Bruno Faleschini

Sulle definizioni e proprietà delle funzioni a variazione limitata di due variabili. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 260–275.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_260_0>

Sulle definizioni e proprietà delle funzioni a variazione limitata di due variabili. (Nota II) (*)

Nota di BRUNO FALESCHINI (a Milano)

Sunto. - *Le definizioni di funzione a variazione limitata di due variabili vengono classificate in base alle proprietà comuni nelle seguenti sezioni:*
SEZ. I. - *Funzioni a variazioni lineari sommabili o soggette ad altre condizioni particolari.* (*Classi:* T, $\overline{\mathrm{T}}$, T*, T_θ, T_φ, ...).
SEZ. II. - *Funzioni a oscillazione totale limitata.* (*Classi:* P, P^β).
SEZ. III. - *Combinazioni lineari di funzioni monotone.* (*Classi:* A, $\bar{\mathrm{A}}$, A*, J_{xy}, J_s, ...).
SEZ. IV. - *Funzioni a variazione rettangolare limitata.* (*Classi:* H, V, F*, F, ...).

SEZ. III. - *Combinazioni lineari di funzioni monotone.*

1. Funzioni monotone secondo Lebesgue.

Una funzione reale $f(x, y)$ è monotona secondo M. H. LEBESGUE [45] in un dominio D del piano, quando essa assume gli stessi estremi superiore ed inferiore in ogni dominio D' contenuto in D e sulla frontiera FD' ([30]).

Per ogni dominio $D' \subset D$ e per ogni punto $(x_0, y_0) \in D'$ risulta quindi:

$$\underset{(x, y) \in FD'}{\text{est. inf.}} f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \leq \underset{(x, y) \in FD'}{\text{est. sup.}} f(x, y).$$

1) Se la funzione $f(x, y)$ è monotona in un dominio D più volte connesso, allora i punti in cui $f > t$ $(f \geq t)$, appartengono, qualsiasi sia il valore del numero reale t, ad insiemi semplicemente connessi aventi almeno un punto comune con la frontiera FD ([31]).

2) Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione continua rispetto ad (x, y) in un dominio D sia monotona, è che

(*) Continuazione Nota I stampata in questo Bollettino, pp. 80-92.

([30]) Dicesi dominio un insieme perfetto che coincide con il derivato dei suoi punti interni. Un dominio D è internamente connesso, quando è connesso l'insieme aperto $D - FD$. Cfr. M. PICONE, *Lezioni di Analisi Matematica*, Roma, 1949.

([31]) Se la funzione è continua, la condizione è anche sufficiente. Questa proprietà e le successive, vengono dimostrate da LEBESGUE nella nota citata. Sui problemi riguardanti l'area di funzioni continue e monotone (sec. LEBESGUE) cfr. E. J. MC SHANE [46], T. RADÒ [26], L. CESARI, *Surface area*, « Ann. of. Math. Studies », 35, (1956).

per ogni dominio $D' \subset D$ risulti:

$$\underset{(x,y)\in FD'}{\text{osc.}} f(x, y) \geq \underset{(x,y)\in (D'-FD')}{\text{osc.}} f(x, y).$$

3) Data una funzione $f(x, y)$ continua sulla frontiera di un dominio internamente connesso, esiste una funzione $g(x, y)$ continua e monotona in tutto il dominio D, che è uguale ad $f(x, y)$ sulla frontiera FD.

2. Funzioni linearmente monotone.

Una funzione $f(x, y)$ è monotona rispetto ad una direzione assegnata quando per ogni punto (x, y) compreso tra i punti (x', y'), (x'', y'') ed allineato con essi in quella direzione, risulta: $f(x, y) = f(x', y') + \theta[f(x'', y'') - f(x', y')]$, dove $0 \leq \theta \leq 1$ (32).

Se in particolare per ogni coppia di punti (x', y'), (x'', y''), presi secondo una direzione ed un verso assegnato, risulta:

$$f(x', y') \leq f(x'', y'')$$

allora la funzione non decresce in quel verso, ovvero non cresce nel verso opposto.

1) Ogni funzione linearmente monotona è monotona nel senso di LEBESGUE.

2) Se una funzione $f(x, y)$, definita in un dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$ è continua rispetto ad una variabile ed è continua e monotona rispetto all'altra, allora la funzione $f(x, y)$ è continua rispetto ad (x, y) in R (33).

Tra le funzioni linearmente monotone, G. B. PRICE **[48, 49]** considera quelle funzioni che sono monotone su ogni segmento rettilineo di un dominio chiuso e convesso.

3) I punti di discontinuità di una funzione monotona secondo PRICE in un dominio chiuso e convesso C, se interni a C, non sono punti isolati, ma appartengono al più ad una infinità numerabile di segmenti aperti non intersecantisi in punti interni a C ed i cui estremi appartengono alla frontiera di C; quelli sulla frontiera di C sono al più una infinità numerabile e appartengono o all'estremo di un segmento di discontinuità o sono intersezioni di due segmenti su ciascuno dei quali la funzione è costante con valori diversi.

Debbono inoltre essere considerate come funzioni linearmente

(32) Vengono considerate esclusivamente funzioni che sono linearmente limitate in ogni intervallo limitato in cui sono monotone.

(33) L. MOTCHANE [47].

monotone, anche le funzioni del tipo $f(x)$, $g(y)$, costanti rispetto ad una variabile e arbitrariamente definite rispetto all'altra.

