
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni.

- * U. Dini, Opere, Vol. II, Edizioni Cremonese, Roma, 1954 (Enrico Magenes)
- * M. A. Tonnelat, La théorie du champ unifié d'Einstens et quelques-uns de ses développements, Gauthier Villars, Paris, 1955 (Enrico Bompiani)
- * L. Bers, S. Bochner, F. John, eds., Contributions to the theory of partial differential equations, Princeton University Press, 1954 (Carlo Miranda)
- * M. Parodi, Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées, Gauthier Villars, Paris, 1952 (Salvatore Cherubino)
- * W. Ślebodziński, Formes extérieures et leurs applications, Vol. I, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1954 (Guido Vaona)
- * G. Bol, Projektive Differentialgeometrie, I, II, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1950, 1954 (Franco Fava)
- * W. Haack, Elementare Differentialgeometrie, Birkauer, Basel und Stuttgart, 1955 (Enrico Bompiani)
- * W. I. Smirnov, Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III, 2, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955 (Giovanni Sansone)
- * W. I. Smirnov, Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III, 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954 (Guido Zappa)
- * F. Hohenberg, Constructive Geometrie für Techniker, Springer Verlag, Wien, 1956 (Enrico Bompiani)
- * Enzyklöpedie der Elementarmathematik, Band I, Arithmetik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954 (Marco Cugiani)
- * H. S. M. Coexter, The real projective plane, II edizione, Cambridge University Press, Cambridge, 1955 (Guido Zappa)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 11
(1956), n.2, p. 276–298.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_276_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

U. DINI, *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, volume II, 1954, pp. 508; Volume III, 1955, pp. 660, Roma, Edizioni Cremonese.

Nel 1954 e 1955 sono usciti a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche i volumi II e III delle *Opere* di Ulisse Dini; il I volume, dedicato ai lavori di algebra e di geometria differenziale, era uscito nel 1953 ed è stato qui ampiamente illustrato insieme al piano generale delle *Opere* stesse da Alessandro Terracini ((v. questo Bolettino s. III, a IX, 1954 pp. 92-95).

Questi due nuovi volumi, preceduti entrambi da una prefazione di Giovanni Sansone, raccolgono le memorie di carattere « analitico » del Dini: il II volume contiene infatti argomenti sulla teoria delle funzioni di variabile reale, sugli sviluppi in serie di funzioni speciali, sul problema di Dini-Neumann e sulla teoria delle funzioni analitiche; il III volume contiene argomenti sulle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali. Non si tratta di tutta la produzione del Dini « analista », ma solo di quella pubblicata in note e memorie; e quando si voglia considerare l'Opera scientifica del Dini non si può certo non tenere presenti i Suoi magistrali trattati, in particolare i « Fondamenti per la teorica della funzioni di variabile reale » (1878) e le « Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale » (1880). Tuttavia l'insieme delle memorie raccolte ora in questi due volumi delle *Opere* testimonia già sufficientemente la vastità e l'importanza dei contributi del Dini all'Analisi matematica. Può sembrare superfluo ricordare qui l'importanza dell'opera del Dini; Egli è in sostanza il fondatore della Scuola Analista in Italia, la maggior parte degli analisti italiani sono stati Suoi discepoli o discepoli di Suoi discepoli, e a tutti sono noti i Suoi risultati principali, ormai entrati a far parte della trattatistica. Ma la lettura diretta delle Sue memorie, così come sono ordinate in questi due volumi, suscita ugualmente un sentimento di ammirazione e ciò non solo in chi lo ha avuto direttamente per Maestro, ma soprattutto nei più giovani, che di Lui e delle Sue opere hanno avuto conoscenza attraverso le opere e l'insegnamento dei Suoi discepoli.

Il volume II inizia con un gruppo di lavori riguardanti le funzioni di variabile reale. Vi spiccano i lavori del 1877 sull'esistenza di funzioni continue non derivabili, nei quali, tra l'altro, viene introdotto per la prima volta il concetto di numeri derivati di una funzione di una variabile reale; essi sono un mirabile saggio di quella revisione critica della matematica che fu intrapresa sul finire del secolo scorso e di cui il Dini fu indubbiamente in Italia l'iniziatore e il propulsore. Di carattere tutt'affatto diverso, (e l'accostamento è infatti puramente casuale) è la memoria che chiude questo primo gruppo di lavori: si tratta di un lavoro postumo sul calcolo approssimato degli integrali definiti di interesse ormai marginale.

Il secondo gruppo di memorie riguarda gli sviluppi in serie di fun-

zioni sferiche e contiene due memorie del 1873 e una del 1904 sui criteri di convergenza puntuale e sul teorema di unicità dello sviluppo in serie; si tratta di lavori ben noti, poichè rappresentano il primo studio rigoroso del problema in oggetto. Sono qui da ricordare anche le estensioni dei teoremi della media per gli integrali multipli contenuti nella memoria del 1904.

Il successivo gruppo di due memorie riguarda questioni più limitate e ormai meno note, suggerite al Dini dalle Sue «Serie di Fourier...»: si tratta di sviluppi in serie di funzioni particolari e di funzioni Jacobiane.

Si chiude così la prima parte di questo volume che è stata curata e presentata da Giovanni Sansone e da Giuseppe Scorza-Dragoni.

La seconda parte, preceduta da una introduzione di Mauro Picone, concerne la teoria del potenziale e i problemi al contorno per l'equazione $\Delta_2 u = f$. Si tratta di 5 tra i più famosi lavori del Dini. Dopo una memoria sulla funzione potenziale dell'ellisse e dell'ellissoide, ecco i 3 lavori del periodo 1870-76, che (giustamente osserva il Picone nell'introduzione) «hanno concorso insieme a quelli della stessa epoca dello Schwarz a porre i fondamenti della classica teoria dei problemi al contorno per l'equazione $\Delta_2 u = f$ ». Essi contengono tra l'altro i teoremi di esistenza e le celebri formule risolutive del problema, che è ormai d'abitudine chiamare «di Neumann», ma che sarebbe più esatto dire, seguendo il Sansone, «di Dini-Neumann», per il cerchio, per la corona circolare e per la sfera; più in generale viene ivi risolto il problema della ricerca di una funzione armonica in un cerchio, sulla frontiera del quale sia assegnata una combinazione lineare a coefficienti costanti della funzione e della sua derivata normale. Una continuazione di questi tre lavori è in sostanza la memoria che chiude questa seconda parte del volume, anche se essa fu pubblicata assai più tardi nel 1913; in essa viene tra l'altro trattato il problema al contorno (caso particolare di quello che viene d'abitudine detto «misto») per le funzioni armoniche in una corona circolare, quando su una circonferenza viene assegnata una combinazione lineare a coefficienti costanti della funzione e della derivata normale e sull'altra circonferenza una combinazione lineare *diversa* dalla prima.

L'ultima parte del volume, preceduta da un'ampia introduzione di Francesco Cecioni, riguarda i contributi del Dini alla teoria delle funzioni analitiche e alle sue applicazioni. Interessante è la prima memoria del 1881 in cui il Dini rivendica a E. Betti il teorema di Weierstrass sulla fattorizzazione delle trascendenti interne; il Betti aveva infatti dimostrato detto teorema in un caso particolare fin dal 1870 e il Dini, riprendendo il procedimento del Betti, dimostra con esso il Teorema nel caso generale e arriva anche al teorema di Mittag-Leffler, almeno in un caso particolare. Infine due grosse memorie del 1898 riguardano applicazioni della teoria dei residui allo studio di classi di funzioni speciali, definite mediante integrali definiti dipendenti da parametri, e in particolare allo studio di alcune funzioni, che costituiscono una generalizzazione delle funzioni di Legendre, e alle quali vengono estese numerose proprietà integrali.

Il volume III è diviso in due parti, rispettivamente curate da Giovanni Sansone e da Mauro Picone, che vi hanno anche premesso due ampie e utili introduzioni.

