Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ettore Carruccio

I sistemi quasi coerenti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 254–256.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_254_0>

I sistemi quasi coerenti.

Nota di Ettore Carruccio (a Torino)

Sunto. - *Da un' osservazione del* Poincaré *si prende lo spunto per definire una particolare classe di sistemi razionali, che vengono chiamati* quasi coerenti. *Si prospettano problemi logici riguardanti detti sistemi, dei quali si propongono diverse applicazioni.*

Una singolare struttura logica venne prospettata con intenti polemici contro «les logisticiens» in genere e L. Couturat in particolare, da H. Poincaré, il quale osservava nel 1909: «Il faut que nous soyons sûr de ne pas rencontrer de contradiction, à la condition de convenir de nous arrêter juste, au moment oú nous serions sur le point d'en rencontrer une? Il suffit d'énoncer une pareille proposition pour la condamner» (1).

Inquadrata nel tempo in cui è stata formulata, è perfettamente comprensibile la decisa condanna pronunciata dal Poincaré, condanna che anche oggi molti matematici sottoscriverebbero volentieri. Tuttavia la situazione attuale nei riguardi dei problemi concernenti la struttura logica delle teorie matematiche, dal 1909 ad oggi è profondamente mutata. La costruzione delle logiche non-aristoteliche, il convenzionalismo logico del Carnap, ed il suo atteggiamento di fronte alle antinomie, confermato da L. Geymonat, il teorema del Gödel sull'impossibilità di dimostrare la non contraddittorietà di un sistema con mezzi intrinseci al sistema

(1) *Science et Méthode*, Parigi, 1909, p. 200, v. anche p. 197.

stesso (²), sono tutti elementi tali da rendere, non dico accettabile, ma suggestiva e, forse, fonte di fecondi studi, l'eventualità condannata dal POINCARÉ.

Ma innanzi tutto gioverà precisare la struttura logica dei sistemi razionali costruiti secondo il criterio sopra considerato.

Questi sistemi si basino su di un insieme di postulati in numero finito: $p_1, p_2, \ldots, p_m$, sui quali si operi mediante regole per dedurre anche queste in numero finito: $r_1, r_2, \ldots, r_n$. In virtù delle regole per dedurre, siano definite le conseguenze immediate dei detti postulati, indicate con $c_1, c_2, \ldots, c_k$, le conseguenze immediate di $p_1, \ldots, p_m, c_1, \ldots, c_k$, indicate con $c'_1, \ldots, c'_l$, e così via. L'insieme di proposizioni del sistema che così si forma può essere finito o numerabile (³).

Notiamo che è possibile ordinare in più modi la successione delle proposizioni del sistema S considerato. Poniamoci ora nell'ipotesi che esistano nel sistema S proposizioni esplicitamente contraddittorie, cioè della forma, secondo il simbolismo di HILBERT, P e $\overline{P}$. In tal caso, fissato un ordinamento delle proposizioni di S, sopprimiamo ogni proposizione che risulti esplicitamente in contraddizione con una delle precedenti (postulato o teorema), proseguendo nello sviluppo del sistema senza più tener conto delle proposizioni soppresse. Con questo procedimento otteniamo un *sistema razionale* che possiamo chiamare *quasi coerente.*

Sui sistemi quasi coerenti si presentano vari problemi.

Almeno fino dal Medioevo si sa che da due proposizioni contraddittorie si può ricavare qualsiasi proposizione (teorema dello Pseudo-Scoto), quindi in un sistema razionale contraddittorio, ogni proposizione è dimostrabile; pertanto tali sistemi sono privi d'interesse speculativo. Ora ci si domanda: per i sistemi quasi coerenti si verifica un caso analogo? La risposta è negativa, in quanto in tali sistemi non sono dimostrabili almeno le proposizioni contraddittorie con un postulato od un teorema precedentemente dimostrato. Ma le proposizione che non rientrano in detta classe, pur essendo esprimibili nel sistema considerato, sono tutte dimostrabili? Propongo il problema agli studiosi di logica matematica che vorranno interessarsene. Altrettando dicasi per le seguenti questioni: un sistema quasi coerente è sempre inter-

(²) V. p. es. E. CARRUCCIO, *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Torino, 1952, cap. XX, § 2, § 3, § 6.

(³) Ved. E. CARRUCCIO, *Sulla potenza dell' insieme delle proposizioni di un dato sistema ipotetico deduttivo*, « Bollettino dell' Unione Matematica Italiana », ottobre 1949.

pretabile in seno ad un sistema coerente? È sempre scindibile in un numero finito di sistemi coerenti?

Lo studio dei sistemi quasi coerenti presenta un notevole interesse ai fini delle applicazioni della logica all'attività pratica degli individui e delle collettività ed alla scienza del mondo fisico.

È noto che spesso gli individui agiscono sulla base di norme fondamentali incompatibili fra loro, tali cioè che fra le loro conseguenze sussistono norme contraddittorie; tuttavia tali individui mirano a sopprimere dal loro sistema le contraddizioni esplicite. Non è escluso che qualche cosa di simile accada per sistemi di leggi in vigore in un dato stato, in un determinato momento storico.

In certi periodi della storia delle scienze fisiche possono venir sviluppati, almeno in via provvisoria, sistemi quasi coerenti.

Concludo esprimendo l'augurio che non ci si accorga un giorno che qualche importante ramo della nostra matematica non è altro che un sistema quasi coerente....