3. Funzioni superficialmente monotone.

Le funzioni di due variabili che non decrescono in direzione e nel verso di due assi orientati, comunque assegnati, si dicono superficialmente monotone ([34]).

1) Una funzione superficialmente monotona, è linearmente monotona in ogni direzione compresa nell'angolo convesso determinato dai due assi orientati.

Infatti, se la funzione $f(x, y)$ non decresce rispetto agli assi orientati r, s, allora per ogni coppia di punti (x', y'), (x'', y'') le cui proiezioni su di un asse secondo l'altro asse, sono due a due ordinate nello stesso verso degli assi, risulta:

$$f(x', y') \leq f(x'', y'')$$

e a maggior ragione, questa relazione sussiste quando le coppie di punti (x', y'), (x'', y'') sono allineate.

2) Ogni funzione superficialmente monotona in un dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$ è a variazione limitata in R secondo HAHN ([35]).

Tra le funzioni superficialmente monotone, C. ARZELÀ [**41**] considera le funzioni non decrescenti (o non crescenti) rispetto agli assi x, y; risulta allora $f(x', y') \leq f(x'', y'')$ $[f(x', y') \geq f(x'', y'')]$, per ogni coppia di punti (x', y'), (x'', y''), tali che $x' \leq x''$, $y' \leq y''$.

E. W. HOBSON [**43**] considera inoltre le funzioni non decrescenti (o non crescenti) rispetto all'asse x e non crescenti (o non decrescenti) rispetto all'asse y; risulta allora $f(x', y') \leq f(x'', y'')$ $[f(x'', y') \geq f(x'', y'')]$, per ogni coppia di punti (x', y'), (x'', y'') tali che $x' \leq x''$, $y' \geq y''$ ([36]).

([34]) Si può anche dire che tali funzioni non crescono secondo gli assi aventi uguale direzione, ma verso opposti.

([35]) H. HAHN [**39**], (A. C. 2), p. 719.

([36]) Nella terminologia di E. W. HOBSON [**43**], vol. 2, pp. 702 (2ª ed.) vengono dette quasi monotonoidi queste funzioni e monotonoidi quelle di ARZELÀ. Vengono chiamate inoltre quasi monotone le funzioni dell'uno o dell'altro tipo che verificano l'ulteriore condizione: l'incremento rettangolare $\triangle_{x'\,y'}^{x''y''} f(x, y) = [f(x'', y'') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x', y')]$ è sempre positivo o è sempre negativo per ogni coppia di punti tali che $x' \leq x''$, $y' \leq y''$.

Si denotano qui con L, $L(s)$, $L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, $L(\overrightarrow{x}, \overleftarrow{y})$ rispettivamente le classi di funzioni monotone secondo LEBESGUE, PRICE, ARZELÀ, HOBSON; si denota inoltre con $L(x, y)$, la classe di funzioni che sono monotone secondo ARZELÀ o HOBSON.

Le funzioni $f(x, y)$ siano definite nel dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$ del piano; sussistono allora le seguenti proprietà:

3) Se le funzioni f_1, $f_2 \in L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ allora la funzione $(f_1 + f_2) \in L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, se inoltre in ogni punto di $R : f_1, f_2 > 0$, allora anche $(f_1 \cdot f_2) \in L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

4) Se la funzione $f \in L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ allora la funzione $(-f) \in L(\overleftarrow{x}, \overleftarrow{y})$, se inoltre in ogni punto di $R : f > 0$, allora anche $(1/f) \in L(\overleftarrow{x}, \overleftarrow{y})$.

5) Posto: $\bar{x} = b + a - x$, $\bar{y} = c + d - y$, se la funzione $f(x, y) \in L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, allora $f(\bar{x}, y) \in L(\overleftarrow{x}, \overrightarrow{y})$, $f(x, \bar{y}) \in L(\overrightarrow{x}, \overleftarrow{y})$, $f(\bar{x}, \bar{y}) \in L(\overleftarrow{x}, \overleftarrow{y})$.

6) L'oscillazione al variare di (x, y) in R, è $|f(b, d) - f(a, c)|$ se $f \in L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \bigcup L(\overleftarrow{x}, \overleftarrow{y})$, $|f(b, c) - f(a, d)|$ se $f \in L(\overrightarrow{x}, \overleftarrow{y}) \bigcup L(\overleftarrow{x}, \overrightarrow{y})$ ([37]).

7) Le variazioni lineari $V_x(y)$, $V_y(x)$ di $f(x, y) \in L(x, y)$ in R, sono funzioni integrabili RIEMANN ([38]).

8) I punti di discontinuità delle funzioni $f(x, y) \in L(x, y)$ appartengono ad una infinità numerabile di porzioni di curve regolari il cui insieme ha misura superficiale nulla; tali funzioni sono quindi misurabili in R. La natura delle discontinuità è stata studiata da W. H. e G. C. YOUNG **[50]**.

9) Le funzioni $f(x, y) \in L(x, y)$ sono totalmente differenziabili nel senso di STOLZ, quasi ovunque in R ([39]).

4. Combinazioni lineari di funzioni monotone.

Definizione 1. In analogia al teorema di JORDAN, si definisce a variazione limitata (in senso generale), ogni combinazione lineare di funzioni monotone secondo LEBESGUE.

