Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ambrogio Ferla

Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi omogenei in moto.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 229–237.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_229_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi omogenei in moto.

Nota di AMBROGIO FERLA (a Torino)

Sunto. - *Viene stabilita, con metodo vettoriale molto semplice, l'equazione differenziale di 2° ordine a cui devono soddisfare i vettori del campo elettrico e del campo magnetico, nel caso di un mezzo elettricamente conduttore, supposto in moto traslatorio uniforme.*

Recentemente i Proff. LAMPARIELLO e ZEULI hanno studiato, in importanti lavori (1), il problema della propagazione delle onde elettromagnetiche in un corpo elettricamente e magneticamente omogeneo ed isotropo, in moto traslatorio uniforme, ottenendo risultati del più alto interesse.

Essi hanno, fra altro, mostrato che tutte le componenti del campo, sia elettrico che magnetico, soddisfano ad una stessa equazione differenziale di 2° ordine.

Il Prof. ZEULI considera il caso più generale in cui la conduttività elettrica del corpo è finita (anzichè nulla) e ottiene, fra altro, l'importante risultato che il campo elettrico è normale alla velocità del corpo mobile; poi stabilisce, con opportune trasformazioni delle equazioni cartesiane del problema, l'equazione differenziale di 2° ordine a cui soddisfano le componenti della forza magnetica ed elettrica.

I calcoli del Prof. ZEULI (fatti solo per le componenti del campo magnetico) sono piuttosto complessi, perchè non è facile manovrare un sistema di 8 equazioni con derivate parziali.

Io qui, studiando invece la questione coi metodi del Calcolo vettoriale, e con procedimento diverso da quello seguito dal Prof. ZEULI, ho stabilito la equazione differenziale a cui soddisfa il vettore $\boldsymbol{E}$ della forza elettrica ed un altro vettore $\boldsymbol{B}$ legato linearmente al vettore $\boldsymbol{H}$ della forma magnetica, le quali equazioni, peraltro, risultano identiche; dopo di che si deduce tosto che anche

(1) G. LAMPARIELLO, *Considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche, ecc.*, « Rendiconti Accademia Lincei », Serie VIII, vol. XVII, 1954; Idem, *Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica. ecc.*, idem, 1954; Idem, *L'equazione generale delle onde elettromagnetiche. ecc.*, idem, 1954.

T. ZEULI, *Sui fenomeni elettromagnetici nei corpi omogenei ecc.*, « Rendiconti Seminario Matematico » Università Torino, vol XIV, 1954-55.

il vettore $\boldsymbol{H}$ soddisfa alla stessa equazione; i calcoli sono tutti sviluppati e da essi apparisce nitidamente (come è carattere peculiare dei procedimenti vettoriali) il concetto informatore delle trasformazioni occorrenti per arrivare alla equazione finale cercata, mentre, con le equazioni cartesiane, ciò non è guari visibile.

È inoltre interessante notare che con il mio procedimento non occorre porre alcuna condizione per le costanti che intervengono nel problema; invece, con la via seguita dal Prof. ZEULI, occorrono due serie di calcoli differenti, secondochè la velocità del corpo mobile soddisfa, oppur no, ad una certa disuguaglianza.

1. Le equazioni di MAXWELL-MINKOWSKI, che governano i fenomeni elettromagnetici in un mezzo elettricamente conduttore C, di costante dielettrica ε, permeabilità magnetica μ, e conduttività elettrica σ, costanti, supposto in moto traslatorio uniforme, con velocità (vettoriale) costante $\boldsymbol{v}$ rispetto ad un sistema inerziale di riferimento, sono:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \tag{1}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \tag{1'}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \tag{2'}$$

ove $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ sono i vettori della forza elettrica e magnetica, c è la velocità della luce nel vuoto, ed inoltre:

$$\boldsymbol{D} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H} + \varepsilon\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{E} + \mu\left(\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D}\right), \tag{3'}$$

