Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ernest Stipanić

Un teorema sulle serie convergenti a termini di segno alternato.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 242–247.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_242_0>

Un teorema sulle serie convergenti a termini di segno alternato.

Nota di ERNEST STIPANIĆ (a Belgrado)

Sunto. - *Sulle serie a termini positivi* U. DINI *ha dimostrato* [1] *il seguente teorema:*

Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *è una serie convergente a termini positivi, allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r_{n-1}^{\delta}}$ *sarà divergente per* $\delta \geq 1$ *e convergente per* $\delta < 1$, *dove* $r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k$.

In questo lavoro dimostreremo per una classe delle serie convergenti a termini di segno alternato un teorema il quale, nel suo risultato fondamentale, è analogo al ricordato teorema del DINI.

TEOREMA. - *Se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \qquad (u_n > 0,\ n \in N) \tag{1}$$ (1)

è una serie convergente di somma s, *dove* (N) *è l'insieme dei numeri naturali, e se*

$$1 < \frac{(-1)^{n-1} u_n}{r_{n-1}} < 2 \qquad (n \in N) \tag{2}$$

allora sarà

a) $s_{2\nu} < s_{2\nu+2} < s < s_{2\nu-1} < s_{2\nu+1} \left(\nu \in N;\ s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k\right)$

b) *la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}} \tag{3}$$

divergente per $\delta \geq 1$ *e convergente per* $\delta < 1$. *In questo ultimo caso la serie* (3) *ha la somma*

$$\sigma' = \mu \cdot s^{1-\delta} \quad \left(0 < \delta < 1;\ 1 < \mu < \left[\frac{1}{1-\delta}\right] + 1\right)$$ (2)

rispettivamente

$$\sigma'' = s^{1-\delta} + |r_1|\, s^{-\delta} \cdot v \quad (\delta < 0,\ -1 < v < 0;\ \delta = 0,\ v = 0).$$

(1) Quando è $u_n < 0$, $n \in N$ i ragionamenti sono completamente analoghi ai ragionamenti pel caso $u_n > 0$, $n \in N$.

(2) $\left[\frac{1}{1-\delta}\right]$ significa il massimo numero naturale n' il quale soddisfa la condizione $n' < \frac{1}{1-\delta}$.

DIMOSTRAZIONE. - Dimostriamo preliminarmente l'asserzione a). Prendiamo perciò la condizione (2)

$$1 < \frac{(-1)^{n-1} u_n}{r_{n-1}} < 2 \qquad (n \varepsilon N) \tag{4}$$

oppure

$$1 < \frac{s_n - s_{n-1}}{s - s_{n-1}} < 2 \qquad (n \varepsilon N) \tag{5}$$

Se si suppone

$$s_{p+2m-2} > s_{p+2m-3}$$

dove sono $p \geq 1$ e $m \geq 1$ numeri naturali, allora sarà per la (5)

$$s_{p+2m-3} < s \tag{6}$$

e

$$s_{p+2m-2} - s_{p+2m-3} > s - s_{p+2m-3}$$

cioè

$$s < s_{p+2m-2} . \tag{7}$$

In base alle relazioni (5) e (6) segue

$$s_{p+2m-1} - s_{p+2m-2} < s - s_{p+2m-2}$$

da cui

$$s_{p+2m-1} < s \tag{8}$$

che in rapporto alla relazione (5) dà

$$s_{p+2m} - s_{p+2m-1} > s - s_{p+2m-1}$$

oppure

$$s < s_{p+2m} . \tag{9}$$

Dunque, poichè in base alle relazioni (6) e (7), vale la relazione

$$s_{p+2m-3} < s < s_{p+2m-2} \tag{10}$$

segue che a causa di (8) e (9), vale anche la relazione

$$s_{p+2m-1} < s < s_{p+2m}$$

od anche

$$s_{p+2(m+1)-3} < s < s_{p+2(m+1)-2} . \tag{11}$$

Siccome nel nostro caso la relazione (10) è soddisfatta per $p = 1$ e $m = 1$ (perchè è $s_1 = u_1 > 0$ e $s_0 = 0$) risulta, secondo il principio d'induzione completa ed in base alla (11), che

$$s_{2\nu} < s < s_{2\nu+1} \tag{12}$$

sarà soddisfatta per ogni $\nu \varepsilon N$.