Sia $f(z) = f(x, y)$ una funzione reale e monotona (L) in un dominio D; una funzione $g(z) \in L$ si dice non decrescente con $f(z)$ in D, quando risulta: $\triangle g \cdot \triangle f \geq 0$ per ogni incremento $\triangle f = [f(z'') - f(z')] \neq 0$, $z', z'' \in D$ e $\triangle g = 0$ se $\triangle f = 0$.

Per le funzioni di una sola variabile, questo criterio corrisponde alla definizione di funzione non decrescente con x quando $f \equiv x$ oppure quando f è una qualsiasi funzione crescente con x. Per le funzioni di due variabili invece, secondo questo criterio, vi sono diverse classi distinte di funzioni monotone incluse in quella più generale di LEBESGUE.

([37]) In conseguenza delle condizioni riportate nella nota ([32]), vengono considerate esclusivamente funzioni superficialmente monotone che sono limitate in R.

([38]) Cfr. C. MIRANDA **[21]**.

([39]) J. C. BURKILL e U. S. HASLAM-JONES **[3]**.

Definizione 2. Si definisce a variazione limitata secondo $f(z)$ $[f \in L]$ in un dominio D, ogni combinazione lineare di due funzioni monotone secondo LEBESGUE e non decrescenti con $f(z)$ in D.

Per le funzioni di una sola variabile, le due definizioni si equivalgono se nella seconda si pone $f \equiv x$, mentre per le funzioni di due variabili alla seconda definizione corrispondono diverse classi distinte di funzioni a variazione limitata, incluse in quella più generale definita dalla 1ª.

5. **Classi** A, $\bar{A}$, A^*, $J_{x,y}$, J_s, K.

Presentano particolare interesse le seguenti classi di funzioni a variazione limitata in un dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$.

Una funzione $f(z) = f(x, y)$ è a variazione limitala secondo C. ARZELÀ [41] in R, quando l'insieme numerico descritto dalle somme:

$$\sum_{i=1}^{n} | f(z_i) - f(z_{i-1}) | .$$

è limitato al variare del numero naturale n e dei punti $z_i = (x_i, y_i)$ tali che: $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$; $c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n = d$ (40).

La funzione $f(z)$ è a variazione limitata secondo E. W. HOBSON [43] e R. CONTI [38] quando la precedente condizione è verificata dai punti $z_i = (x_i, y_i)$ tali che: $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$, $d = y_0 \geq y_1 \geq \dots \geq y_n = c$ (41).

Denotando con $V(z)$, $P(z)$, $N(z)$ la variazione totale, positiva e negativa della funzione $f(z)$ nel dominio rettangolare di estremi $z_0 = (a, c)$, $z = (x, y)$ per le $f(z) \in A$, di estremi $z_0 = (a, d)$, $z = (x, y)$ per le $f(z) \in \bar{A}$, risulta:

$$V(z) = P(z) + N(z),$$
$$f(z) = f(z_0) + P(z) - N(z),$$

dove $V(z)$, $P(z)$, $N(z)$ sono funzioni non decrescenti rispettivamente secondo ARZELÀ o HOBSON.

Le proprietà delle due classi A, $\bar{A}$, che non sono relative allo orientamento degli assi, sussistono anche per le funzioni che si ottengono combinando linearmente quattro funzioni superficial-

(40) Tale classe di funzioni è stata indicata con A da W. W. KÜSTERMANN [44]. E. W. HOBSON [43] chiama ad oscillazione limitata, la classe equivalente che si ottiene quando le stesse condizioni sono verificate dalle somme delle oscillazioni di $f(z)$ nei domini rettangolari di estremi $z_i = (x_i, y_i)$, $z_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1})$.

(41) Tale classe è stata indicata con $\bar{A}$ da R. CONTI [38].

mente monotone secondo ARZELÀ od HOBSON. Denotando con A^* quest'ultima classe, sussiste la relazione $A^* \supset A \cup \bar{A}$.

Ad esempio, la funzione $f(x, y) = 1$ sulle diagonali del quadrato $[0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1]$, nulla altrove, è una funzione $f \in A^* - (A \cup \bar{A})$.

R. CONTI [38] denota con $J_{x, y}$ la classe di funzioni che sono a variazione limitata secondo JORDAN nel dominio rettangolare R, per ciascuna variabile separatamente e con J_s la classe di funzioni a variazione limitata su ogni segmento rettilineo di R; inoltre considera la relazione $J_{x, y} \supset J_s \supset A \cap \bar{A}$.

Si ha pure $J_{x, y} \supset A^*$, e osservando che ogni funzione $f \in A^*$ è limitata in R, mentre una funzione appartenente a $J_{x, y}$ deve solamente essere linearmente limitata rispetto ad x e rispetto ad y, si prova che esistono funzioni $f \in J_{x, y} - A^*$.

Indicando con K la classe di funzioni $f(x, y) = h(x) + k(y)$, si stabilisce la relazione: $A \cap \bar{A} \supset K \cap J_{x, y}$.

Infatti, se la funzione $f = h + k$ ha variazioni lineari finite, le funzioni $h(x)$ e $k(y)$ sono costanti rispetto ad una variabile e a variazione limitata rispetto all'altra, quindi la loro somma appartiene ad $A \cap \bar{A}$.