$$\boldsymbol{J} = \frac{\rho}{c}\boldsymbol{v} + \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}\right), \tag{4}$$

ove ρ è la densità delle cariche; per semplicità supporremo, con il Prof. ZEULI, $\rho = 0$. Inoltre v indica il modulo, o grandezza, della velocità $\boldsymbol{v}$, e si è posto

$$\beta = \frac{v}{c} < 1.$$

Osserviamo che dalle (1′), (2′) si deduce tosto:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0, \tag{5}$$

poi dalle (3), (3′), (4) risulta ovviamente:

$$v \times D = \varepsilon\ v \times E, \tag{6}$$

$$v \times B = \mu\ v \times H, \tag{6′}$$

$$v \times J = \sigma \sqrt{1-\beta^2}\ v \times E. \tag{6″}$$

Se poi si sostituisce nella (3) il valore (3′) e si tiene conto della (6), si ottiene:

$$D = \varepsilon\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)E - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\cdot\frac{\varepsilon}{c}v \times E \cdot v + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} v \wedge H + \frac{\varepsilon\mu v^2}{c^2} D,$$

ponendo

$$n^2 = \varepsilon\mu,$$

ove n è, secondo MAXWELL, l'indice di rifrazione del mezzo, si può scrivere:

$$(1 - n^2\beta^2)\, D = \varepsilon(1-\beta^2)E - \frac{n^2-1}{c}\left(\frac{\varepsilon}{c} v \times E \cdot v - v \wedge H\right). \tag{7}$$

2. Dalle equazioni precedenti si possono dedurre alcune semplici conseguenze, che sfrutteremo in seguito.

Intanto, dalle (3), (7) prendendo la divergenza e ricordando la (2′) si ha:

$$-\frac{1}{c}\operatorname{div}(v \wedge H) + \varepsilon \operatorname{div}\left(E + \frac{1}{c} v \wedge B\right) = 0, \tag{8}$$

$$\varepsilon(1-\beta^2)\operatorname{div} E - \frac{n^2-1}{c}\left[\frac{\varepsilon}{c}\operatorname{div}(v \times E \cdot v) - \operatorname{div}(v \wedge H)\right] = 0 \tag{9}$$

poi, dalle (4) e (5), risulta:

$$\operatorname{div}\left(E + \frac{1}{c} v \wedge B\right) - \frac{1}{c^2}\operatorname{div}(v \times E \cdot v) = 0, \tag{10}$$

eliminando fra le (8), (10) la div E risulta:

$$\operatorname{div}(v \wedge H) = \frac{\varepsilon}{c}\operatorname{div}(v \times E \cdot v); \tag{11}$$

dopo ciò la (9) si riduce alla

$$\operatorname{div} E = 0, \tag{12}$$

semplicissima relazione, già osservata dal Prof. ZEULI.

Un' altra importante proprietà, pure dovuta al Prof. ZEULI, è espressa dalla relazione:

$$v \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{13}$$

Infatti, dalla (1′) si trae:

$$\frac{\partial(v \times \boldsymbol{D})}{\partial t} + v \times \boldsymbol{J} = c\, v \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \tag{14}$$

e tenendo conto delle (6), (6″), (11) si deduce:

$$\varepsilon \frac{\partial(v \times \boldsymbol{E})}{\partial t} + \sigma \sqrt{1-\beta^2}\; v \times \boldsymbol{E} = -\varepsilon \operatorname{div}(v \times \boldsymbol{E} \cdot v), \tag{15}$$

che è una equazione differenziale del 1° ordine a cui deve soddisfare $v \times \boldsymbol{E}$.