La prima parte raccoglie gli studi del Dini sulle equazioni differenziali ordinarie: sono 6 classiche memorie nelle quali il Dini espone i risultati delle Sue meditazioni sulla teoria delle equazioni differenziali di ordine n , successivamente sviluppate nel periodo dal 1899 al 1910. Esse formano, si può ben dire, un tutto organico che da solo basterebbe a testimoniare l'altezza di ingegno del Dini e la profondità della Sua opera. Il Dini risolve dapprima (1899) il problema della rappresentazione analitica degli integrali di un'equazione differenziale lineare di ordine n qualunque, ed è noto che in questo intento Egli ha trasformato l'equazione in una equa-

zione integrale lineare del tipo di Volterra e ha costruito per detta equazione integrale, indipendentemente dagli studi del Volterra, una completa teoria. Stabilite dunque le cosiddette *serie* del Dini per tale rappresentazione, in un'altra memoria del 1899 Egli le applica allo studio del comportamento asintotico all'infinito degli integrali dell'equazione, ottenendo risultati nuovi non solo per l'equazione d'ordine n , ma anche nel caso già precedentemente studiato dell'equazione del secondo ordine. Su queste memorie del 1899 si fonda anche la successiva del 1904, che contiene notevoli criteri per l'esistenza di almeno un integrale regolare nell'intorno di un punto singolare per l'equazione. Strettamente connesse fra di loro sono la quarta e quinta memoria, rispettivamente del 1905 e 1910; si tratta dello studio degli integrali di un'equazione lineare d'ordine n con coefficienti dipendenti da un parametro, e soddisfacenti a particolari condizioni ai limiti (integrali che il Dini chiama «normali») e della loro completezza rispetto alle funzioni continue (vengono così tra l'altro estesi all'equazione d'ordine superiore al secondo i classici risultati sulla completezza del sistema delle autofunzioni di un sistema di Sturm-Liouville). Infine una memoria ancora del 1910 contiene uno studio sistematico, soprattutto dal punto di vista della completezza rispetto alle funzioni continue, delle soluzioni polinomiali delle equazioni del secondo ordine, in particolare dei polinomi di Jacobi, di Tchebycheff-Laguerre e di Tchebycheff-Hermite. Ed è qui per la prima volta accennato a quel bellissimo risultato che è il teorema di equiconvergenza tra le serie trigonometriche di Fourier e le serie dei suddetti polinomi.

Indubbiamente il complesso di ricerche di questa prima parte spicca sopra le altre memorie sia del volume II che del volume III per la vastità e l'importanza dei risultati: non è solo l'esigenza critica di rigore, ma la genialità della intuizione, la novità delle idee e dei metodi, la capacità di visioni generali e sistematiche che vengono rivelate.

Nella seconda parte si trovano i lavori dedicati alle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Sono lavori che non presentano certamente la compiutezza, la novità di metodi, la profondità di quelli relativi alle equazioni ordinarie e all'equazione $\Delta_2 u = f$. Probabilmente il Dini fu distolto da quelle che dovevano essere inizialmente le Sue intenzioni: uno studio generale delle equazioni della Fisica-Matematica. Tuttavia sono notevoli le 4 note e la memoria lincea degli anni 1896-1899, nelle quali si trovano numerose considerazioni rivolte soprattutto a stabilire teoremi di unicità per i problemi al contorno relativi all'equazione del tipo

$$(1) \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2h \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} + 2d \frac{\partial u}{\partial x} + 2e \frac{\partial u}{\partial y} + gu = g_0$$

in due variabili indipendenti e con i coefficienti funzioni eventualmente anche della u e delle sue derivate parziali; partendo dall'applicazione delle formule di Gauss-Green, vengono stabilite con una mirabile abilità algoritmica una serie di relazioni integrali cui deve soddisfare una soluzione sufficientemente regolare della (1). Giustamente nell'introduzione M. Picone mette in rilievo la relazione posta dal Dini a fondamento della memoria del 1899 (dedicata alle equazioni lineari) e propone di chiamarla identità del Dini. Da essa il Dini ricava notevoli teoremi di unicità per soluzioni sufficientemente regolari di vari problemi al contorno, anche di tipo misto, per le equazioni ellittiche e paraboliche. Sarebbe certamente interessante riprendere in considerazione questa identità dal punto di vista dell'analisi funzionale moderna, per questioni sia esistenziali che di calcolo effettivo delle soluzioni (si pensi ad esempio ai procedimenti della Scuola Italiana di M. Picone). Di carattere strettamente critico è la memoria del 1902 sul metodo delle approssimazioni successive, che proprio in quegli anni era

stato dal Picard applicato al problema di Dirichlet per l'equazione lineare ellittica. Infine si trovano due memorie sull'integrazione formale in piccolo delle equazioni a derivate parziali nell'indirizzo di Eulero, Laplace, Moutard, Darboux.

Entrambi i volumi si presentano in ottima veste tipografica.

ENRICO MAGENES

M. A. TONNELAT, *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*, (con prefazione di A. Lichnerowicz), Gauthier-Villars, Paris, 1955, pag. X + 156.

Chiunque abbia avuto occasione di occuparsi delle teorie relativistiche unitarie saluterà con piacere la pubblicazione di questa monografia della Sig.ra Tonnelat.

Com'è noto l'ambizione ultima di una teoria unitaria è di riunire in un sistema unico di equazioni (a derivate parziali) gli elementi da cui dipendono i fenomeni fisici (campo gravitazionale, campo elettromagnetico, campo mesonico).

Nelle teorie di Einstein-Schrödinger la schematizzazione o geometrizzazione dell'universo, poggia su due elementi essenziali: un tensore doppio (covariante o controvariante) asimmetrico, una connessione affine (con torsione). Naturalmente, per il principio basilare di indifferenza rispetto ai cambiamenti di coordinate, le equazioni cercate debbono avere carattere tensoriale: oltre a questa indicazione precisa non si hanno che indicazioni vaghe sulla natura di queste equazioni risultanti da analogie con teorie più particolari, p. es. relatività generale. Ma mentre in questa il tensore doppio simmetrico (potenziali gravitazionali) determina la connessione simmetrica per cui vale il Lemma di Ricci (sicchè la connessione può farsi sparire dalle incognite del problema) non è più così nel caso unitario.

Anche assunta la derivazione covariante *polarizzata* di Einstein per un tensore doppio (che non è affatto una necessità logica) rispetto ad una connessione affine (e alla sua coniugata, secondo E. Bortolotti) bisogna dare anzitutto un sistema di equazioni che leghino le derivate del tensore alla connessione (equazioni che costituiscono una estensione del Lemma di Ricci); ma poichè queste non bastano a determinare differenzialmente il campo tensoriale e la connessione bisogna aggiungere altre equazioni tratte da un principio variazionale in cui l'azione dipende dal tensore di curvatura della connessione, precisamente da un tensore contratto di esso analogo al tensore contratto di Ricci nel caso riemanniano.

Questa pianificazione della ricerca del sistema differenziale unitario potrebbe dar l'illusione che (a parte le difficoltà formali di calcolo e la difficoltà di rintracciare a posteriori fra gli enti introdotti o fra quelli che se ne deducono quelli che rappresentano una realtà fisica o leggi note) si avesse un procedimento ben determinato per giungere a quelle equazioni. Il che non è affatto; ed è proprio la ricchezza delle possibilità ancora aperte ad una specificazione di quelle che ha dato origine ai vari tentativi di sviluppo della teoria (si vedano i 130 lavori indicati nella bibliografia) e che costituisce la difficoltà di orientarsi in essi.

E' merito appunto della Sig.ra Tonnelat, che per prima ha dato la risoluzione del sistema di equazioni che legano le componenti della connessione al tensore fondamentale, cioè di quella che qui si è detta estensione del Lemma di Ricci, di aver tentato un'esposizione organica dei

risultati finora raggiunti, unificando notazioni e metodi, istituendo confronti che certo promuoveranno lo sviluppo di ulteriori ricerche.

