
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DRAGOSLAV S. MITRINOVITCH

Problème sur les progressions arithmétiques.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 11
(1956), n.2, p. 256–257.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_256_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Problème sur les progressions arithmétiques.

Nota di DRAGOSLAV S. MITRINOVITCH (a Belgrado)

Sunto. - On démontre que l'expression

$$\prod_{v=0}^h (a + vd) + (-1)^k \prod_{v=0}^k (b + vd)$$

est divisible par $a + b + kd$, ce qui englobe un résultat de BARSOTTI, comme un cas particulier.

L. BARSOTTI ⁽¹⁾ a démontré la relation suivante :

$$(1) \quad (2n)!! \equiv (-1)^n (2n - 1)!! \pmod{2n + 1}.$$

On peut généraliser ce résultat de la manière suivante.

Considérons les deux progressions suivantes :

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + kd;$$

$$b, b + d, b + 2d, \dots, b + kd,$$

où a, b, d sont des nombres quelconques.

(1) Nous avons rencontré ce résultat dans le rapport de LEHMER sur la Note de BARSOTTI intitulée *Some theorems on numerical divisibility*, « Mathematical Reviews », t. 16, 1955, p. 1088.

Formons ensuite l'expression

$$E \equiv \prod_{\nu=0}^k (a + \nu d) + \lambda \prod_{\nu=0}^k (b + \nu d),$$

λ étant un paramètre.

PROPOSITION. - L'expression E est divisible par

$$a + b + kd, \text{ si } \lambda = (-1)^k.$$

DÉMONSTRATION. - Écrivons $\prod_{\nu=0}^k (a + \nu d)$ sous la forme

$$\begin{aligned} (2) \quad & [(a + b + kd) - b][(a + b + kd) - (b + d)] \dots [(a + b + kd) - (b + kd)] \\ & \equiv (a + b + kd)^{k+1} - \sigma_1(a + b + kd)^k + \sigma_2(a + b + kd)^{k-1} - \dots \\ & \quad + (-1)^k \sigma_k(a + b + kd) + (-1)^{k+1} \prod_{\nu=0}^k (b + \nu d), \end{aligned}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots$ étant des fonctions symétriques élémentaires en $b, b + d, \dots, b + kd$.

A partir de la dernière identité on voit que E est divisible par $a + b + kd$ si

$$\lambda = -(-1)^{k+1}, \text{ ou bien } \lambda = (-1)^k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le cas où $a = 2, b = 1, d = 2, k = n - 1$ l'expression E devient

$$\begin{aligned} & \prod_{\nu=0}^{n-1} (2 + 2\nu) + (-1)^{n-1} \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 + 2\nu) \\ & \equiv (2n)!! - (-1)^n (2n - 1)!! \end{aligned}$$

La dernière expression est divisible par

$$a + b + kd \equiv 2n + 1,$$

ce qui est bien en accord avec le résultat cité de BARSOTTI.

L'identité (2) fait voir que si les paramètres b, d, k satisfont à $\sigma_k = 0$ et si $\lambda = (-1)^k$, l'expression E est divisible par $(a + b + kd)^2$.

Nous avons rédigé cette Note ne connaissant pas comment BARSOTTI a démontré la relation (1) qui présente un cas très particulier de notre résultat.