Si può ottenere un' altra equazione nel modo seguente: dalle (8), (11), (12) si ricava:

$$\operatorname{div}(v \wedge \boldsymbol{B}) = \frac{1}{c} \operatorname{div}(v \times \boldsymbol{E} \cdot v), \tag{16}$$

ora conviene eliminare $\boldsymbol{B}$ e per questo deriviamo la precedente rispetto a t, tenendo conto della (1), ed avremo:

$$-\, c \operatorname{div}(v \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{E}) = \frac{1}{c} \operatorname{div}\left[\frac{\partial(v \times \boldsymbol{E})}{\partial t} v\right],$$

e, ricordando la nota formula

$$\operatorname{div}(v \wedge u) = -\, v \times \operatorname{rot} u, \tag{17}$$

ove u è un vettore arbitrario, si deduce:

$$-\, v \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2} \operatorname{div}\left[\frac{\partial(v \times \boldsymbol{E})}{\partial t} v\right] = 0,$$

ora ricordiamo che:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} u - \operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \Delta_2' u, \quad \left(\Delta_2' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{18}$$

perciò in virtù della (12) si può scrivere:

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \Delta_2' \boldsymbol{E}, \tag{18′}$$

onde la relazione precedente diventa:

$$v \times \Delta_2' \boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2} \operatorname{div}\left[\frac{\partial(v \times \boldsymbol{E})}{\partial t} v\right] = 0,$$

od anche

$$\Delta_2(v \times E) + \frac{1}{c^2} \operatorname{div}\left[\frac{\partial(v \times E)}{\partial t} v\right] = 0, \tag{19}$$

la quale equazione differenziale non è del tipo dell'equazione delle onde.

La funzione $v \times E$ dovrebbe allora soddisfare alle due equazioni differenziali (15), (19), che generalmente sono incompatibili se $v \times E$ non è nullo.

Dunque sarà necessariamente $v \times E = 0$, onde si conclude, col Prof. Zeuli, che: *il campo elettrico* **E** *è trasversale alla direzione del moto del mezzo* C.

Si può ancora osservare che in questo caso le (6). (6″) mostrano che:

$$v \times D = 0; \qquad v \times J = 0,$$

onde la (14) diventa:

$$v \times \operatorname{rot} H = 0, \tag{20}$$

cioè *il rotazionale del campo magnetico è pur esso trasversale alla direzione del moto del corpo* C.

Dalla (16) si deduce poi:

$$\operatorname{div}(v \wedge B) = 0, \tag{20'}$$

ossia:

$$v \times \operatorname{rot} B = 0,$$

onde anche *il rotazionale del vettore* **B** *è trasversale alla direzione del moto del corpo* C.

3. Stabiliamo ora le equazioni differenziali a cui devono soddisfare separatamente i vettori E e B.

Ciò può farsi, nel modo più semplice, risolvendo il sistema (3), (3′) rispetto ai vettori D ed H, che così risulteranno espressi in funzione dei vettori E, B, e poi sostituendo i valori ottenuti nella (1′); così si otterrà una equazione differenziale di 1° ordine che lega E e B; tra questa e la (1) elimineremo una volta B e poi E e così avremo le equazioni differenziali a cui devono soddisfare separatamente i vettori E e B.

Dalla (3′), ricordando la (13) si deduce:

$$v \wedge B = -\frac{1}{c} v^2 E + \mu v \wedge H - \frac{\mu}{c}(v \times D \cdot v - v^2 D),$$

ma tenendo conto della (6) e sostituendo a $v \wedge H$ il valore dato dalla (3) risulta:

$$v \wedge B = -\frac{1}{c} v^2 E - c\mu D + c\varepsilon\mu E + \varepsilon\mu v \wedge B + \frac{\mu v^2}{c} D,$$

ricavando D e ricordando che $\varepsilon\mu = n^2$, $v = \beta c$, si ottiene:

$$\text{(21)} \qquad c\mu(1-\beta^2)D = c(n^2-\beta^2)E + (n^2-1)v \wedge B,$$

e così abbiamo D in funzione di E e B.

