Bollettino
Unione Matematica Italiana

Adriano Barlotti

Un'osservazione sulle k-calotte degli spazi lineari finiti di dimensione tre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 248–252.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_248_0>

Un'osservazione sulle k-calotte degli spazi lineari finiti di dimensione tre.

Nota di ADRIANO BARLOTTI (a Firenze)

Sunto. - *Si assegna una condizione sufficiente perchè, in uno spazio lineare finito di dimensione tre e di ordine* q *dispari, una* (q^2-h)*-calotta sia contenuta in una* (q^2+1)*-calotta.*

1. Sia $S_{2,q}$ un piano lineare finito di ordine q dispari. È noto che il massimo valore di k per cui in $S_{2,q}$ esiste qualche k–arco è dato da $q+1$ (1). In una recente memoria, ricca di interessanti risultati, e nella quale vengono posti, e in buona parte anche risolti, i problemi fondamentali relativi allo studio dei k–archi, B. SEGRE ha, fra l'altro, dimostrato che in $S_{2,q}$ ogni q–arco è contenuto in un $q+1$–arco (2). Nella presente nota ci proponiamo di stabilire un risultato analogo per particolari insiemi di punti di uno spazio lineare finito, $S_{3,q}$, di dimensione tre e di ordine q dispari, i quali godono in $S_{3,q}$ della stessa proprietà che caratterizza i k–archi nel piano.

2. Chiamiamo *k-calotta* di $S_{3,q}$ un insieme di k punti di questo spazio di cui mai tre risultino allineati. Il valore massimo di k per cui in $S_{3,q}$ esiste qualche k–calotta è $k=q^2+1$ (3). Si presenta allora il seguente problema: quali sono i valori di k $(\leq q^2)$ tali che ogni k–calotta sia contenuta in una (q^2+1)–calotta di $S_{3,q}$?

Una risposta parziale a questa domanda è data dal seguente teorema:

Per $q \geq 7$ *ogni* (q^2-h)*–calotta di* $S_{3,q}$, *con* $0 \leq h \leq q-7$, *è contenuta in una* (q^2+1)*–calotta.*

Nei casi $q=3$ *e* $q=5$ *una* q^2*–calotta è sempre contenuta in una* (q^2+1)*–calotta.*

3. Conviene osservare per il seguito che per ogni (q^2-h)–calotta, $\mathfrak{C}$, (con $0 \leq h < q-1$) di un qualunque spazio $S_{3,q}$ (con

(1) Si veda, p. es., B. SEGRE [3], Teorema II.

(2) Cfr. B. SEGRE [3], Teorema IV.

(3) Cfr. R. C. BOSE [2]. Possiamo aggiungere che in corrispondenza a tale valore la k-calotta è precisamente una quadrica a punti ellittici: Cfr. A. BARLOTTI [1], Teorema 1.

q dispari) valgono le seguenti proprietà ([4]):

a) *Nessun piano di* $S_{3,q}$ *contiene più di* $q+1$ *punti di* $\mathfrak{C}$.

b) *Se un piano contiene due punti di* $\mathfrak{C}$, *ad esso appartengono almeno* $q-h$ *punti di* $\mathfrak{C}$.

c) *Se si considerano due punti di* $\mathfrak{C}$, *almeno* $q-h$ *dei* $q+1$ *piani che passano per essi segano* $\mathfrak{C}$ *lungo un* $(q+1)$*-arco.*

Occupiamoci per ora della prima parte del teorema, supponiamo cioè che sia $q \geq 7$ e $0 \leq h \leq q-7$. In tali ipotesi segue subito dalla c) che per una qualsiasi retta che contenga due punti di $\mathfrak{C}$ passano almeno 7 piani ciascuno dei quali taglia $\mathfrak{C}$ lungo un $(q+1)$-arco.

Consideriamo allora due punti A e B di $\mathfrak{C}$, e siano r e s due $(q+1)$-archi ottenuti intersecando $\mathfrak{C}$ con due piani per la retta AB. Indichiamo poi con C e D due punti (diversi da A e B e) appartenenti rispettivamente ad r e s. Si prenda quindi un piano passante per C e D, non contenente né A né B, e nemmeno la tangente ad r in C o quella ad s in D, che sechi $\mathfrak{C}$ lungo un $(q+1)$-arco, t. Questo $(q+1)$-arco dovrà incontrare ulteriormente r in un punto E (distinto da A, B e C) ed s in un punto F (distinto da A, B e D). Consideriamo ora i punti A, B, C, D, E, F e un ulteriore punto generico su ciascuno dei $(q+1)$-archi r, s e t. Per tali nove punti passa una quadrica, Γ, contenente necessariamente r, s e t. Si scelgano quindi su t un punto, M, distinto dai precedenti, e per la retta MA un piano non passante per B, C, D, E, F e secante $\mathfrak{C}$ lungo un $(q+1)$-arco, u. Questo $(q+1)$-arco ha con Γ almeno cinque intersezioni, in A, in M, e nei punti in cui incontra ulteriormente r, s e t ([5]); quindi anche u appartiene a Γ. In modo analogo, partendo da un punto N di t (diverso dai punti prima considerati) si può trovare un $(q+1)$-arco piano, v, passante per N ed A e appartenente contemporaneamente a $\mathfrak{C}$ e a Γ.