6. Notizie bibliografiche ([42]).

C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON, v. note (2), (3).

C. ARZELÀ

[41] *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata,* « Rend. Accad. Bologna », (2) 9, (1904-5) pp. 100-107; (2) 11, (1906-7), pp. 58-62.

J. C. BURKILL e U. S. HASLAM-JONES, v. [3].

R. CONTI, v. [38].

[42] *Due criteri di convergenza uniforme per le successioni di funzioni monotone di due variabili in un rettangolo e nel piano,* « Rend. Accad. Lincei », (8) 6, (1949), pp. 202-207.

H. HAHN, v. [39].

E. W. HOBSON

[43] *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series,* Cambridge 1907, II ed. 1° vol. 1921. 2° vol. 1926, III ed- 1° vol. 1927.

W. W. KÜSTERMANN

[44] *Funktionen von beschränkten Schwankung in zwei reellen veränderlichen,* « Math. Ann. » 77, (1916), pp. 77, (1914). pp. 474-481.

([42]) Cfr. nota ([25]).

H. LEBESGUE
[45] *Sur le problème de Dirichlet,* « Circ. Mat. Palermo », 24, (1907) pp. 371-402.

E. J. MC SHANE
[46] *Parametrizations of Saddle Surfaces, with application to the problem of. Plateau,* « Trans. Amer. Mat. Soc. », 35, (1933), pp. 716-733.

C. MIRANDA, v. [21].

L. MOTCHANE
[47] *Sur la continuité des fonctions à variation bornée continue par rapport a chacune des variables,* « C. R. Acad. Sci. Paris », 211, (1940), pp. 61-62.

G. B. PRICE
[48] *A class of monotone functions,* « Amer. J. Math. », 61, (1939), pp. 941.946.
[49] *Definitions and properties of monotone functions,* « Bull. Amer. Math. Soc. », 46, (1940), pp. 77-80.

T. RADÒ, v. [26].

L. TONELLI, v. [28].

G. C. YOUNG e W. H. YOUNG
[50] *On the discontinuities of monotone functions of several variables,* « Proc. London Math. Soc. », (2) 22, (1924), pp. 124-142.

SEZ. IV. - *Funzioni a variazione rettangolare limitata.*

1. Incremento rettangolare di una funzione.

La funzione $f(x, y)$ sia definita nel dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$ e siano (x', y'), (x'', y'') due punti di R tali che $x' \leq x''$, $y' \leq y''$; si chiama incremento doppio o rettangolare o misto, e si indica con

$$\triangle_{x'y'}^{x''y''} f(x, y) \quad \text{oppure con} \quad \triangle_{xy} f(x', y')$$

la quantità

$$f(x'', y'') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x', y').$$

Per l'incremento doppio sussistono proprietà analoghe a quelle degli incrementi lineari

$$\triangle_x f(x', y) = f(x'', y) - f(x', y), \quad \triangle_y f(x, y') = f(x, y'') - f(x, y') :$$

1) $\triangle_{xy}[c \cdot f(x, y)] = c \cdot \triangle_{xy} f(x, y)$ per ogni costante c;

2) $\triangle_{xy}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \triangle_{xy} f_1(x, y) + \triangle_{xy} f_2(x, y)$;

3) Posto $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$,

$c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n = d$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \triangle_{xy} f(x_i,\ y_j) = \triangle_{ac}^{bd} f(x,\ y);$$

4) $\triangle_{xy}[h(x) + k(y)] = 0, \quad \triangle_{xy}[h(x) \cdot k(y)] = \triangle_x h(x) \cdot \triangle_y (ky)$.

Si ha inoltre

$$\triangle_{xy} f(x,\ y) = \triangle_x[\triangle_y f(x,\ y)] = \triangle_y[\triangle_x f(x,\ y)],$$

e le proprietà 1), 2), che sono caratteristiche degli operatori lineari, sono pure soddisfatte da ogni combinazione lineare a coefficienti interi:

$$u\triangle_x f(x',\ y') + v\triangle_y f(x',\ y') + w\triangle_{xy} f(x',\ y') =$$
$$= wf(x'',\ y'') - (w-u)f(x'',\ y') - (w-v)f(x',\ y'') + (w-u-v)f(x',\ y')$$ [43].

Ha particolare interesse la classe di funzioni, definite in un dominio rettangolare R, del tipo:

$$f(x,\ y) = h(x) + k(y) + f^*(x,\ y), \quad \text{dove} \quad f^*(x,\ y) \in J_{x,\,y}.$$

Posto $F(x,\ y) = \triangle_{ac}^{xy} f(x,\ y)$ condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x,\ y)$ appartenga a questa classe, è che $F(x,\ y) \in J_{x,\,y}$.

Infatti la condizione è sufficiente perchè

$$f(x,\ y) = f(x,\ c) + f(a,\ y) - f(a,\ c) + F(x,\ y);$$

la necessità si prova osservando che $\triangle_{ac}^{xy} f(x,\ y) = \triangle_{ac}^{xy} f^*(x,\ y)$ e quindi per ogni suddivisione $x_0 = a \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$, si ha

$$|\triangle_{a\ c}^{x_{i+1} y} f^*(x,\ y) - \triangle_{a\ c}^{x_i y} f^*(x,\ y)| = |\triangle_{x_i}^{x_{i+1}} f^*(x,\ y) - \triangle_{x_i}^{x_{i+1}} f^*(x,\ c)| \leq$$
$$\leq |\triangle_{x_i}^{x_{i+1}} f^*(x,\ y)| + |\triangle_{x_i}^{x_{i+1}} f^*(x,\ c)|.$$

Nei numeri successivi vengono definite a variazione limitata, delle funzioni che si possono ancora esprimere come combinazioni lineari di funzioni monotone (nel senso di LEBESGUE); ma a tali condizioni vanno aggiunte a seconda delle varie definizioni, altre particolari condizioni poste sugli incrementi rettangolari.

