} \backsim (2k+1)!\,(2k+1) \cdot 2\beta \log \delta,$$

$$\sigma_{2k-2} = O(\sigma_{2k}/k^2) \quad , \quad \sigma_{2k-1} = O(\sigma_{2k+1}/k^2),$$

$$\sum_{u=0}^{k} \sigma_{2u} = \sigma_{2k}(1 + O(1/k)) \quad , \quad \sum_{u=0}^{k} \sigma_{2u+1} = \sigma_{2k+1}(1 + O(1/k)).$$

Per esaminare l'andamento del rapporto $\tilde{S}(x)/S(x)$ per $\mu_k/\delta \leqq \leqq x < \mu_{k+1}/\delta$, suddividiamo tale intervallo in due intervalli parziali:

1) $\mu_h\delta \leqq x < \mu_{h+1}/\delta$.

Sia $(2k)! < h \leqq (2k+1)!$. Risulta

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) = \sum_{u=1}^{h} \tilde{S}_u &= \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_{2k-1} + \sigma'_{2k} \\ &= \sigma_{2k-2}(1 + O(1/k)) + \sigma_{2k-1}(1 + O(1/k)) + \sigma'_{2k} \\ &= \sigma_{2k-1}(1 + O(1/k)) + \sum_{u=(2k)!+1}^{h} \tilde{S}_u \\ &= (2k-1)!\,(2k-1) \cdot 2\beta \log \delta\,(1 + O(1/k)) + \\ &\quad + \{h-(2k)!\} \cdot 2\alpha \log \delta\,(1 + o(1)), \text{ per } k \to +\infty.\end{aligned}$$

Ne segue che per $x \to +\infty$ lungo quegli intervalli è

$$\tilde{S}(x)/S(x) = \left\{ \frac{(2k-1)!\,(2k-1)}{h} \beta + \frac{h-(2k)!}{h} \alpha \right\} (1 + o(1)) \text{ per } k \to +\infty.$$

Poichè l'espressione entro parentesi $\{\ \}$ al secondo membro è decrescente al crescere di h nell'intervallo $(2k)! < h \leqq (2k+1)!$, basterà esaminare i casi $h = (2k)! + 1$ e $h = (2k+1)!$.

Per $h = (2k)! + 1 = (2k)!\,(1 + \eta_k)$, $(\eta_k = 1/(2k)!)$, è

$$\tilde{S}(x)/S(x) = \{ (1 - 1/(2k))\beta + \alpha/(2k)! \} (1 + o(1)) \to \beta.$$

Per $h = (2k+1)!$ è

$$\tilde{S}(x)/S(x) = \{ (1 - 1/(2k)) \cdot \beta/(2k+1) + (1 - 1/(2k+1))\alpha \} (1 + o(1)) \to \alpha.$$

Sia ora $(2k-1)! < h \leqq (2k)!$. Risulta

$$\tilde{S}(x) = \sum_{u=1}^{h} \tilde{S}_u = \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_{2k-2} + \sigma'_{2k-1} \,.$$

Il ragionamento analogo mostra che il rapporto $\tilde{S}(x)/S(x)$ si esprime asintoticamente mediante una funzione crescente al crescere di h nell'intervallo $(2k-1)! < h \leqq (2k)!$ e che $\tilde{S}(x)/S(x) \to \alpha$ per $h = (2k-1)! + 1$ e $\tilde{S}(x)/S(x) \to \beta$ per $h = (2k)!$.

2) $\mu_h/\delta \leqq x < \mu_h \delta$.

È $\tilde{S}(x) = \sum_{u=1}^{h-1} \tilde{S}_u + \tilde{S}_h'$.

