Bollettino
Unione Matematica Italiana

Dragoslav S. Mitrinovitch

Problème sur les progressions arithmétiques.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 256–257.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_256_0>

Problème sur les progressions arithmétiques.

Nota di DRAGOSLAV S. MITRINOVITCH (a Belgrado)

Sunto. - *On démontre que l'expression*

$$\prod_{\nu=0}^{h} (a + \nu d) + (-1)^k \prod_{\nu=0}^{k} (b + \nu d)$$

est divisible par $a + b + kd$, *ce qui englobe un résultat de* BARSOTTI, *comme un cas particulier.*

L. BARSOTTI [1] a démontré la relation suivante:

$$(2n)!! \equiv (-1)^n (2n - 1)!! \pmod{2n + 1}. \tag{1}$$

On peut généraliser ce résultat de la manière suivante.

Considérons les deux progressions suivantes:

$$a,\ a + d,\ a + 2d, \dots,\ a + kd;$$
$$b,\ b + d,\ b + 2d, \dots,\ b + kd,$$

où a, b, d sont des nombres quelconques.

[1] Nous avons rencontré ce résultat dans le rapport de LEHMER sur la Note de BARSOTTI intitulée *Some theorems on numerical divisibility*, « Mathematical Reviews », t. 16, 1955, p. 1088.

Formons ensuite l'expression

$$E \equiv \prod_{\nu=0}^{k} (a + \nu d) + \lambda \prod_{\nu=0}^{k} (b + \nu d),$$

λ étant un paramètre.

PROPOSITION. - *L'expression* E *est divisible par*

$$a + b + kd, \text{ si } \lambda = (-1)^k.$$

DÉMONSTRATION. - Écrivons $\prod_{\nu=0}^{k} (a + \nu d)$ sous la forme

$$(2) \quad [(a+b+kd)-b][(a+b+kd)-(b+d)] \dots [(a+b+kd)-(b+kd)]$$
$$\equiv (a+b+kd)^{k+1} - \sigma_1(a+b+kd)^k + \sigma_2(a+b+kd)^{k-1} - \dots$$
$$+ (-1)^k \sigma_k (a+b+kd) + (-1)^{k+1} \prod_{\nu=0}^{k} (b + \nu d),$$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots$ étant des fonctions symétriques élémentaires en b, $b+d$, $\dots$, $b+kd$.

A partir de la dernière identité on voit que E est divisible par $a+b+kd$ si

$$\lambda = -(-1)^{k+1}, \text{ ou bien } \lambda = (-1)^k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le cas où $a=2$, $b=1$, $d=2$, $k=n-1$ l'expression E devient

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} (2 + 2\nu) + (-1)^{n-1} \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 + 2\nu)$$
$$\equiv (2n)!! - (-1)^n (2n-1)!!$$

La dernière expression est divisible par

$$a + b + kd \equiv 2n + 1,$$

ce qui est bien en accord avec le résultat cité de BARSOTTI.

L'identité (2) fait voir que si les paramètres b, d, k satisfont à $\sigma_k = 0$ et si $\lambda = (-1)^k$, l'expression E est divisible par $(a+b+kd)^2$.

Nous avons rédigé cette Note ne connaissant pas comment BARSOTTI a démontré la relation (1) qui présente un cas très particulier de notre résultat.