Dopo un'introduzione sugli scopi e sul valore delle teorie unitarie in generale, quattro capitoli sono dedicati al formalismo matematico (tensore fondamentale, connessione, derivazione polarizzata, tensore di Ricci), all'introduzione di un principio variazionale e delle identità di conservazione, alla risoluzione del primo gruppo di equazioni (Lemma di Ricci esteso), alla deduzione delle equazioni esatte e approssimate del secondo gruppo dalla variazione dell'azione. I due capitoli successivi trattano delle soluzioni a simmetria sferica e le relazioni fra campi e sorgenti. L'ultimo capitolo esamina alcuni problemi posti dalla teoria unitaria, come le relazioni fra il tensore impulso-energia e le equazioni di conservazione, la definizione delle geodetiche e le equazioni del movimento.

Chiudono il volume cinque note destinate alcune ad esplicitare calcoli accennati nel testo e l'ultima all'introduzione di coordinate isoterme nella teoria unitaria; e la bibliografia di lavori molto recenti dedicati all'argomento.

Questa monografia diventerà certo uno strumento necessario di lavoro per chi voglia dedicarsi alle teorie unitarie.

ENRICO BOMPIANI

Contributions to the theory of partial differential equations, edited by L. BERS, S. BOCHNER and F. JOHN, *Annals of Mathematics Studies* no. 33, Princeton University Press 1954.

Questo nuovo volume della collezione degli *Annals of Mathematics Studies* presenta al pubblico matematico un rendiconto delle comunicazioni svolte al Convegno sulle equazioni a derivate parziali organizzato a Harri-man (New York) nell'ottobre del 1952 dalla National Academy of Sciences (U.S.A.).

Dato l'interesse notevole che presentano parecchie di queste comunicazioni ci si può rammaricare del ritardo frapposto alla loro pubblicazione, tuttavia questo ritardo ha indubbiamente consentito ad alcuni degli autori di trasformare le loro comunicazioni in memorie definitive sull'argomento trattato e ciò aumenta di molto l'interesse del volume.

Gli articoli pubblicati sono in tutto quindici di cui otto si riferiscono alle equazioni ellittiche, due alle equazioni paraboliche e cinque alle equazioni iperboliche.

Fra gli articoli dedicati alle equazioni ellittiche sono da rilevare innanzitutto due memorie, l'una di F. E. Browder e l'altra di C. B. Morrey, relative ai sistemi lineari ellittici, che avranno indubbiamente una notevole importanza nell'ulteriore sviluppo di questo capitolo della teoria delle equazioni a derivate parziali.

La memoria di Browder fornisce una sistemazione definitiva di gran parte dei risultati annunciati da questo Autore in una serie di note pubblicate fra il 1952 e il 1953 nei *Proceedings of the National Academy of Sciences*. Questi risultati, che si riferiscono ai problemi al contorno per i sistemi fortemente ellittici di equazioni di ordine pari, sono molto simili a quelli ottenuti recentemente da L. Garding per il caso di una sola equazione [*Math. Scandinavica* 1 (1953)] e da M. I. Visik [*Mat. Sbornik* 25 (1949) e 29 (1951)] per il caso dei sistemi. E da rilevare tuttavia che il Browder è riuscito a dimostrare diversi teoremi di esistenza o di alternativa per il problema di Dirichlet prendendo in considerazione soluzioni ordinarie e non più soluzioni deboli delle equazioni del sistema. La trattazione è poi

completata dalla dimostrazione dell'esistenza della matrice di Green, nel caso in cui sussista il teorema di unicità. Da notare però che le soluzioni del problema di Dirichlet ottenute dal Browder verificano le condizioni al contorno solo in senso generalizzato (al modo di Courant), tranne che nel caso di due variabili, in cui, sotto opportune condizioni di regolarità per la frontiera, si riesce a dimostrare che le condizioni al contorno sono soddisfatte anche puntualmente. Il metodo adoperato è del tipo di quello cosiddetto delle proiezioni ortogonali e come tale richiede che si facciano sui coefficienti delle equazioni delle ipotesi certamente sovrabbondanti.

Nella memoria di Morrey invece, concernente i sistemi del secondo ordine sia ellittici che fortemente ellittici, la trattazione è svolta col minimo indispensabile di ipotesi. I risultati, già resi noti dall'A. in una nota preventiva pubblicata nel 1954 nei Proceedings della National Academy of Sciences, nonché i metodi, sono del tipo di quelli ottenuti vari anni fa da Hopf, Schauder e Caccioppoli per il caso di una sola equazione. Per certi sistemi di tipo particolare essi sono anzi assai più raffinati e possono riacostarsi a quelli ottenuti da C. Miranda per le soluzioni di certi sistemi di equazioni ellittiche del primo ordine. Tali risultati, validi anche nel caso che il sistema sia solamente ellittico, si riassumono in una serie di formule di maggiorazione a priori delle soluzioni del sistema e delle loro derivate, dalle quali viene messa bene in luce la interdipendenza fra il tipo di regolarità delle soluzioni e le ipotesi di regolarità relative ai coefficienti del sistema. Molto approfondito è anche lo studio del comportamento della soluzione sulla frontiera del campo, quando tale frontiera sia sufficientemente regolare. Tali formule di maggiorazione permettono, da un lato, di dimostrare il teorema di esistenza o quello di alternativa per le soluzioni del problema di Dirichlet relativo a un sistema fortemente ellittico, dall'altro di approfondire lo studio delle proprietà differenziali delle soluzioni dei sistemi ellittici non lineari, nonché delle estremali degli integrali multipli del calcolo delle variazioni. Tra l'altro si estende al caso di un sistema ellittico non lineare in N funzioni incognite di n variabili il teorema, già dimostrato da Caccioppoli per il caso $N = 1$, $n = 2$, secondo il quale ogni soluzione continua con le sue derivate seconde ammette derivate seconde hölderiane.

Questo stesso risultato, relativamente al caso di una sola equazione in n variabili, è dimostrato direttamente anche da L. Nirenberg in una delle note contenute nel volume.

Le altre note relative alle equazioni ellittiche si devono: a S. Bochner che si occupa del problema del prolungamento analitico proseguendo alcune sue precedenti ricerche, pubblicate negli Annals of Math. (1943) e nei Proceedings of the National Academy (1952); a F. John che presenta un nuovo procedimento per dimostrare che una soluzione debole di un'equazione ellittica lineare di ordine pari è anche soluzione ordinaria della stessa equazione; a S. Bergmann che si occupa delle soluzioni polidrome dell'equazione $\Delta_p \psi + F\psi = 0$; a C. Loewner che svolge alcune considerazioni sulle nozioni di ellitticità semplice e forte per certi sistemi di due equazioni in due funzioni incognite di due variabili. Infine un'ampia memoria di Bers è dedicata alle relazioni tra la teoria delle equazioni ellittiche e quella delle funzioni pseudo analitiche. In questa memoria, accanto a un ampio riassunto di precedenti risultati dell'A. relativi al caso di un'equazione lineare, nuovi interessanti risultati sono annunciati sia per il caso delle equazioni lineari che per il caso di certe equazioni non lineari che generalizzano l'equazione delle superficie minime.

Passando ora a considerare le due comunicazioni relative alle equazioni paraboliche, ricorderemo dapprima una memoria di P. D. Lax e A. N. Milgram relativa all'equazione:

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -Lu,$$

dove u è una funzione delle variabili (t, x_1, \dots, x_n) ed L è un operatore differenziale lineare ellittico di ordine $2p$. Nell'ipotesi che i coefficienti di L siano indipendenti da p e continui rispetto alle x , con le loro derivate di ordine p , un teorema di analisi funzionale di Hille e Yosida permette di dimostrare l'esistenza e la unicità di una soluzione *generalizzata* del problema al contorno classico relativo alla (1). Se poi i coefficienti di L ammettono derivate continue di ordine $p + [n/2] + 1$, si può dimostrare, basandosi su certi risultati di Friedrichs relativi alle equazioni ellittiche, che la predetta soluzione generalizzata ha continue tutte le derivate che figurano nell'equazione ed è perciò una soluzione del problema nel senso ordinario. Le condizioni al contorno s'intendono però sempre soddisfatte in senso generalizzato (alla Courant).