Poichè è

$$0 < \tilde{S}_h' \leqq 2\beta \log \delta + o(1) \quad \text{per} \quad (2k+1)! < h \leqq (2k+2)!$$

$$0 < \tilde{S}_h' \leqq 2\alpha \log \delta + o(1) \quad \text{per} \quad (2k)! < h \leqq (2k+1)!$$

$$0 < \tilde{S}_h' \leqq 2 \log \delta + o(1) \quad \text{e} \quad S(x) \to +\infty,$$

risulta

$$\tilde{S}(x)/S(x) = \left(\sum_{u=1}^{h-1} \tilde{S}_u + \tilde{S}_h'\right) \Big/ \left(\sum_{u=1}^{h-1} S_u + S_h'\right)$$

$$= \left(\sum_{u=1}^{h-1} \tilde{S}_u \Big/ \sum_{u=1}^{h-1} S_u\right)(1 + o(1)).$$

Si conclude che è

$$\alpha = \liminf \tilde{S}(x)/S(x) \leqq \limsup \tilde{S}(x)/S(x) = \beta.$$

4. Teorema III. *Sia $\psi(x)$ definita per $x > 0$, positiva, monotona non decrescente, derivabile e sia*

$$\psi(x) \to +\infty, \qquad x\psi'(x) = O(1) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Esiste una funzione $f(z)$ ultraconvergente di cui una componente lacunare $g(z)$ verifica le proprietà seguenti:

i) $$\gamma\psi(x) \leqq S(x) \leqq \psi(x) \qquad (\gamma = \gamma(g) > 0)$$

ii) per ogni $\tilde{g}(z) \subseteq g(z)$

$$\tilde{\gamma}\psi(x) \leqq \tilde{S}(x) (\leqq S(x) \leqq \psi(x)) \qquad (\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{g}, g) > 0),$$

quando x è abbastanza grande.

Dimostrazione.

1) Osserviamo subito che dall'ipotesi $x\psi'(x) < K$ segue

$$\psi(x) < K \log x + c \qquad (K > 0,\ c \lesseqgtr 0). \tag{4.1}$$

Quando è definitivamente $\psi(x) \geqq \log x$, il Teor. III rientra nel Teor. I. Infatti dalla limitazione $\gamma \log x < S(x) < \log x$ segue $S(x) < \psi(x)$; inoltre per la (4.1) risulta

$$\psi(x)/K < \log x + c/K$$

$$\gamma\psi(x)/(2K) < \gamma \log x \qquad (\text{per } x \geqq x_0)$$

e quindi

$$\gamma'\psi(x) < S(x), \qquad (\gamma' = \gamma/(2K)).$$

Inoltre per qualunque $\tilde{g}(z) \dot{\subseteq} g(z)$ è

$$\gamma''\psi(x) < \tilde{S}(x) \leqq S(x) < \psi(x)$$

per x abbastanza grande.

2) Sia ora $\psi(x') < \log x'$ per infiniti valori x' di x grandi quanto si vuole. Costruiamo una $f(z)$ che verifichi le proprietà enunciate per $g(z)$ e $\tilde{g}(z)$.

Fissato un numero δ, $(1 < \delta < \text{Min}\,\{\exp(1/8),\ \sqrt{1 + 1/K}\,\})$, scegliamo una successione $\{\mu_h\}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ crescente di interi positivi nel modo seguente: detto x_h il minimo valore di x pel quale è soddisfatta l'equazione $h = \psi(x)$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$, poniamo $\mu_h = [x_h/\delta]$.

Per le ipotesi su $\psi(x)$, ad ogni h abbastanza grande si può coordinare uno ed un solo x_h tale che sia $h = \psi(x_h)$, e risulta $x_h = \chi(h)$, dove χ indica una funzione monotona non decrescente di h; inoltre $x_h \to +\infty$ e $\mu_h \to +\infty$ per $h \to +\infty$.