Sia ora X un qualunque punto di $\mathfrak{C}$. Si può sempre trovare un piano passante per la retta AX, secante $\mathfrak{C}$ lungo un $(q+1)$-arco, e che non contenga alcuna delle sei ulteriori intersezioni reciproche di r, s, u e v. Con un ragionamento del tutto analogo a quello effettuato sopra per provare che u sta su Γ si riconosce che anche

([4]) La *a*) e la *b*) si dimostrano in modo del tutto analogo a quello seguito per provare le *a*) e *b*) in [1] n. 3. La *c*) segue subito dall'uguaglianza:

$$(q-h)(q-1)+(h+1)(q-2)+2=q^2-h.$$

([5]) Qualcuno di questi può anche coincidere con A od M se u ed uno dei $(q+1)$-archi, r, s, t hanno in A o in M la medesima tangente.

questo $(q+1)$–arco e quindi il punto X appartengono a Γ. Cioè *tutti i punti di* $\mathfrak{C}$ *stanno anche su* Γ.

Resta ancora da provare che la quadrica Γ è a punti ellittici. Ma per questo basta osservare che, quando è $q \geq 7$, se si prendono $q^2 - h$ punti su una quadrica a punti iperbolici, o a punti parabolici, fra questi si trovano sempre delle terne di punti allineati.

4. Passiamo ad esaminare i casi $q=3$ e $q=5$ che sono rimasti esclusi nella trattazione precedente, e cominciamo da $q=3$. Si riconosce subito che in $S_{3,3}$:

1) Ogni 9–calotta è contenuta in una quadrica a punti ellittici.

2) Esistono delle 8–calotte che non si possono ulteriormente ampliare in una 10–calotta.

La 1) segue dal fatto che la quadrica che passa per i 9 punti della 9–calotta è necessariamente a punti ellittici. Infatti se essa fosse di tipo diverso, fra i suoi punti ve ne sarebbero almeno tre allineati.

Un esempio che provi la 2) si ottiene prendendo in modo opportuno due punti su ciascuna delle quattro generatrici di un cono Φ. Per gli otto punti che così si ottengono passano soltanto quattro quadriche [6] e queste sono date dal cono stesso e dalle tre coppie di piani che passano per le quattro generatrici.

5. Consideriamo infine il caso $q=5$. Da un qualunque punto, P, di una q^2–calotta, $\mathfrak{C}$, escono $q+2$ tangenti di $\mathfrak{C}$. Di queste tre almeno sono complanari, poichè altrimenti le loro intersezioni con un piano non passante per P darebbero un $(q+2)$–arco che invece, come è noto, non può esistere. Il piano di quelle tre tangenti non può contenere nessun altro punto di $\mathfrak{C}$, oltre P, poichè, per la b) del n. 3, se contenesse due punti di $\mathfrak{C}$, dovrebbe tagliare $\mathfrak{C}$ lungo un q–arco, e allora da P si potrebbero condurre solo due tangenti a questo, mentre per ipotesi in quel piano stanno tre tangenti a $\mathfrak{C}$ passanti per P. Ne deriva che *in ogni punto di* $\mathfrak{C}$ *esiste un piano tangente,* cioè un piano al quale non appartiene nessun

[6] Basta prendere i punti in modo che quattro di essi cadano nelle intersezioni A, B, C, D delle quattro generatrici a, b, c, d, di Φ con un piano ρ non passante per il vertice, V, altri tre, E, F, G nelle intersezioni di un piano σ, non passante per V, A, B, C, D, con a, b, c; l'ulteriore punto H nel punto di d, diverso da V, da D e dall'intersezione di σ con d. Si vede facilmente che tali punti impongono condizioni indipendenti alle quadriche che debbono contenerli, onde per essi passano solo $4 (= q+1)$ quadriche.

ulteriore punto di $\mathfrak{C}$ e che quindi contiene $q+1$ delle $q+2$ tangenti a $\mathfrak{C}$ uscenti dal punto considerato.

Siano ora A e B due punti di $\mathfrak{C}$, α e β i piani tangenti in essi a $\mathfrak{C}$, e γ un piano per la retta AB che tagli $\mathfrak{C}$ lungo un $(q+1)$–arco, u. Indichiamo poi con a una retta di α, passante per A, e diversa dalla tangente ad u in A, e con δ un piano per a, non passante per B, che sechi $\mathfrak{C}$ secondo un $(q+1)$-arco, v, Chiamiamo infine C l'intersezione, diversa da A, di u con v, e D ed E due punti di v diversi da A e C.