Allo studio del problema di Cauchy per la stessa equazione (*), ma nell'ipotesi che L sia a coefficienti costanti, è poi dedicata una nota di P. C. Rosenbloom. In questo caso è nota, sotto forma di integrale definito, la soluzione fondamentale della (*) e quindi si può scrivere, almeno formalmente, la formula risolutiva del problema di Cauchy. L'A. stabilisce vari teoremi intesi a investigare sotto quali ipotesi una soluzione del problema è rappresentabile con tale formula.

Le ultime cinque note del volume sono infine dedicate allo studio del problema di Cauchy per le equazioni iperboliche. Tra queste merita particolare rilievo una nota di J. Leray sul problema di Cauchy in grande per i sistemi iperboliche di equazioni lineari a coefficienti analitici, nella quale l'A., dopo aver messo in rilievo che la dimostrazione del ben noto teorema di esistenza di Petrowsky presenta una lacuna in un punto essenziale, riesce a completare tale dimostrazione basandosi su alcune nuove formule di maggiorazione a priori delle soluzioni. Un secondo procedimento di maggiorazione a priori consente poi di considerare anche il caso delle equazioni a coefficienti lipschitziani.

Molto interessante è anche un rapporto di P. D. Lax sullo stato attuale delle ricerche relative alle equazioni iperboliche non lineari in due variabili e sulle molte questioni che ancora rimangono aperte in tale teoria, specialmente per quanto riguarda la considerazione delle soluzioni deboli.

Anche carattere di rapporto ha la comunicazione di J. B. Diaz in cui si riferisce sull'attività dello Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics della University of Maryland. Si tratta di varie ricerche concernenti una generalizzazione del metodo di Riemann (J. B. Diaz e M. H. Martin), l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux (A. Weinberger, E. Blum) e infine la teoria generalizzata dell'equazione (di tipo ellittico) delle funzioni potenziali dotate di simmetria assiale (A. Weinstein, E. Payne, J. B. Diaz e A. Weinstein, A. Huber, M. H. Heins).

Di argomento più ristretto sono infine due note di A. Douglis e di M. H. Protter, di cui la prima riguarda l'equazione generale del secondo ordine, lineare, di tipo iperbolico e concerne l'estensione di una identità differenziale, data da H. Lewy in un caso particolare, che permette la traduzione in equazioni integrali di Volterra dei problemi di valori iniziali, con o senza condizioni al contorno, mentre la seconda è dedicata allo studio di certi problemi di Cauchy, di nuovo tipo, relativi all'equazione delle onde in tre dimensioni.

Per concludere si può affermare che con questo volume la collezione degli Annals of mathematics Studies si è arricchita di una pubblicazione di notevole interesse che sarà sicuramente accolta con molto favore dal pubblico matematico.

CARLO MIRANDA

M. PARODI, *Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées*, Gauthier-Villars, Mém. Sc. Math., fasc. 118^{me}, Paris, 1952, pp. 64.

Questo breve *Mémorial* riesce interessante per i cultori di teoria delle matrici e forse ancor più per chi le adopera nelle varie branche delle matematiche applicate.

Le proprietà esposte nei quattro capitoli sono tutte più o meno ispirate da un teorema di Hadamard del 1903 (*Leçons sur la propagation des ondes*), dalla dimostrazione di esso data da Ostrowski e dalla generalizzazione fattane da Müller.

Nel 1° capitolo l'A. ha riunito i criteri generali di non singolarità di una matrice cioè i teoremi già citati e altri di von Koch e di O. Tausky. L'A. ne fa subito applicazione alla ricerca di condizioni sufficienti perchè una certa equazione algebrica ottenuta da Bourlet con una matrice abbia radici di modulo minore del grado e perchè un'altra sia priva di radici a parte reale positiva. Le condizioni sufficienti perchè una matrice reale e simmetrica sia definita positiva dedotte dal teorema di Hadamard vengono applicate alla teoria delle reti elettriche passive senza mutua induttanza formate da n maglie indipendenti. Si accenna anche alla unicità degli stati di equilibrio elettrostatico di un sistema di n conduttori.

Nel capitolo II si considerano due domini del piano di Gauss, ognuno dei quali contiene all'interno tutte le radici caratteristiche di una data matrice A di ordine n . Se ne deducono dei limiti inferiore e superiore per i moduli dei valori caratteristici della matrice e delle loro parti reali o immaginarie, alcuni dei quali si riattaccano a risultati di Perron o di Montel.

Segue un teorema di R. Brauer che dà una condizione sufficiente perchè un cerchio dei domini sopradetti contenga uno e un solo valore caratteristico di A , con le relative notevoli conseguenze. Prima di questo teorema Parodi osserva come certi studi di stabilità di sistemi fisici si riconducano alle condizioni sotto le quali una matrice reale sia priva di valori caratteristici a parte reale positiva, per che si utilizza la rappresentazione precedente del suo spettro. Dopo un'altra applicazione algebrica, l'A. dimostra ancora un teorema di Brauer che ai domini circolari sostituisce un dominio di $\binom{n}{2}$ ovali di Cassini e dà nuovi limiti per i moduli dei valori caratteristici di A , che vengono applicati agli zeri di un polinomio.

Il terzo capitolo si apre con due criteri sufficienti di Ostrowski per la non singolarità di una matrice ottenuta variando abbastanza poco gli elementi di una matrice non singolare, in particolare definita positiva. Se ne deduce un teorema di Hirsch ed un limite superiore per le radici (negative) dell'equazione (interessante un problema di vibrazioni) $\det [Ax + B] = 0$, con A e B matrici reali simmetriche, entrambe definite positive. Si calcola pure un limite inferiore delle parti reali per l'equazione delle frequenze proprie della rete elettrica considerata avanti.

Nell'ultimo capitolo si considera l'equazione (incontrata nella meccanica quantica e nella teoria dei piccoli movimenti) che si ottiene annullando un determinante ad elementi polinomi di grado m nell'indeterminata z e si trova un limite superiore per il modulo delle sue radici. Quando la matrice che dà luogo a detta equazione è reale e simmetrica si trova anche una condizione sufficiente perchè le radici reali siano negative: essa è che le matrici coefficienti della matrice polinomio considerata siano tutte (reali, simmetriche e) definite positive.

L'esposizione di questo *Mémorial* è abbastanza facile ma è priva dell'eleganza che avrebbe potuto acquistare usando le più semplici e compatte notazioni moderne.

Ci sia permesso di rilevare che il teorema di Taussky poteva enunciarsi come nel testo originale dell'Autrice senza quasi nulla cambiare alla dimostrazione, guadagnando in precisione e compattezza.

Nel n. 3 del cap. IV, pag. 61, si fa una affermazione non sufficientemente motivata. Invero, esser i moduli degli elementi ε_{ij} *piccoli rispetto a quelli* degli a_{ij} è un modo di dire per lo meno troppo impreciso per poter dedurre che $B = [a_{ij} + \varepsilon_{ij}]$ è permutabile con $A = [a_{ij}]$, nel qual caso, ed in generale solo allora, come di certo l'A. sa, può affermarsi che i valori caratteristici di $A \rightarrow B$ sono i rapporti tra quelli di B e quelli di A , in ordine relativo opportuno. Ad es., $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ hanno valori caratteristici razionali interi mentre le equazioni in μ $\det [A_{\mu} + B] = 0$ e $\det [A_{\mu} - B] = 0$ hanno radici irrazionali.