Vediamo che la successione $\{\mu_h\}$ verifica la condizione $\liminf \mu_{h+1}/\mu_h > 1$: infatti $\mu_{h+1}/\mu_h \sim x_{h+1}/x_h$ e d'altronde è

$$\psi(x_{h+1}) = \psi(x_h) + (x_{h+1} - x_h)\psi'(\bar{x}_h), \qquad (x_h < \bar{x}_h < x_{h+1})$$

e quindi

$$h + 1 < h + (x_{h+1} - x_h) \cdot K/x_h$$

da cui

$$x_{h+1}/x_h > 1 + 1/K.$$

Consideriamo la successione $\{\mu_h\}_\delta$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ degli interi n soddisfacenti ad una almeno delle condizioni

$$\mu_h/\delta < n < \mu_h\delta \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots);$$

esistono funzioni $f(z)$ (prolungabili e) ultraconvergenti lungo la successione $\{\mu_h\}_\delta'$ complementare di $\{\mu_h\}_\delta$ e sia $g(z) = \Sigma\, a_{n_l} z^{n_l}$ la componente lacunare per la quale $\{n_l\}$ coincide con $\{\mu_h\}_\delta$.

Sia $\mu_h\delta < x \leq \mu_{h+1}\delta$. Allora risulta $S(x) \sim 2h \log \delta$.

Osserviamo che per la definizione di x_h è

$$\delta\mu_h \leq x_h < \delta\mu_h + \delta$$

e quindi

$$\psi(\delta\mu_h) \leq h < \psi(\delta\mu_h + \delta), \qquad \psi(\delta\mu_{h+1}) \leq h + 1 < \psi(\delta\mu_{h+1} + \delta)$$

da cui segue

$$\psi(\delta\mu_{h+1}) - 1 \leq h < \psi(\delta\mu_{h+1} + \delta) - 1$$

$$\psi(\delta\mu_{h+1})/2 < h < \psi(\delta\mu_{h+1} + \delta) \qquad \text{per } h \geq h_0. \tag{4.2}$$

La parte a sinistra della (4.2) ci dà, per x abbastanza grande,

$$S(x) > \gamma\psi(x).$$

Consideriamo la parte a destra della (4.2). Per ipotesi è $\psi'(x) < K/x$ e quindi

$$\psi(\delta\mu_{h+1} + \delta) - \psi(\delta\mu_{h+1}) = \delta\psi'(\bar{x}), \quad (\delta\mu_{h+1} < \bar{x} < \delta\mu_{h+1} + \delta),$$
$$\psi(\delta\mu_{h+1} + \delta) < \psi(\delta\mu_{h+1}) + \delta K/\bar{x},$$

e poichè $\psi(x) \to +\infty$ e $K/x \to 0$, per $h > h_1$ abbastanza grande risulta $\psi(\delta\mu_{h+1} + \delta) < 2\psi(\delta\mu_{h+1})$.

Dalla (4.2) si ottiene allora

$$h < 2\psi(\delta\mu_{h+1}) \quad , \quad h + 1 < 4\psi(\delta\mu_{h+1})$$
$$h < 4\psi(\delta\mu_h) \qquad (\text{per } h \geq h_1 + 1)$$

ed essendo $S(x) \sim 2h \log \delta$ e $\delta < \exp(1/8)$ si ha

$$S(x) < \psi(x).$$

La componente $g(z)$ verifica dunque la proprietà i).

Sia $\tilde{g}(z)$ una qualunque componente lacunare $\dot{\subseteq} g(z)$; detta $\{\tilde{p}_h, \tilde{q}_h\}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ la successione delle sue lacune è $\tilde{p}_h \leq p_h < q_h \leq \tilde{q}_h$, ed è possibile trovare un δ' $(1 < \delta' < \delta)$ tale che

$$\mu_h\delta' < \tilde{p}_h < \tilde{q}_h < \mu_{h+1}/\delta'.$$

Per la successione $\{u_s\}$ degli interi u appartenenti a $\{\mu_h\}_{\delta'}$ si può ripetere l'analogo ragionamento sostituendo δ' a δ e risulta verificata la limitazione per la somma $S'(x)$ corrispondente a $\{u_s\}$

$$\tilde{\gamma}\psi(x) < S'(x) < \psi(x);$$

essendo $\{u_s\} \subset \{\nu_s\} \subset \{n_l\}$, la $\tilde{g}(x)$ verifica ii).