(43) In particolare nelle definizioni delle classi A, $\bar{A}$ vengono considerati gli incrementi

$f(x'',\ y'') - f(x',\ y') = \triangle_x f + \triangle_y f + \triangle_{xy} f,\ f(x'',\ y') - f(x',\ y'') = \triangle_x f - \triangle_y f.$

Una estensione del concetto di funzione di una variabile a variazione limitata secondo C. JORDAN o secondo N. WIENER viene considerata da L. C. YOUNG ([44]), che definisce a variazione — Φ — limitata in un intervallo $I[a \leq x \leq b]$, ogni funzione $f(x)$ in corrispondenza della quale esiste una funzione $F(x)$ non decrescente in I, tale che per ogni coppia di punti x', $x'' \in I$ risulta:

$$| \triangle_{x'}^{x''} f(x) | \leq \varphi (| \triangle_{x'}^{x''} F(x) |),$$

dove $\Phi(z)$ è una funzione reale continua e crescente nell'intervallo $(0 \leq z \leq \infty)$ e tale che $\Phi(0) = 0$, $\lim_{z \to \infty} \Phi(z) = \infty$, e $\varphi(z)$ è la funzione inversa di $\Phi(z)$.

Per le funzioni di una variabile, la nuova definizione viene impiegata nello studio dell'integrale di STIELTJES e negli sviluppi in serie di FOURIER; viene meno il teorema di JORDAN sulla decomposizione in funzioni monotone, mentre anche per le funzioni a variazione — Φ — limitata si dimostra che esse hanno al più una infinità numerabile di discontinuità ordinarie.

Per le funzioni di due variabili, il concetto di funzione a variazione limitata può essere esteso in diversi modi secondo varie definizioni. Le funzioni a variazione limitata in senso esteso, sono caratterizzate dal fatto che gli incrementi sono minori in valore assoluto, (secondo una certa relazione), degli incrementi corrispondenti di una funzione monotona nel senso di LEBESGUE.

In particolare si possono definire funzioni che sono a variazione — Φ — limitata di classe A, $\bar{A}$, $J_{r,y}$, ecc. ([45]).

2. Funzioni a variazione rettangolare limitata.

Una funzione $f(x, y)$ è a variazione limitata secondo G. VITALI [82] in un dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$, quando è limitato l'insieme numerico descritto dalle somme:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} | \triangle_{xy} f(x_i, y_j) |,$$

al variare di m, n e dei punti (x_i, y_j) tali che:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b,\ c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n = d \ ([46]).$$

([44]) L. C. YOUNG [84]; N. WIENER, cfr. nota ([1]).

([45]) B. PINI [80] definisce a variazione limitata secondo ARZELÀ di ordine p, $p > 1[\Phi(z) = z^p]$, la classe di funzioni che si ottiene sostituendo nella definizione di ARZELÀ (III.5) la somma $\sum_{i=1}^{n} | f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) |^p$.

([46]) L. TONELLI in una nota del 1923 [28] denota questa classe con la lettera V, iniziale di VITALI, che l'ha definita nel 1908. Le medesime

Se inoltre la funzione $f(x, y)$ è a variazione limitata per almeno un valore x_0 di x e per almeno un valore y_0 di y. allora la funzione è a variazione lineare limitata per ogni valore di x e di y, e le funzioni $V_x(y)$, $V_y(x)$ sono a variazione limitata nei rispettivi intervalli di definizione ([47]).

R. L. JEFFERY [60] definisce una classe di funzioni $f(x, y)$ che sono a variazione limitata in R quando:

1) $$f(x, y) = \lim_{n \to \infty} \int_{(a,\, x;\, c,\, y)} s_n(x, y) dx dy$$

dove $s_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$, è una successione di funzioni sommabili, che ha per limite una funzione $s(x, y)$,

2) risulta limitato per ogni numero intero n ed in ogni dominio rettangolare $R' \subset R$, l'integrale

$$\int_{R'} s_n(x, y) dx dy.$$

M. S. MACPHAIL [64] dimostra che la classe di JEFFERY equivale alla classe di funzioni $f(x, y) \in H$ con $f(a, y) = f(x, c) = 0$; inoltre, che si ottiene la classe V sostituendo al primo membro della 1) la funzione $F(x, y) = \triangle_{ac}^{xy} f(x, y)$ in luogo di $f(x. y)$, e che tale condizione, eliminando la 2), definisce la classe di funzioni di BAIRE di ordine 0,1.