Il riferimento al trattato di dinamica analitica di Whittaker è appropriato solo al n. 2 del cap. III pag. 46: nel qual caso ($m=2$) la condizione sufficiente del n. 4, pag. 64, diventa anche necessaria. La trasformazione adoperata da Wittaker seguendo Jordan (v. pag. 79 della IV edizione, New York, 1944) per portare a forma diagonale simultaneamente A e B non è ortogonale, quindi i coefficienti delle forme canoniche dell'energia cinetica e di quella potenziale, di cui alla fine di pag. 180, non sono i valori caratteristici delle due forme di partenza.

SALVATORE CHERUBINO.

W. ŚLEBODZIŃSKI *Formes, extérieures et leurs applications*, Vol. I. (Monografie Matematyczne, Vol. XXXI), Państwowe Wydawnictwo Naukowe, (Warszawa 1954), pp. VI + 154.

E' questo il primo di due volumi di un'opera nella quale l'A. raccoglie, con modificazioni ed aggiunte, le lezioni di un corso tenuto presso l'Università di Wroclaw sulle forme esterne e le loro applicazioni. La teoria delle forme esterne ha acquistato recentemente notevole importanza per le molteplici applicazioni che ha trovato nei più svariati campi della matematica: dalla geometria differenziale alla geometria algebrica, all'analisi, alla topologia. Ciò giustifica la fioritura di numerosi trattati sull'argomento, fra i quali, in Italia, quello ottimo recente di B. Segre ⁽¹⁾.

In questo primo volume l'A. tratta esclusivamente della teoria algebrica delle forme esterne, mentre dedicherà il secondo volume all'Analisi delle forme differenziali esterne. Nella trattazione, particolarmente piana, l'A. fa uso degli elementi del Calcolo tensoriale. Il volume si compone di quattro capitoli, dei quali i primi due sono dedicati alla teoria generale delle forme ed equazioni algebriche esterne, mentre gli ultimi due sono rivolti a talune applicazioni.

Nel primo capitolo, introdotte le forme alternate in più serie di variabili reali ed i principali teoremi relativi con interpretazioni geometriche nello spazio affine, viene posta la nozione di forme esterne come certi

(1) Si veda: questo Bollettino, ser. III, vol. VII, p. 190 (1952).

simboli relativi a più serie di variabili reali, dei quali sono definite in modo formale le nozioni di somma e di prodotto. Seguono le proprietà fondamentali, l'introduzione dell'operazione di derivazione e della nozione di rango. Particolare rilievo viene dato allo studio delle forme quadratiche.

Il secondo capitolo è dedicato alle equazioni esterne e costituisce una indispensabile premessa di natura algebrica per la risoluzione dei problemi relativi alle forme differenziali esterne.

Il terzo capitolo costituisce una interessante applicazione della teoria esposta nei capitoli precedenti allo spazio e gruppo simplettico. In questo capitolo trovano posto anche alcuni complementi sulle forme quadratiche esterne necessari alla teoria delle forme differenziali.

Altre applicazioni riguardanti la teoria dei determinanti, le rotazioni infinitesime di uno spazio euclideo e di uno spazio simplettico ed i complessi di rette costituiscono l'argomento dell'ultimo capitolo.

Il volume è dotato di singolari pregi di semplicità e chiarezza che ne rendono assai agevole la lettura.

GUIDO VAONA

G. BOL, *Projektive Differentialgeometrie, I, II*, (Studia Mathematica, Bd. 4, Bd. 9). Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1950 (T. 1), pp. 365 + 8, 1954 (T. 2), pp. 372 + 6.

Sono le prime due parti di un trattato di geometria proiettiva differenziale che l'autore — come afferma nella prefazione alla 2^a parte — si propone di completare prossimamente.

Il contenuto del trattato in questione è, nelle sue grandi linee, quello di altre pubblicazioni congeneri, dalle quali però differisce sia per alcuni concetti fondamentali a cui l'autore si ispira, sia per il procedimento di calcolo introdotto e sistematicamente seguito: per queste ragioni anzitutto l'opera del Bol presenta caratteristiche originali.

La prima delle due parti è essenzialmente dedicata allo studio delle curve (piane e sghembe); tuttavia in essa si trovano già i primi elementi della teoria delle superficie (di S_3) a cui è invece dedicata la seconda parte.

I più importanti risultati (non esclusi quelli originali dovuti all'A.) concernenti la teoria delle curve e delle superficie, sono qui conseguiti con mezzi adeguati ed evitando quasi sempre procedimenti di calcolo molto laboriosi senza che la chiarezza ed il rigore delle dimostrazioni abbiano a risentirne.

L'idea prima da cui prende le mosse l'A. e che è da ritenersi fondamentale per l'opera, può essere chiarita facilmente nel modo che segue.

Considerata una curva piana generica γ , sia $x(t)$ il « vettore » le cui componenti (definite a meno di uno stesso fattore di proporzionalità ρ) sono le coordinate proiettive omogenee x_1, x_2, x_3 del punto che descrive la curva γ ; supposte soddisfatte le condizioni che rendono valide le considerazioni che riportiamo, la circostanza: (1) $F(t) = (x, x_t, x_{t^2}) = k (= \text{cost} \neq 0)$,

$(x_t = \frac{dx}{dt}, \dots)$, può essere realizzata mediante una conveniente scelta del fattore di proporzionalità ρ delle coordinate. Per effetto di un cambiamento del parametro: $t = t(t^*)$, risulta: $F(t^*) = \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3 k$, e solo se: $\rho = \frac{dt^*}{dt}$, segue: $(x^*, x_{t^*}^*, x_{t^{*2}}^*) = k$.

La corrispondente trasformazione (sternttransformation): (2) $x^* = \frac{dt^*}{dt} x$, ottenuta combinando le due precedenti, è appunto tale da lasciare invariata la condizione (1).

Di qui si vede subito la possibilità di notevoli semplificazioni nelle formule e della immediata estensione al caso duale; la conseguente definizione di quantità *seminvarianti* (rispetto alla (2)) ed il loro continuo uso, sono, nelle mani dell'A., uno strumento di indagine della massima efficacia, attesa la possibilità di poter disporre, in tal modo, di condizioni dotate di significato geometrico.

Con gli stessi accorgimenti viene fatto lo studio delle curve sghembe e delle superficie; in questo ultimo caso, se $x(u, v)$ è il « vettore » che rappresenta il punto che descrive la superficie (di S_3), in luogo della (2),

si ha la: (3) $x^* = f_u^{-\frac{1}{2}} g_v^{-\frac{1}{2}} x$, con $u = f(u^*)$, $v = g(v^*)$; la condizione invariante è ora la seguente: $(x, x_u, x_v, x_{uv}) = \text{cost.}$ (u, v : parametri asintotici).

La nozione di quantità *seminvariante* rispetto alla (3) (che l'autore introduce già nella prima parte) viene sfruttata (all'inizio della seconda parte) per definire quel procedimento di *differenziazione seminvariante* che si rivela particolarmente idoneo (anche per la generalità dei risultati a cui esso conduce) per una trattazione coerente della teoria delle superficie.

Il procedimento di calcolo menzionato ammette come presupposto la definizione di *derivata seminvariante*. Siano $a(u, v)$, $\lambda(u, v)$, $\mu(u, v)$ *seminvarianti* con i pesi (m, ν) , $(-1, n_0)$, $(m_0, -1)$; le espressioni: $a_1 = a_u + m \frac{\lambda_u}{\lambda} a$, $a_2 = a_v + n \frac{\mu_v}{\mu} a$ risultano *seminvarianti* con i pesi $(m+1, n)$, $(m, n+1)$; a_1, a_2 sono le *derivate* (prime) *seminvarianti* (di a) nelle direzioni u, v , rispettivamente con riferimento agli invarianti fondamentali λ e μ .