La relazione (5) si può scrivere nella forma

$$\frac{s_n - s_{n-1}}{s - s_{n-1}} = 2 - \alpha_n \qquad (0 < \alpha_n < 1,\ n \in N) \tag{13}$$

dalla quale segue

$$s_n = 2s - s_{n-1} - \alpha_n(s - s_{n-1}),\quad s_{n-1} = 2s - s_n - \alpha_{n+1}(s - s_n) \qquad (n \in N)$$

e anche

$$s_{n+1} - s_{n-1} = \alpha_n(s - s_{n-1}) - \alpha_{n+1}(s - s_n) \qquad (n \in N). \tag{14}$$

Se si mette nella relazione (14) prima $n = 2\nu$ e poi $n = 2\nu + 1$, allora avremo

$$\begin{aligned} s_{2\nu+1} - s_{2\nu-1} &= \alpha_{2\nu}(s - s_{2\nu-1}) - \alpha_{2\nu+1}(s - s_{2\nu}) \\ s_{2\nu+2} - s_{2\nu} &= \alpha_{2\nu+1}(s - s_{2\nu}) - \alpha_{2\nu+2}(s - s_{2\nu+1}) \end{aligned} \qquad (\nu \in N). \tag{15}$$

Essendo

$$s - s_{2\nu-1} < 0, \qquad s - s_{2\nu} > 0 \qquad (\nu \in N)$$

per la (12) e

$$0 < \alpha_n < 1 \qquad (n \in N)$$

per la (13), risulta in base alla (15) che deve essere

$$s_{2\nu+1} < s_{2\nu-1} \quad \text{e} \quad s_{2\nu} < s_{2\nu+2} \qquad (\nu \in N). \tag{16}$$

Dunque, in base alle (12) e (16), segue definitivamente

$$s_{2\nu} < s_{2\nu+2} < s < s_{2\nu+1} < s_{2\nu-1} \qquad (\nu \in N)$$

q. e. d.

La relazione dedotta mostra che la serie (1) appartiene alle serie convergenti le quali soddisfanno il noto criterio della convergenza di LEIBNIZ [2].

Dimostriamo adesso l'asserzione b). Poichè

$$\frac{s_n - s_{n-1}}{s - s_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}u_n}{r_{n-1}} \qquad (n \in N,\ s_0 = 0)$$

e perciò

$$\frac{s - s_n}{s - s_{n-1}} = 1 - \frac{(-1)^{n-1}u_n}{r_{n-1}} \qquad (n \in N)$$

si arriva facilmente alla relazione

$$s - s_n = s \cdot \prod_{k=1}^{n} \left\{ 1 - \frac{(-1)^{k-1}u_k}{r_{k-1}} \right\}$$

oppure

$$|s - s_n| = s \prod_{k=1}^{n} \left| \left\{ 1 - \left(2 - \frac{(-1)^{k-1}u_k}{r_{k-1}} \right) \right\} \right| \qquad (n \in N,\ |s| = s). \tag{17}$$

Per ipotesi

$$|s - s_n| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

e così pure per la (2)

(18) $$0 < 2 - \frac{(-1)^{k-1} \cdot u_k}{r_{k-1}} < 1 \qquad (k \varepsilon N)$$

e in base ad un noto teorema dalla teoria dei prodotti infiniti [3] segue

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2 - \frac{(-1)^{k-1} u_k}{r_{k-1}}\right) \to \infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Siccome la serie (1) soddisfa il criterio della convergenza di LEIBNIZ, si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2 - \frac{(-1)^{k-1} u_k}{r_{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{k-1} + r_k}{r_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|r_{k-1}| - |r_k|}{|r_{k-1}|},$$

che significa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|r_{k-1}| - |r_k|}{|r_{k-1}|} \to \infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

ed anche

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|r_{k-1}| - |r_k|}{|r_{k-1}|^\delta} \to \infty \qquad \text{per } \delta > 1$$

perchè $r_{n-1} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Consideriamo adesso il caso quando è $0 < \delta < 1$. Mostriamo anzitutto che