L. C. YOUNG [84] definisce una classe di funzioni $f(x, y)$, che sono a variazione limitata in R quando si possono trovare due funzioni $F(x)$, $G(y)$ non decrescenti negli intervalli (a, b), (c, d), tali che per ogni coppia di punti (x', y'), $(x'', y'') \in R$ risulti

$$|\triangle_{x'\,y'}^{x''y''} f(x. y)| \leq \varphi(|\triangle_{x'}^{x''} F(x)|) \cdot \psi(|\triangle_{y'}^{y''} G(y)|),$$

avendo indicato al solito con $\varphi(z)$, $\psi(z)$ due funzioni continue e crescenti da 0 ad ∞ nell'intervallo $0 \leq z \leq \infty$.

condizioni sono riprese da H. LEBESGUE nel 1910 [62] e da C. de LA VALLÉE POUSSIN nel 1915 [53] per le funzioni continue e nel 1916 per le funzioni discontinue [54].

([47]) La dimostrazione del primo teorema è di W. H. YOUNG [85]; per il secondo cfr. (A. C. 1), pp. 827. La classe viene indicata da W. W. KÜSTERMANN [44] con l'iniziale H di G. H. HARDY che l'ha definita con condizioni meno restrittive nel 1905 [59]; le stesse condizioni sono anticipate da J. H. KRAUSE nel 1903 [61] e riprese da A. VERGERIO nel 1911 [81].

La definizione rappresenta una estensione della classe particolare che si ottiene ponendo $\varphi(z) = \psi(z) \equiv 1$; a quest'ultima classe, che è inclusa in H, appartengono tutte le funzioni del tipo $f(x, y) = h(x) \cdot k(y)$ nelle quali $h(x)$ e $k(y)$ sono a variazione limitata ([48]).

B. Pini [80] estende le classi H, V, considerando nelle rispettive definizioni in luogo dei valori assoluti degli incrementi. i valori:

$$|\triangle_{xy} f(x, y)|^p, \qquad |\triangle_x f(x, y)|^p, \qquad |\triangle_y f(x, y)|^p,$$

con l'esponente $p > 1$. Tali classi vengono denotate con $H - p$, $V - p$.

Per le funzioni a variazione rettangolare limitata sussistono le seguenti proprietà:

1) Posto

$$F(x, y) = \triangle_{x_0 y_0}^{x\,y} f(x, y), \qquad (x_0, y_0), (x, y) \in R,$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x, y) \in V$, è che $F(x, y) \in H$, cioè che $F(x, y)$ sia la differenza di due funzioni quasi monotone ([49]).

Denotando con $V(x, y)$, $P(x, y)$, $N(x, y)$ le variazioni rettangolari totale, positiva e negativa, nel dominio rettangolare di estremi (x_0, y_0), (x, y) dove $x_0 = a$ ed $y_0 = c$ oppure $y_0 = d$, si ha

$$V(x, y) = P(x, y) + N(x, y),$$
$$\triangle_{x_0 y_0}^{x\,y} f(x, y) = P(x, y) - N(x, y).$$

2) Si hanno le relazioni:

$V \supset H$ ed esiste almeno una funzione $f \in V - H$ ([50]);

$V \cap J_{x,y} = H$, $(A \cap \bar{A}) \supset H$ ed esiste almeno una funzione $f \in (A \cap \bar{A}) - H$ ([51]).

3) Se la funzione $f(x, y) \in H - p$, le discontinuità in x e quelle in y appartengono al più ad una infinità numerabile di

([48]) Cfr. (A. C. 2), pp. 728. Detta K^* questa classe, sussiste la relazione $VK^* \supset HK^*$ ed esistono funzioni $f \in H - K^*$ ed $f \in K^* - V$.

([49]) Cfr. nota ([36]). Si dicono non decrescenti per incrementi rettangolari, le funzioni per cui è sempre $\triangle_{xy} f(x, y) \geq 0$; in tale caso la funzione $\triangle_{x_0 y_0}^{x\,y} f(x, y)$ è monotona secondo Hobson o Arzelà, in ciascuno dei quattro quadrati di R aventi un vertice comune nel punto (x_0, y_0).

([50]) Cfr. (A. C. 1).

([51]) R. Conti [38]. Nella nota citata viene dato un esempio di funzione $f \in (A \cap \bar{A}) - F^*$.

segmenti paralleli agli assi ([52]). Se $f(x, y) \in V$, le discontinuità in (x, y), che non sono discontinuità in x o in y, sono numerabili ([53]).

4) Se la funzione $f(x, y) \in V$, la derivata rettangolare è quasi ovunque finita ed è sommabile in R ([54]); se $f(x, y) \in H$, le derivate parziali miste di 2° ordine sono quasi ovunque finite e sono sommabili in R ([55]). Poichè $H \subset A$, le funzioni $f(x, y) \in H$ sono quasi ovunque totalmente differenziabili in R, mentre la proprietà non sussiste per le $f(x, y) \in H - p$ ([52]). Esistono funzioni $f(x, y) \in V$ che non sono derivabili in alcun punto di R ([53]).

Sono a variazione limitata secondo VITALI, le funzioni assolutamente continue (nel senso di VITALI) ([56]) e le funzioni lipschitziane (nel senso di FRÉCHET) ([57]).

3. Funzioni a variazione limitata secondo Fréchet.

Una funzione $f(x, y)$ è a variazione limitata secondo M. FRÉCHET [57, 58] in dominio rettangolare $R[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d]$, quando è limitato l'insieme numerico descritto dalle somme:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_i \bar{\epsilon}_j \triangle_{xy} f(x_i, y_j),$$

al variare di m, n e dei punti (x_i, y_j) tali che: $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$, $c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n = d$ e per tutte le possibili scelte dei coefficienti ϵ_i, $\bar{\epsilon}_j = \pm 1$ ([58]).