Immediato risulta il passaggio alle *derivate* (*seminvarianti*) successive a_{11}, a_{12} , ecc. Osservando poi che l'annullarsi di una di tali derivate ha un evidente contenuto geometrico, si comprendono subito i vantaggi che, nello studio delle proprietà delle superficie, presenta il procedimento di differenziazione *seminvariante* nei confronti della differenziazione ordinaria.

Delineati così brevemente gli aspetti più salienti dei metodi introdotti dall'A. possiamo procedere ad una rapida rassegna degli argomenti trattati in ciascuna delle due parti.

Riferendosi dunque ai criteri generali di cui si è detto, l'A. studia nella prima parte (suddivisa in quattro capitoli) le curve piane (I cap.): dopo le necessarie nozioni introduttive (in gran parte dedicate ai concetti già precisati), fissato in modo conveniente il riferimento locale, viene posto il concetto di conica osculatrice ad una curva piana in un suo punto e vengono assegnati gli sviluppi in serie canonici; si dà quindi la nozione di arco proiettivo e di curvatura proiettiva; nell'ultima parte del capitolo si stabilisce un risultato di geometria proiettiva differenziale in grande: si determina cioè il numero dei punti sestatici di una curva convessa intersecata in due punti, al più, da una retta generica del piano.

Il capitolo II si presenta come una introduzione alla teoria delle curve e delle superficie nello spazio ordinario: il primo paragrafo è dedicato alle curve sghembe: seguono diversi paragrafi dedicati alle rigate il cui studio offre l'occasione di stabilire pure i fondamenti della geometria della retta in S_5 , di porre i primi elementi della teoria delle superficie e di introdurre, tra l'altro, la nozione di quadrica osculatrice ad una rigata in un suo punto (nonchè di considerare inoltre le quadriche di Lie, di Darboux, le direzioni di Darboux e di Segre su una superficie). Segue un primo esame delle reti coniugate, della trasformazione di Laplace e delle successioni di Laplace; trovano pure posto le congruenze di rette. Gli ultimi tre paragrafi del capitolo sono dedicati ad un'analisi accurata della nozione di contatto (analitico e geometrico) di curve e superficie.

Nel capitolo III viene proseguito lo studio delle curve sghembe: fissato il riferimento locale e stabilite varie formule con le corrispondenti per

dualità, vengono dati gli sviluppi in serie canonici. Seguono poi i paragrafi dedicati alle C_3 armoniche relative ai punti di una curva C (gobba) ed alla C_3 di Fubini in particolare; tra i vari argomenti successivi si trovano: le sviluppabili connesse con la C , la prima e la seconda superficie armonica della C , le congruenze delle binormali, l'arco proiettivo, le curve W e le C_3 osculatrici alla C . Figurano pure applicazioni relative al caso affine; con il paragrafo riguardante le curve giacenti su una quadrica termina il capitolo III.

L'ultimo capitolo della prima parte è dedicato alla teoria delle striscie. Anche qui una conveniente scelta del riferimento rende immediata la considerazione delle coniche, dei coni, delle quadriche osculatrici alla striscia ed inoltre di certe superficie ad esse collegate (cioè della superficie generata dalle coniche osculatrici e di quelle inviluppate rispettivamente dai coni e dalle quadriche osculatrici). Si esaminano infine le rigate (contenenti la striscia ossia aventi le generatrici nei piani della striscia (in special modo quelle per cui la striscia è flecnodale); sono considerate poi le striscie di una superficie (si stabilisce in particolare il numero dei punti sestattici delle striscie biflecnodali soddisfacenti a determinate condizioni); in ultimo sono considerate le striscie del 2° ordine definite a partire da coppie di superficie che hanno in ogni punto di una curva comune contatto del 2° ordine. Il capitolo termina con il paragrafo sulle striscie pangeodetiche di una superficie.

Un sommario, di grande comodità per il lettore, contenente questioni varie, chiude questa prima parte che inoltre è corredata da una estesa bibliografia riferentesi ai lavori di geometria proiettiva differenziale pubblicati dal 1931 al 1949, in continuazione di quella già apparsa nel libro di Fubini e Čech: *Introduction à la géométrie projective différentielle* (Paris, 1931).

La seconda parte del trattato, dedicata alle superficie (dello spazio ordinario), è pure — come la prima — suddivisa in quattro capitoli.

Il capitolo V (primo della seconda parte) inizia con le premesse indispensabili per gli sviluppi di quei procedimenti di calcolo (costruzione di seminvarianti, derivazione seminvariante) di cui già si è detto e per mezzo dei quali l'A. riesce a dare un assetto unitario alla trattazione della teoria delle superficie con l'uso costante di parametri asintotici.

Prefissati due seminvarianti λ , μ si stabiliscono anzitutto, in riferimento ad essi, le nozioni di prima normale relativa (individuata dai punti x_{12} , x_{21} che risultano allineati con x) e seconda normale relativa (individuata da x_1 , x_2); le due normali suddette vengono considerate in relazione alla quadrica di Lie; inoltre esse possono essere interpretate quali generatrici di congruenze; si ottengono così la prima e la seconda congruenza delle normali relative. Con scelte particolari degli invarianti fondamentali ρ , σ , la prima normale relativa diviene — a seconda dei casi — la normale di Fubini (normale proiettiva), oppure di Vilczynski (direttrice), di Green, di Darboux ... ecc.

Attraverso corrispondenze biunivoche che conservano i parametri asintotici, si perviene poi facilmente alla nozione di applicabilità proiettiva.

Una superficie viene quindi studiata a partire da certi invarianti dedotti dalle sue equazioni ed inoltre vengono assegnati gli sviluppi in serie canonici validi in riferimenti locali.

In questo primo capitolo il procedimento di calcolo introdotto dall'A. trova immediatamente l'interpretazione geometrica almeno nei suoi tratti essenziali.

Nel capitolo VI, con l'uso di riferimenti locali generali, si considerano inizialmente superficie algebriche di ordine n (F_n) che hanno con la superficie assegnata un contatto del 2° ordine ottenendo, come caso particolare, le quadriche (F_2) di Darboux; segue la nozione di arco proiettivo (sulla superficie) e quella (con relativo significato geometrico) di elemento superficiale proiettivo.

Dopo alcuni cenni sulla geometria proiettiva nel fascio delle tangenti alla superficie in un suo punto, si studiano in particolare le proprietà focali delle congruenze delle normali: la considerazione del centro di curvatura media relativa conduce alla nozione di superficie minime relative ossia delle superficie che — come si fa vedere — risolvono un noto problema di minimo.

Gli argomenti successivi portano, in particolare, al significato geometrico delle normali di Wilczynski e di Green; pure vi sono applicazioni al caso affine ed il capitolo termina con la considerazione delle F_3 che osculano in un suo punto la superficie considerata.

Il procedimento di derivazione seminvariante, stabilito al capitolo V, consente all'autore di introdurre (all'inizio del capitolo VII) l'operatore definito dalla relazione: $\nabla a = a_1 \frac{du}{dt} + a_2 \frac{dv}{dt}$ ottenendo in tal modo la nozione di *derivata seminvariante* (di a) *rispetto al parametro t* relativo ad una curva tracciata sulla superficie.

Le proprietà delle curve e dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie vengono quindi esaminate disponendo di un mezzo particolarmente idoneo: immediata risulta l'importanza della congruenza delle normali che si possono associare ad un dato sistema di curve e del relativo riferimento aggiunto.

Tra i numerosi argomenti trattati nel capitolo VII menzioneremo qui brevemente quelli riguardanti: problemi variazionali sulle superficie; geodetiche di una superficie riferite ad un dato seminvariante; pseudogeodetiche (corrispondenti ad un dato riferimento); ipergeodetiche e pangeodetiche con relative caratterizzazioni geometriche (a titolo di es. riportiamo qui la seguente: la striscia del 2° ordine — appartenente ad una data superficie — la cui curva è una pangeodetica, ammette come quadrica osculatrice in ogni suo punto, la relativa quadrica di Moutard).