$$|r_n| < |r_{n-1}| \qquad (n \varepsilon N).$$

Infatti, essendo

$$\frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|} > 0 \qquad (n \varepsilon N)$$

a causa della condizione (18) risulta che

(19) $$|r_n| < |r_{n-1}| \qquad (n \varepsilon N).$$

Se si pone

$$\left|\frac{r_n}{r_{n-1}}\right| = q^{\frac{1}{1-\delta}} \qquad (n \varepsilon N)$$

avremo

(20) $$\frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^\delta} = \left(1 - q^{\frac{1}{1-\delta}}\right) |r_{n-1}|^{1-\delta} \qquad (n \varepsilon N).$$

Poichè

$$0 < 1 - \delta < 1$$

si ha

$$\frac{1}{t+1} \leq 1 - \delta \leq \frac{1}{t}$$

oppure

$$t \leq \frac{1}{1-\delta} \leq t+1$$

dove è t un numero naturale, e avendosi ancora

$$0 < q < 1$$

a causa della (19), risulta

$$\frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}} \leq (1-q^{t+1})\,|r_{n-1}|^{1-\delta} < (t+1)(1-q)\,|r_{n-1}|^{1-\delta} \text{ [3] } \quad (n \,\varepsilon\, N)$$

od infine

$$\frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}} < (t+1)(\,|r_{n-1}|^{1-\delta} - |r_n|^{1-\delta})$$

cioè

(21) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}} < (t+1)\cdot s^{1-\delta} \qquad (s = |r_0|).$$

Dunque, la serie (3) è convergente per $0 < \delta < 1$.
In base alle relazioni (19) sarà

$$\frac{1}{|r_0|^{\delta}}(\,|r_{n-1}| - |r_n|\,) < \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}} \qquad (n \,\varepsilon\, N)$$

cioè

(22) $$s^{1-\delta} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}}.$$

Dalle relazioni (21) e (22) facilmente si arriva alla relazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}} = s^{1-\delta}(1+\theta t) \text{ [4]}. \qquad (0 < \theta < 1),$$

da cui

$$\sigma' = \mu s^{1-\delta} \quad \left(0 < \delta < 1,\ 1 < \mu < \left[\frac{1}{1-\delta}\right] + 1\right).$$

(3) Nel caso quando è $\frac{1}{1-\delta} = t$, allora sarà $\frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}} = (1-q^t)\,|r_{n-1}|^{1-\delta}$ etc.

(4) Oppure $s^{1-\delta}(1+\theta(t-1))$ quando è $\frac{1}{1-\delta} = t$.

Quando è $\delta \leq 0$ sarà

$$q^{\frac{1}{1-\delta}} \geq q$$

oppure

$$1 - q^{\frac{1}{1-\delta}} \leq 1 - q$$

e dalla relazione (20) segue

$$\frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^\delta} \leq (1-q) |r_{n-1}|^{1-\delta} \qquad (n \varepsilon N)$$

e

$$\frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^\delta} \leq \{ |r_{n-1}|^{1-\delta} - |r_n|^{1-\delta} \} \qquad (n \varepsilon N)$$

perciò

(23)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^\delta} \leq s^{1-\delta}.$$

Inoltre è

$$\frac{|r_0| - |r_1|}{|r_0|^\delta} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^\delta}$$

cioè

(24)
$$s^{1-\delta} - |r_1| s^{-\delta} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^\delta}.$$

Dalle relazioni (23) e (24) facilmente si arriva alla relazione

$$\sigma'' = s^{1-\delta} + |r_1| s^{-\delta} \cdot v \quad (\delta < 0, \ -1 < v < 0 ; \ \delta = 0, \ v = 0)$$

dove è

$$\sigma'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^\delta}, \qquad (\delta \leq 0).$$

Con ciò la parte b) è completamente dimostrata, e così pure il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] U. DINI, *Sulle serie a termini positivi*, « Ann. Univ. Toscana », Fasc. 9, 1867.
K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, p. 302, Berlin, 1931.
[2] A. PRINGSHEIM, *Vorlesungen uber Zahlen-und Funktionenlehre*, I_2, p. 413 414, 1916.
[3] Ibid, I_3, p. 621, 1921.