Se inoltre la funzione $f(x, y)$ è a variazione lineare limitata per almeno un valore x_0 di x e per almeno un valore y_0 di y, allora la funzione è a variazione lineare limitata per ogni valore di x e di y, e le funzioni $V_x(y)$, $V_y(x)$ sono integrabili nel senso di RIEMANN nei rispettivi intervalli di definizione ([59]).

([52]) B. PINI [80].

([53]) Cfr. (A. C. 2).

([54]) G. VITALI [82].

([55]) W. H. YOUNG [86].

([56]) G. VITALI, *Sulle funzioni integrali*, « Atti Accad. Sci. Torino », 40, (1904-05), pp. 753-766.

([57]) M. FRÉCHET, *Extension au cas des intégrales multiples d'une definition de l'intégrale due à Stieltjes*, « Nouvelles Ann. Math. » (40) 10, (1910), pp. 241-250 cfr. pure (A. C. 2), p. 726.

([58]) M. MORSE e W. TRANSUE [68] dimostrano che una funzione è a variazione limitata secondo FRÉCHET anche quando i coefficienti ϵ_i, $\bar{\epsilon}_j$ vengono scelti tra numeri che in valore assoluto non sono superiori ad uno ma possono essere eventualmente nulli.

([59]) Cfr. (A. C. 1), pp. 832. In (A. C. 2) tale classe viene denotata con F^*, mentre con F viene indicata la classe di FRÉCHET.

R. CONTI [52] dimostra che la seguente condizione di S. FAEDO [56] è equivalente a quella di FRÉCHET :

L'insieme numerico descritto dalle somme:

$$\sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{i+j} f(x_i, y_j),$$

risulta limitato al variare di m, n e dei punti (x_i, y_j) tali che: $a = x_1 \leq \ldots \leq x_{2m} = b$, $c = y_1 \leq \ldots \leq y_{2n} = d$.

L. C. YOUNG [84] definisce una classe di funzioni $f(x, y)$ che sono a « bivariazione — Φ, Ψ — limitata » quando risultano limitati gli insiemi numerici descritti dalle somme

$$\sum_{i=0}^{m-1} \Phi \left(\left| \triangle_{x_i}^{x_{i+1}} {}_{y'}^{y''} f(x, y) \right| \right), \qquad \sum_{j=0}^{n-1} \Psi \left(\left| \triangle_{x'}^{x''} {}_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) \right| \right)$$

al variare di m, n e dei punti x_i, y', y'', x', x'', y_j tali che

$$a = x_0 \leq \ldots \leq x_m = b, \qquad c \leq y' \leq y'' \leq d,$$
$$c = y_0 \leq \ldots \leq y_n = d, \qquad a \leq x' \leq x'' \leq b,$$

essendo al solito $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ due funzioni continue e crescenti da 0 a ∞ nell'intervallo $(0 \leq z \leq \infty)$.

In particolare, ponendo $\Phi(z) = \Psi(z) \equiv 1$ si ottiene una classe di funzioni che contiene la classe di FRÉCHET (F).

Sussistono le seguenti proprietà:

1) Posto

$$F(x, y) = \triangle_{x_0 y_0}^{x\, y} f(x, y), \qquad (x_0, y_0), (x, y) \in R,$$

condizione necessariá e sufficiente affinchè la funzione $f(x, y) \in F$, è che $F(x, y) \in F^*$.

2) Si hanno le relazioni:

$$F \supset V \cup F^*, \qquad F^* \supset H, \qquad V \cap F^* = H,$$

ed esistono delle funzioni $f \in V - F^*$, $f \in F^* - V$, $f \in F - (V \cup F^*)$ (60).

3) Le discontinuità di una funzione $f(x, y) \in F^*$, appartengono al più ad una infinità numerabile di segmenti paralleli agli assi e la funzione è sommabile in R (61).

4) Sussiste la relazione con la classe K^* di funzioni

$$f(x, y) = h(x) \cdot k(y), \qquad FK^* = VK^* \ (62).$$

(60) Cfr. (A. C. 1), esempi (B), (E).

(61) M. MORSE e W. TRANSUE [74].

(62) M. MORSE e W. TRANSUE [77].

4. Notizie bibliografiche ([63]).

C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON, v. note (2), (3).

J. A. CLARKSON

[51] *On double Riemann Stieltjes integrales,* « Bull. Amer. Math. Soc. », 39, (1933), pp. 929-936.

R. CONTI, v. [38].

[52] *Funzioni a variazione limitata in più variabili, nel senso di Fréchet e nel senso di Faedo,* « Rend. Accad. Lincei », (8) 10, (1951), pp. 462-467.

C. DE LA VALLÉE POUSSIN

[53] *Sur l' intégrale de Lebesgue,* « Trans. Amer. Math. Soc. », 16, (1915), pp. 435-501.

[54] *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire,* Parigi 1916 (nuova ristampa II ed. 1950).

[55] *Les fonctions à variation bornée et les questions qui s' y rattachent,* « Bull. des Sci. Math. », (2) 44, 1928, pp. 267-296.