Per mezzo della differenziazione seminvariante, risulta facile introdurre la nozione di « trasporto proiettivo » (così definito: se $\nabla p_i = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, si ha, in corrispondenza, un trasporto proiettivo del punto p di coordinate locali p_i lungo una assegnata curva e dedurne le più immediate conseguenze.

L'ultima parte del capitolo si può sostanzialmente ritenere dedicata alle congruenze generate dalle tangenti alle curve della superficie facenti parte di uno stesso sistema: ci si trova così di fronte a particolari congruenze ed una conveniente scelta del sistema di riferimento rende agevole il loro studio in vari casi speciali (congruenze W, di Waelsch, congruenze R, ecc.).

Pochi cenni sulle reti coniugate bastano infine a dimostrare come queste possano essere facilmente studiate per mezzo delle congruenze considerate.

Nel capitolo VII vengono passate in rassegna varie proprietà delle superficie connesse in special modo con la normale di Wilczynski; particolare attenzione è dedicata alle superficie involuppo delle quadriche di Lie, nonché alla configurazione di Demoulin ed alle congruenze di Demoulin collegate. Il capitolo termina con una trattazione (ispirata ai metodi dell'A.) della teoria delle superficie con ricorso alla geometria della retta secondo l'indirizzo di L. Godeaux.

Nel complesso — come risulta anche dalla esposizione che precede — queste prime due parti del trattato del Bol formano un tutto unitario il cui interesse è di molto accresciuto dalle abbondanti raccolte (veramente considerevoli nella seconda parte) di questioni varie e di nozioni complementari quasi totalmente dedotte da lavori originali di singoli autori e riportate in aggiunta ad ogni paragrafo: legittimo quindi il successo delle prime due parti del trattato e più che giustificata l'aspettativa per la terza parte la cui pubblicazione è da ritenersi oramai imminente.

FRANCO FAVA

W. HAACK, *Elementare Differentialgeometrie*, Birkhauser Verlag
Basel und Stuttgart, 1955, pag. VIII + 239.

La Casa editrice Birkhauser presenta, nell'elegante veste che le è abituale, una nuova edizione di un volumetto già dedicato dall'Haack alla geometria differenziale. L'attuale volume, risponde alla qualifica di « elementare » in quanto espone la teoria delle curve e delle superficie nell'ordinario spazio euclideo ma trascende di molto il livello elementare per i metodi e per i risultati che contiene.

Dei dieci capitoli di cui si compone, il primo è un richiamo di analisi vettoriale, due sono dedicati alle curve e i rimanenti alle superficie.

La parte classica della teoria è esposta con chiarezza geometrica e profittando di perfezionamenti e apporti anche recentissimi: di essa entra a far parte il parallelismo di Levi-Civita e le sue conseguenze. Con ciò si è detto certamente troppo poco sul suo ricco contenuto e sulla nitidezza dell'esposizione che permette di condensarlo senza sforzo in un piccolo numero di pagine.

Questa brevità nel riferirne sia giustificata dal desiderio di concentrare l'attenzione sulla parte rimanente (Cap. III, IX, X) che è la più originale in un'opera che vuol conservare carattere elementare.

I Cap. III e X sono dedicati al metodo del riferimento mobile di E. Cartan.

Esso è introdotto nel modo più spontaneo, nel cap. III, per i sistemi ∞^1 di triedri ortogonali e dà luogo alla teoria delle *striscie* (quando una faccia del triedro in ogni sua posizione sia tangente alla curva luogo del vertice del triedro) e alla caratterizzazione geometrica dei loro invarianti (e quindi di sottoclassi di striscie geodetiche, di curvatura, sferiche, eliocoidali).

L'analogia teoria per sistemi ∞^2 di triedri è svolta nel Cap. IX. Un minimo di premesse sulle forme pfaffiane, sulle forme esterne e sulle derivate esterne e sulle espressioni per mezzo di esse delle condizioni d'integrabilità permette di applicare la teoria alle superficie e di farne il raffronto con la teoria classica (basata sulle forme quadratiche) mettendo in evidenza i vantaggi della trattazione di Cartan. Il parallelismo di Levi-Civita, il teorema di Gauss-Bonnet, le coordinate geodetiche, le isoterme e le reti isometriche, i problemi al contorno per l'equazione di Beltrami, la rappresentazione conforme, trovano sede naturale nella teoria.

L'ultimo capitolo tratta di problemi esistenziali nella teoria delle superficie: essi sono legati a problemi di esistenza (ed eventualmente di unicità di particolari sistemi di equazioni a derivate parziali).

Il primo di essi riguarda l'esistenza (e con date condizioni iniziali l'unicità) di una superficie relativa a due date forme pfaffiane e a tre funzioni che compariscono nelle equazioni fondamentali e che soddisfano alle loro condizioni d'integrabilità. La ricerca è ricondotta all'integrazione di sistemi differenziali ordinari che fornisce ∞^1 striscie di cui si prova l'appartenenza ad una stessa superficie.

Un problema più delicato (costruzione di una metrica) si ha quando si considerino due forme pfaffiane (la cui somma dei quadrati definisce la metrica sulla superficie di cui si vuol stabilire l'esistenza) e si assumano le condizioni d'integrabilità a definire (se possibile) le altre funzioni che intervengono nelle equazioni fondamentali. Questo problema conduce ad un sistema di due equazioni differenziali di tipo quasi-lineare (cioè lineare nelle derivate delle funzioni incognite ma non in queste). Per evitarne la teoria il problema viene risolto nel caso di una metrica a curvatura negativa con un procedimento di caratteristiche che poggia su teoremi sulle equazioni di tipo iperbolico dovuti all'A. e ad altri.

Un secondo teorema di esistenza di superficie sulle quali si attuì una data metrica (a curvatura negativa) si ha in ipotesi analoghe partendo da una striscia che non sia asintotica (cioè i cui piani non siano osculatori alla curva luogo dei vertici).

Strettamente legati ai problemi precedenti sono quelli di deformabilità (che si distinguono dai precedenti per il fatto che qui già si suppone nota una superficie con data metrica).

Come si sa la differenza fra superficie isometriche e superficie appartenenti ad una stessa classe di deformazione è stata posta in evidenza in un lavoro di E. E. Levi di circa mezzo secolo fa.

Oggi si posseggono risultati molto fini e precisi (pur mancando metodi generali), sui quali l'A. riferisce, sulle classi di deformazioni di pezzi di superficie sia a punti iperbolici che ellittici.

Risultati particolarmente penetranti (fra i quali alcuni del 1955) si hanno nel caso di deformazioni infinitesime: essi sono divisi in tre classi secondo che riguardano proprietà di curvatura della superficie, il vettore rotazione (del triedro associato ad un punto della superficie) o il vettore spostamento.

Un ultimo paragrafo è dedicato alla rigidità delle superficie ovali.

Chiude il volume un indice bibliografico in cui, oltre ad alcuni trattati fondamentali, sono indicati i lavori riferentisi al contenuto dell'ultimo capitolo (per la maggior parte dal 1950 in poi).

Risulta da tutto quanto precede che si tratta di un eccellente volume, redatto in modo magistrale, e del tutto rispondente alle esigenze della moderna geometria differenziale.

ENRICO BOMPIANI

W. I. SMIRNOW, *Lehrgang der höheren Mathematik*, Teil III, 2, mit 85 Abbildungen. Deuts. Verl. d. Wissenschaften, Berlin, 1955, XI + 601.

Il grande trattato di analisi in lingua russa di cui il I volume di Tamarkin e Smirnow apparve nel 1924 e i successivi di Smirnow apparvero nel 1933 (II e III), 1944 (IV), 1947 (V) viene ora tradotto in lingua tedesca.

Sono già stampati in questa traduzione il primo, il terzo in due parti, ed è annunciata come imminente la stampa del secondo.

