Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Curzio

Una osservazione sui piani grafici $h - l$ transitivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 238–241.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_238_0>

Una osservazione sui piani grafici $h - l$ transitivi.

Nota di Mario Curzio (a Napoli)

Sunto. - *È l'enunciato dei teoremi cui si perviene.*

1. Dicesi con R. Baer (1), piano $h - l$ transitivo, ogni piano grafico Π dotato di due rette h, l, tali che esistano tutte le omologie possibili di Π aventi asse l e il centro su h.

I piani finiti $h - l$ transitivi sono stati caratterizzati per via geometrico-gruppale da G. Zappa (2) e per via algebrica da L. Lombardo Radice (2). Nelle pagine seguenti, dimostro con metodi elementari, una proprietà di tali piani, che non ho trovato menzionata nella letteratura a me accessibile.

2. Sia Π un piano grafico irriducibile di rango finito $n \geq 3$. In Π vi siano due rette h, l ed un punto U fuori di esse, tali che

a) Π *sia* h $-$ l *transitivo*,

b) esistano tutte le omologie di centro U ed asse l.

La *a)* comporta che n sia potenza di un numero primo (2) e che esista il gruppo S delle n omologie di asse l con il centro V nel punto comune ad h ed l. Inoltre, il gruppo T delle omologie di cui in *b)*, ha ordine n-1. Il prodotto di un'omologia σ di S per un'omologia τ di T, è ancora un'omologia di asse l ed ha il centro sulla retta UV, mantenendosi questa unita nel prodotto $\sigma\tau$; il centro di $\sigma\tau$ è poi distinto da V ed U, perchè se così non fosse, posto $\omega = \sigma\tau$, con ω per es. in S si avrebbe $\tau = \sigma^{-1}\omega$, onde τ avrebbe il centro in V

(1) R. Baer, *Homogeneity of projective planes*, « Am. Journ. of Math. », 64, (1942), pp. 137-152.

(2) G. Zappa, *Sui piani grafici finiti* h — l *transitivi*, « Boll. U. M. I. » (3), 9, (1954), pp. 16-23.

L. Lombardo Radice, *Sui sistemi cartesiani di coordinate dei piani grafici* h — l *transitivi*, Ib. pp. 24-29.

contro l'ipotesi. Se σ_i, σ_j sono omologie di S, τ un'omologia di T, è subito visto che le omologie $\sigma_i\tau$, $\sigma_j\tau$, sono distinte. Inoltre, se τ_h, τ_k sono in T, non può aversi $\sigma_i\tau_h = \sigma_j\tau_k$ perchè in tal caso essendo $\sigma_j^{-1}\sigma_i = \tau_k\tau_h^{-1}$ e tale omologia non identica perchè $\sigma_i \neq \sigma_j$, $\tau_h \neq \tau_k$, sarebbero coincidenti due omologie non identiche aventi centri distinti. Pertanto, incluse quelle dei gruppi S e T; esistono almeno $n(n-1) = n^2 - n$ omologie di asse l col centro sulla retta UV; ma, essendo $n^2 - n$ il numero dei punti di Π fuori di l ed UV, le $n^2 - n$ omologie considerate sono tutte le possibili omologie di asse l col centro sulla retta UV. Dunque:

Il piano Π *è* $UV - l$ *transitivo.*

Siano ora U_1 $U_2, \ldots,$ U_n, gli n punti di h distinti da V, L_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ il punto comune alle rette l, UU_i. Avendo supposto $n \geq 3$, esiste su UU_i un punto K_i distinto da U, U_i, L_i; per la b) esiste un'omologia (³) (unica), sia τ_1, di centro U ed asse l che porta K_i in U_i.

Sia ora N_1 un punto di VU distinto da V, U; τ_1 porterà N_1 in un punto N_2 distinto ancora da V, U, N_1 ed appartenente alla retta VU. Sia inoltre R, il punto comune alle rette L_iN_1 e U_iN_2. L'ipotesi a), comporta l'esistenza di un'omologia τ_2 di centro U_i ed asse l che muta N_2 in R, essendo U_i su h e U_i, N_2, R allineati. L'omologia $\tau_1\tau_2$, avrà il centro sulla retta U_iU poichè questa congiunge i centri di τ_1 e τ_2; inoltre, $\tau_1\tau_2$, avrà il centro sulla retta $N_1 R$, essendo:

$$\tau_1\tau_2(N_1) = \tau_2(N_2) = R.$$

Poichè L_i è il punto comune ad U_iU ed N_1R, il centro dell'omologia è il punto L_i. È inoltre chiaro che: $\tau_1\tau_2(K_i) = U_i$.

Dunque:

Per ogni punto K_i *di* L_iU_i *distinto da* L_i, U, U_i; *esiste un'omologia di asse* l *e centro* L_i *che porta* K_i *in* U_i.