S. FAEDO, v. [8].

[56] *Ordine di grandezze dei coefficienti di Eulero-Fourier delle funzioni di due variabili,* « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa », (2) 6, (1937), pp. 225-246.

M. FRÉCHET

[57] *Sur les fonctionnelles continues,* « C. R. Acad. Sci. Paris », 150, (1910), pp. 1231-1233.

[58] *Sur les fonctionnelles bilinéaires,* « Trans. Amer. Math. Soc. », 16, (1915), pp. 216-234.

J. J. GERGEN, v. [9].

H. HAHN, v. [39].

G. H. HARDY

[59] *On double Fourier series, and especially those wich represent the double zeta function with real and incommensurable parameters,* « Quart. J. London », 37, (1905), pp. 53-79.

E. W. HOBSON, v. [43].

R. L. JEFFERY

[60] *Functions of bounded variation and non absolutely convergent integrals in two or more dimensions,* « Duke Math. J. », 5, (1939), pp. 753-774.

S. KEMPISTY, v. [15].

J H KRAUSE

[61] *Über Fouriersche Reihen mit zwei Veränderlichen Grössen,* « Leipzig Berichte », 55, (1903), pp. 164-197.

(63) Cfr. nota (25).

W. W Küstermann, v. [44].

H. Lebesgue

[62] *Sur l' intégration des fonctions continues,* « Ann. Sci. École Norm. Sup. ». (3) 27, (1910), pp. 361-450.

J. E. Littlewood

[63] *On bounded bilinear forms iu an infinite number of variables,* « Quart. J. Oxford series », 1, (1930), pp. 164-174.

M. S. Macphail

[64] *Functions of bounded variation in two variables,* « Duke Math. J. », 8, (1941), pp. 215-222.

A. Mambriani, v. [18]

[65] *Una interpretazione geometrica della variazione totale doppia,* « Atti Sem. Mat. Fis. Modena », 1, (1947), pp. 131-134.

J. Martinez Salas

[66] *Funciones de N variables reales de variación acotada,* « Revista Mat. Hisp. Amer. », (4) 6, (1946), pp. 25-42.

[67] *La derivacion de funciones de N variables reales de variación acotada,* « Revista Mat. Hisp. Amer. », (4) 6, (1946), pp. 217-221; 249-253.

M. Morse e W. Transue

[68] *Functionals of bounded Fréchet variation,* « Canadian J. Math. », 1, (1949), pp. 153-165.

[69] *Functionals* F *bilinear over the product* A $\times$ B *of two pseudo-normed vector spaces,* « Ann. of Math. », (2) 50, (1949), pp. 777-815; (2) 51, (1950), pp 576-614.

[70] *Integral representations of bilinear functionals.* « Proc. Nat. Acad Sci. USA », 35, (1949), pp. 136-143.

[71] *The Fréchet variation and the convergence of multiple Fourier series,* « Proc. Nat. Acad. Sci. USA », 35, (1949), pp. 395-399.

[72] *A characterization of the bilinear sums with the classical second variation,* « Ann. Mat. Pura Appl. », (4) 28, (1949), pp. 25-68.

[73] *Fréchet variation and generalization for multiple Fourier series of the Jordan test.,* « Riv. Mat. Univ. Parma », 1, (1950), pp. 1-16.

[74] *The Fréchet variation, sector limits, and left decompositions,* « Canadian J. Math. », 2, (1950), pp. 344-374.

[75] *A calculus for Fréchet variation,* « J. Indian Math. Soc. », 14, (1950), pp. 65-117.

[76] *The Fréchet variation and Pringsheim convergence of dou'le Fourier series,* « Contributions to Fourier Analysis, « Ann. of Math. Studies », 25, (1950), pp. 46-103.

[77] *Norms of distribution functions associated with bilinear functionals.* Contributions to Fourier Analysis, « Ann. of Math. Studies », 25, (1950), pp. 104-144.

G. Ottaviani

[78] *Sulla convergenza uniforme delle successioni di funzioni,* « Giornale degli Attuari, » 1952, pp. 219-234.

M. PICONE

[79] *Lezioni di Analisi Superiore*, Napoli 1946.

B. PINI

[80] *Sulle funzioni a variazione doppia limitata d'ordine maggiore di uno*, « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », 6, (1951-52), pp. 34-44.

L. TONELLI, v. [28], [30], e la nota (4).

A. VERGERIO

[81] *Le serie doppie di Fourier per le funzioni continue a variazione doppia finita*, « Giornale di Mat. », (3) 49, (1911), pp. 181-206.

G. VITALI

[82] *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, « Atti Accad. Sci. Torino », 43, (1907-08), pp. 75-92.

N. WIENER

[83] *Laplacians and continuous linear functionals*, « Acta Litt. Sci. Szeged », 3, (1927), pp. 7-16.

L. C. YOUNG

[84] *General inequalities for Stieltjes integrals and convergence of Fourier Series*, « Math. Annalen », 115, (1938), pp. 581-612.

W. H. YOUNG

[85] *On multiple Fourier series*, « Proc. J. London Math. Soc. », (2) 11, (1912), pp. 133-184.

[86] *Sur la dérivation des fonctions à variation bornée*, « C. R. Acad. Sci. Paris », 164, (1917), pp. 622-625.

[87] *On multiple integration by parts and the second theorem of the mean*, « Proc. London Math. Soc. », (2) 16, (1917), pp. 273-293.