Sostituendo poi questo valore di D nella (3') si ricava:

$$c^2\mu(1-\beta^2)H = c(n^2-1)v \wedge E + c^2(1-n^2\beta^2)B + (n^2-1)v \times B \cdot v;$$

ma è chiaro che:

$$c^2(1-n^2\beta^2)B + (n^2-1)v \times B \cdot v = c^2(1-\beta^2)B - v^2(n^2-1)B +$$
$$+ (n^2-1)v \times B \cdot v = c^2(1-\beta^2)B + (n^2-1)v \wedge (v \wedge B),$$

perciò:

$$\text{(22)} \qquad c^2\mu(1-\beta^2)H = c(n^2-1)v \wedge E + c^2(1-\beta^2)B + (n^2-1)v \wedge (v \wedge B),$$

la quale ci dà il vettore H in funzione di E e B.

Sostituendo i valori dati dalle (21), (22), (4) nella (1') si ha:

$$\text{(23)} \qquad c(n^2-\beta^2)\frac{\partial E}{\partial t} + (n^2-1)v \wedge \frac{\partial B}{\partial t} + \sigma\mu c\sqrt{1-\beta^2}\left(E + \frac{1}{c} v \wedge B\right) =$$
$$= c^2(1-\beta^2)\operatorname{rot} B + (n^2-1)\operatorname{rot}[v \wedge (v \wedge B)] + c(n^2-1)\operatorname{rot}(v \wedge E);$$

occorre ora eliminare il vettore B e per questo basta derivare rispetto a t, tenendo conto della (1), e si ottiene:

$$(n^2-\beta^2)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - (n^2-1)\frac{\partial}{\partial t}(v \wedge \operatorname{rot} E) + \sigma\mu\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\partial E}{\partial t} - v \wedge \operatorname{rot} E\right) =$$
$$= -c^2(1-\beta^2)\operatorname{rot}\operatorname{rot} E - (n^2-1)\operatorname{rot}[v \wedge (v \wedge \operatorname{rot} E)] + (n^2-1)\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}(v \wedge E);$$

questa è, in sostanza, l'equazione differenziale a cui soddisfa il vettore E; ora non rimane che semplificarla, onde darle una forma più semplice.

A questo scopo osserviamo che se u è un vettore funzione del punto $P(x, y, z)$, è facile verificare le formule:

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}) = (\operatorname{div} \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} - v\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x},$$

$$\text{(25)} \qquad \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{grad}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) - v\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}, \qquad (^2)$$

in particolare, badando che $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} = 0$, si deduce da esse:

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{E}) = -v\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x},$$

$$\boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -v\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x},$$

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{v} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{E})] = -v \operatorname{rot}\left(\boldsymbol{v} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right) = v^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2},$$

mercè tali formule, la relazione precedente diventa allora:

$$(n^2 - \beta^2)\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + (n^2 - 1)v\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t \partial x} + \sigma\mu\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + v\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right) =$$

$$= c^2(1-\beta^2)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - (n^2-1)v^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} - (n^2-1)\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t \partial x},$$

ricordando la (18') si può ancora scrivere:

$$\text{(26)} \qquad \begin{aligned} &(1-\beta^2)\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta_2'\boldsymbol{E}\right) + (n^2-1)\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t \partial x} + v^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}\right) + \\ &+ \sigma\mu\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + v\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right) = 0, \end{aligned}$$

od anche:

$$(1-\beta^2)\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta_2'\boldsymbol{E}\right) + (n^2-1)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \boldsymbol{E} + \sigma\mu\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{E} = 0,$$

che è l'equazione che volevamo ottenere.

(2) Esse si ricavano facilmente, per es. dalle note relazioni:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{j} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{j} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{k} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z},$$

ove f è un numero ed $\boldsymbol{u}$ un vettore, funzioni del punto $P(x, y, z)$ ed $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ i soliti versori ortogonali di riferimento.