La quadrica, Γ, passante per A, B, C, D ed E e tangente in A e in B rispettivamente ad α e a β, contiene u e v (onde l'intersezione di Γ e δ si riduce a v). Inoltre essa risulta a punti ellittici, ed è cioè una (q^2+1)-calotta. Infatti il piano β, tangente a Γ in B non può contenere delle rette giacenti su Γ, perchè i punti M ed N comuni a tali rette e a δ dovrebbero cadere nell'intersezione di Γ e δ, cioè, come si è visto, nella v, e pertanto apparterrebbero anche a $\mathfrak{C}$; mentre, d'altro lato, avendo β a comune con $\mathfrak{C}$ il solo punto B, i punti M ed N non potrebbero stare su $\mathfrak{C}$.

Si consideri ora un qualunque piano, ε, per la retta AB, diverso da γ, non passante per la retta a e che seghi $\mathfrak{C}$ secondo un $(q+1)$–arco, w. Un tale $(q+1)$–arco risulta tangente in A e in B, rispettivamente, alle intersezioni di ε con α e β, e contiene inoltre il punto, diverso da A, in cui ε taglia v. Ma allora w sta anche sulla quadrica Γ, e si trova così che appartengono a Γ tutti i punti di $\mathfrak{C}$, fatta al più eccezione per quelli situati sul piano $\pi_1 \equiv (a, B)$ e sul piano, π_2, passante per AB e contenente solo q punti di $\mathfrak{C}$.

Ma anche i punti di $\mathfrak{C}$ che sono contenuti su questi due piani giacciono su Γ, poichè ogni punto di $\pi_i\,(i=1, 2)$ non appartenente a Γ è allineato con almeno due punti di $\mathfrak{C}$ e quindi non può essere situato sulla q^2–calotta. Infatti sia X un qualunque punto di π_i che non sta su Γ. Dalla quadrica togliamo i $q+1$ punti che stanno su π_i (e fra i quali si trovano A e B). Proiettiamo poi da X l'intersezione della quadrica con π_j $(j \neq i)$ e cancelliamo da essa i punti in cui è incontrata da quelle rette: si levano cosi al più ancora $2q$ punti ([7]). Infine togliamo i punti di contatto delle rette per X tangenti a Γ, i quali sono in numero minore o uguale a $q+1$.

([7]) Qui e nel seguito si intende che la cancellazione avviene solo se il punto non è già stato tolto. Così, proiettando i punti comuni a Γ e a π_j si hanno $q+1$ rette che contengono tutt'al più $2(q+1)$ punti di Γ, ma fra questi si trovano anche A e B che sono già stati levati togliendo i punti comuni a Γ e a π_i. In corrispondenza al piano π_j si cancella così un numero di punti che è minore od uguale a $2q$.

Restano così su Γ ancora dei punti (in numero almeno uguale a quattro) che stanno a due a due su rette uscenti da X e per quanto si è visto sopra, appartengono anche a $\mathfrak{C}$.

Ogni punto di $\mathfrak{C}$ è contenuto quindi in Γ, ed il teorema è così completamente dimostrato.

6. Il risultato ottenuto nei numeri precedenti è forse suscettibile di miglioramento, poichè non possiamo escludere che esistano dei valori di k minori di $q^2 - q + 7$, per $q \geq 7$, o minori di q^2, per $q = 5$, tali che in corrispondenza di essi ogni k-calotta sia sempre contenuta in una (q^2+1)-calotta. Noi mostriamo qui come si costruisca facilmente una k-calotta, con $k = \frac{1}{2}\, q(q+1) + 2$, i cui punti non possono appartenere ad una (q^2+1)-calotta.

Si consideri per questo una quadrica a punti ellittici, Δ. Sia P un punto appartenente ad una tangente, t, di Δ, ma non a Δ. Da P escono, oltre t, altre q tangenti di Δ (8), e quindi $\frac{q^2-q}{2}$ rette secanti la quadrica.

Se da Δ sopprimiamo un punto su ciascuna di queste secanti e all'insieme dei punti residui aggiungiamo P, otteniamo proprio

$$k = \frac{1}{2}\, q(q+1) + 2$$

punti costituenti una k-calotta. Questi non possono appartenere ad una (q^2+1)-calotta, perchè la Δ, che non contiene P, passa per tutti gli altri punti della k-calotta, e d'altra parte si riconosce facilmente che due quadriche a punti ellittici per $q \geq 5$ non possono avere in comune $\frac{1}{2}\, q(q+1) + 1$ punti (9).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Barlotti, *Un' estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, « Boll. U.M.I. », (3), 10 (1955), pp. 498-506.

[2] R. C. Bose, *Mathematical theory of factorial design*, « Sankhya », 8 (1947), pp. 107-166.

[3] B. Segre, *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti*, « Annali di Matematica », (4), 39 (1955), pp. 357-379.

(8) Ogni piano per t, escluso quello tangente a Δ, taglia la quadrica lungo un $(q+1)$-arco e da P esce un'ulteriore tangente a questo.

(9) I punti comuni a due quadriche a punti ellittici non possono essere più di $2(q+2)$. Infatti la loro intersezione, quando non sia spezzata in due coniche, è una quartica gobba che proiettata da un suo punto in un piano dà una cubica piana i cui punti non sono certamente più di $2q+3$.