Mostriamo ora che esiste una omologia (unica) di asse l e centro L_i che porta U in U_i. Sia ω una delle omologie di cui si è provata ora l'esistenza. Se $\omega(U) = U_i$ l'asserto è provato. Se $\omega(U) = U' \neq U_i$, esisterà una omologia ω' di centro L_i ed asse l

(³) Per provare l'unicità d'una tale omologia, basta ripetere il ragionamento che si fa nel caso desarguesiano. Vedi ad es.: G. ZAPPA, *Reticoli e Geometrie finite*, Liguori, Napoli, 1952.

per cui $\omega'(U') = U_\iota$. Ma:

$$\omega\omega'(U) = \omega'[\omega(U)] = U_\iota ,$$

donde consegue l'asserto.

Essendo V, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ tutti i punti di l, l'arbitrarietà di K_ι sulla retta $U L_\iota$ e quanto sopra visto provano che:

Esistono tutte le omologie speciali d'asse l.

Ripetendo il ragionamento che ha portato a riconoscere l'esistenza di tutte le omologie di asse l con il centro sulla retta VU, se ne deduce l'esistenza di tutte le omologie di asse l con il centro sulle rette $U L_\iota$. Esistono dunque, tutte le omologie di asse l con i centri sulle $n+1$ rette di Π uscenti da U, e pertanto, tali centri sono n^2+n+1, cioè quando sono i punti di Π. Allora il piano Π è desarguesiano rispetto ad l, e, per un noto teorema ([4]), desarguesiano.

Si supponga ora che per Π valgano le ipotesi iniziali, tranne la b), sostituita dalla seguente:

b') *Vi è un punto* U *di l distinto da* V, *tale che esistano tutte le omologie di asse l e centro* U.

Ragionamenti del tutto analoghi a quelli precedenti, provano l'esistenza di ogni omologia di asse l col centro sulle rette UU_ι, essendo U_1, $U_2, \ldots, U_n$ i punti di h distinti da V. Detto ancora T il gruppo delle omologie di asse l col centro in U, una omologia $\sigma\tau$ (σ in S, τ in T) è una omologia speciale di asse l con il centro distinto da V ed U. Se inoltre σ_ι, σ_j sono omologie di S e τ_h, τ_k omologie di T, non può aversi $\sigma_j\tau_h = \sigma_\iota\tau_k$; ciò, perchè si suppone $\sigma_\iota \neq \sigma_j$, $\tau_h \neq \tau_k$ ed essendo il prodotto di due omologie dello stesso asse e dello stesso centro, una omologia avente quell'asse e quel centro.

Avendo S e T ciascuno ordine n, segue da quanto sopra che esistono almeno n^2 omologie speciali di asse l. Ma, in Π, non possono esservi più di n^2 omologie speciali di dato asse, dunque esistono tutte le omologie speciali di asse l. Queste, insieme con le omologie aventi il centro sulle rette UU_ι, sono tutte le possibili omologie di Π aventi asse l. Essendo i punti di l, UU_ι in numero

([4]) Vedi ad es.: L. LOMBARDO RADICE, *Una nuova costruzione dei piani grafici desarguesiani finiti*, « Ric di Mat. », 1, (1953) pp. 47-57.

di $n^2 + n + 1$, il piano Π è desarguesiano rispetto ad l, e, quindi, desarguesiano.

In conclusione, tutto quanto precedentemente visto prova il seguente:

TEOREMA I. - *Sia* Π *un piano grafico finito irriducibile,* h – l *transitivo e sia* U *un punto di* Π *fuori di* h. *Se esistono tutte le omologie di asse* l *con il centro in* U, Π *è desarguesiano.*

Essendo Π anche $l - h$ transitivo (5), la conclusione precedente vale anche quando si postuli l'esistenza di tutte le omologie di asse h, con il centro in un dato punto U fuori di l.

3. Secondo R. BAER (1), dicesi $H - L$ transitivo un piano grafico dotato di due punti L, H, tali che:

a) *Esistono tutte le omologie di centro* L *con l'asse passante per* H.

b) *Esistono tutte le omologie speciali aventi per asse la retta* LH.

Il Prof. L. LOMBARDO RADICE, ha dimostrato (2) che i piani $h - l$ transitivi sono tutti e soli i piani sopra i sistemi inversi di quasi-corpi del DICKSON; e, che conseguentemente (6) i piani su quasi-corpi del DICKSON, sono tutti e soli i piani $H - L$ transitivi.

Pertanto, il teorema I, si traduce per dualità nel seguente:

TEOREMA II. - *Sia* Π *un piano grafico finito irriducibile* H — L *transitivo e sia* u *una retta di* Π *non passante per* H. *Se esistono tutte le omologie di centro* L *ed asse* u, Π *è desarguesiano.*

È ovvio come si modifichi quanto sopra, volendo tener presente che un piano $H - L$ transitivo, è anche $L - H$ transitivo (6).

(5) G. ZAPPA, *Sulle omologie dei piani* h — l *transitivi e dei piani su quasi-corpi*, « Ric. di Mat. », 1, (1954), pp 35-39.

(6) L LOMBARDO RADICE, *L'inversione come dualità nei piani su sistemi cartesiani*, « Ric. di Mat. », 1, (1954), pp. 31-34.