Introducendo la derivata *totale* rispetto al tempo t, si può scrivere più semplicemente:

$$(26') \qquad (1-\beta^2)\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta_2'\boldsymbol{E}\right) + (n^2-1)\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dt^2} + \sigma\mu\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = 0.$$

4. Cerchiamo ora l'equazione differenziale a cui deve soddisfare il vettore $\boldsymbol{B}$.

Per questo, riprendiamo la (23), nella quale ora si deve eliminare il vettore $\boldsymbol{E}$; e ciò si effettua facilmente applicando l'operatore rot ai due membri della (23) e ricordando la (1) e così si ha:

$$-(n^2-\beta^2)\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} + (n^2-1)\,\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{v}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) + \sigma\mu\sqrt{1-\beta^2}\left[-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})\right] =$$
$$= c^2(1-\beta^2)\,\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{B} + (n^2-1)\,\mathrm{rot\,rot}[\boldsymbol{v}\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})] + c(n^2-1)\,\mathrm{rot\,rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{E}).$$

ora ricordiamo che, essendo $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$, dalla (24) risulta:

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) = -v\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x},$$
$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{v}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -v\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t\partial x},$$
$$\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{B} = -\Delta_2'\boldsymbol{B},$$
$$\mathrm{rot\,rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{E}) = \mathrm{rot}\left(-v\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x}\right) = \frac{v}{c}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t\partial x},$$

inoltre, siccome $\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})=0$, si ha:

$$\mathrm{rot\,rot}[\boldsymbol{v}\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})] = \mathrm{rot}\left[-v\frac{\partial(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})}{\partial x}\right] = v^2\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial x^2},$$

sostituendo si può scrivere:

$$-(n^2-1)\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} - (1-\beta^2)\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} - (n^2-1)v\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t\partial x} - \sigma\mu\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + v\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}\right) =$$
$$= -c^2(1-\beta^2)\Delta_2'\boldsymbol{B} + (n^2-1)v^2\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial x^2} + (n^2-1)v\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t\partial x},$$

e portando tutto al secondo membro si ha una equazione identica alla (26).

Poichè la (22) esprime il vettore $\boldsymbol{H}$ linearmente, con coefficienti costanti, mediante i vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, ne segue che anche il vettore $\boldsymbol{H}$ deve soddisfare alla equazione differenziale (26).

Le (3) e (4) mostrano anche che i vettori $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{J}$ soddisfano alla stessa equazione differenziale.

OSSERVAZIONE I. – In particolare, se i vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ del campo sono funzioni soltanto di x e di t, la (26) si semplifica e la (2) diventa:

$$\boldsymbol{i} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x} = 0;$$

si ha poi, in questo caso:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x},$$

perciò dalla (1) risulta tosto:

$$\boldsymbol{i} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0;$$

ne segue che $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}$ è costante, e tale costante può supporsi nulla, nel qual caso la (5′) mostra che $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} = 0$, perciò concludiamo, con il Prof. ZEULI, che, se esistono onde piane propagantesi nella direzione del moto di C, *tanto il campo elettrico quanto il campo magnetico sono, entrambi, trasversali.*

OSSERVAZIONE II. – Supponiamo che le costanti β ed n siano legate dalla relazione:

(27) $$1 - n^2\beta^2 = 0, \quad \text{cioè} \quad n\beta = 1;$$

poichè $\beta = v/c$, risulta:

(28) $$v = c/n,$$

la quale relazione determina la grandezza della velocità del corpo mobile C.

In tal caso. dalla (7), si deduce tosto:

(29) $$\boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}$$

relazione che *determina il campo elettrico quando sia noto il campo magnetico.*

Dalla (29) risulta:

(30) $$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = 0$$

cioè *il campo elettrico è ortogonale al campo magnetico.*

Viceversa, se sussiste la (30), deve aver luogo la (27); infatti, la (6) moltiplicata scalarmente per $\boldsymbol{H}$, porge:

$$(1 - n^2\beta^2)\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{H} = 0$$

e poichè $\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{H}$ in generale non è nullo, ne segue la (27); la (30) esprime pertanto il significato fisico della (27).