Il volume di cui qui diamo notizia è la seconda parte del terzo ed è dedicato alle funzioni di variabile complessa e alle sue applicazioni.

Lo Smirnow, famoso come trattatista, si rivolge agli studiosi di matematica pura ed applicata, ai fisici, agli ingegneri, e supponendo unicamente che essi conoscano quel che si apprende in un corso istituzionale di analisi, espone con grande semplicità e in profondità la materia, fino ad arrivare ai più recenti sviluppi.

Alla teoria generale delle funzioni di variabile complessa sono dedicati i primi quattro Capitoli.

Il primo riguarda il teorema integrale di Cauchy, la formula integrale di Cauchy, la serie di Cauchy-Taylor, quella di Laurent, il valore principale di un integrale; il secondo tratta la rappresentazione conforme e le sue applicazioni in alcune questioni di fisica matematica; nel terzo sono esposte la teoria dei residui, la fattorizzazione delle trascendenti intere, gli sviluppi di Mittag-Leffler, l'integrazione dei sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti; il quarto Capitolo contiene le nozioni generali sulle funzioni di più variabili complesse e sulle funzioni di matrici.

Alle equazioni differenziali nel campo complesso è dedicato il Capitolo quinto; sono studiati: le equazioni totalmente fuchsiane, l'equazione ipergeometrica di Gauss e gli sviluppi asintotici delle soluzioni delle equazioni differenziali.

Il Capitolo sesto, che costituisce da solo un terzo del volume, riguarda le funzioni della fisica matematica ed è suddiviso in quattro paragrafi.

Nel paragrafo 1° sono studiate le funzioni sferiche, quelle di Legendre, e le relative applicazioni ai problemi di Dirichlet e di Neumann per la sfera e alla teoria del potenziale; nel paragrafo 2° le funzioni di Bessel; nel paragrafo 3° i polinomi di Hermite e di Laguerre e la loro rappresentazione asintotica; nel paragrafo 4° infine sono considerati gli integrali ellittici e le funzioni ellittiche con particolare riguardo alla μ di Weierstrass e alle funzioni ellittiche di Jacobi.

Gli indici della materia e quello bibliografico rendono assai agevole la consultazione del volume.

GIOVANNI SANSONE

W. I. SMIRNOW, *Lehrgang der höheren Mathematik*, Teil III, 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlino 1954 (traduzione ad opera di un gruppo di collaboratori, sotto la guida del prof. L. Kaloujnine, dalla 5^a edizione russa, comparsa a Mosca nel 1951).

Il presente volume consta di tre capitoli dedicati a tre argomenti, tra loro connessi: 1) Determinanti e risoluzione dei sistemi di equazioni lineari; 2) Trasformazioni lineari e forme quadratiche; 3) Elementi di teoria dei gruppi e rappresentazione lineare dei gruppi.

Nel primo capitolo viene svolta l'ordinaria teoria elementare dei determinanti e loro applicazioni alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Sono però presentate anche talune classiche applicazioni dei determinanti e dei sistemi lineari all'analisi e alla geometria (spazi vettoriali ad n -dimensioni, risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, determinante funzionale, funzioni implicite).

Nel secondo capitolo, l'Autore, dopo aver presentato, allo scopo di avviare meglio il lettore, il caso particolare delle trasformazioni lineari dello spazio tridimensionale reale, accompagnato da un cenno sui vettori affini covarianti e controvarianti e da esempi di tensori affini-ortogonali, tratta le trasformazioni lineari nello spazio affine complesso ad n dimensioni. Dopo aver mostrato come si possa far corrispondere ad ogni tale trasformazione la matrice dei suoi coefficienti, e come quindi ogni risultato sulle trasformazioni lineari possa tradursi in un risultato sulle matrici, l'Autore espone gli elementi del calcolo matriciale, e consegue la riduzione di una matrice a forma canonica. Vengono poi considerati i casi particolari delle trasformazioni unitarie e delle trasformazioni ortogonali. L'autore affronta indi il problema della trasformazione di una forma quadratica a coefficienti reali in una somma di quadrati, mediante una opportuna sostituzione lineare ortogonale sulle variabili (corrispondente al problema geometrico di riduzione dell'equazione di una quadrica a centro alla forma canonica), e successivamente mediante sostituzioni lineari qualunque, il che lo porta ad una classificazione delle forme quadratiche; si occupa poi della riduzione simultanea di due forme quadratiche in una somma di quadrati mediante una sostituzione lineare (non necessariamente ortogonale). Vengono estesi i risultati ottenuti alle matrici e forme hermitiane, e alle matrici unitarie. Chiude il capitolo un cenno agli spazi di Hilbert, alle condizioni

di completezza di un sistema di vettori mutuamente ortogonali in tale spazio, e agli spazi funzionali.

Nel terzo capitolo l'Autore parte da alcuni notevoli esempi di gruppi (gruppo di trasformazioni lineari in tre variabili, gruppi di poliedri regolari, gruppo delle trasformazioni di Lorentz, gruppi di permutazioni), per arrivare alla definizione di gruppo astratto ed ai concetti fondamentali inerenti alla loro teoria (sottogruppi, sottogruppi normali, gruppi fattoriali, isomorfismo ed omomorfismo). Attraverso significativi esempi, l'Autore giunge poi al concetto di rappresentazione di un gruppo mediante un gruppo di trasformazioni lineari, e svolge dettagliatamente la teoria di tali rappresentazioni, tenendo presenti le applicazioni al gruppo delle rotazioni e a quello di Lorentz. Chiude il volume un'esposizione dei primi elementi della teoria dei gruppi continui.

Il libro è stato evidentemente scritto in vista delle applicazioni, in specie alla Fisica, e ha il pregio di racchiudere in poco spazio gli elementi di diverse teorie, mettendone in luce i reciproci legami. Alcuni paragrafi, più specializzati e non essenziali per la comprensione del seguito, sono scritti in carattere minuto. Sono qua e là riportati anche recenti risultati particolari di autori russi, specie nel campo delle applicazioni tecniche. Non mancano una buona bibliografia e un accurato indice analitico.

Il volume facilmente leggibile, data anche la presenza di numerosi esempi, e fornito di buone doti di sistematicità e precisione, è particolarmente raccomandabile ai lettori italiani perchè il suo contenuto concerne capitoli della matematica i quali, pur essendo ormai classici, raramente figurano (con la sola eccezione della teoria dei determinanti e dei sistemi lineari) nei nostri corsi universitari.

GUIDO ZAPPA

F. HOHENBERG, *Konstruktive Geometrie für Techniker*, Wien, Springer Verlag, 1956 (pag. X + 272).

La denominazione di « geometria costruttiva », proposta da E. Kruppa (1953), sta qui per geometria descrittiva ma tende a porre in evidenza che si tratta di procedimenti costruttivi, atti a creare nuove forme geometriche e non soltanto a raffigurare forme già definite: il loro insieme è il linguaggio, il modo di esprimersi, che occorre al tecnico, ingegnere o architetto, per fissare e comunicare ad altri il suo pensiero creativo.

Vengono quindi in primo piano quelle che, secondo le nostre denominazioni scolastiche, si chiamavano applicazioni della geometria descrittiva; sono queste che offrono reale interesse, perchè imposte dall'esercizio professionale: l'interesse tecnico è preminente rispetto al contenuto geometrico dei metodi. E in questi, poichè vanno applicati a ben determinate configurazioni aventi carattere metrico nell'ordinario spazio euclideo, l'aspetto puramente proiettivo, che nasce più che da una necessità immediata da un desiderio d'astrazione e di sintesi, recede per lasciar posto a procedimenti costruttivi più appropriati ai problemi e di rendimento concreto.

Io credo che queste indicazioni più che un riassunto del contenuto quale si rileva da una scorsa all'indice valgano a caratterizzare la posizione di questo volume rispetto ad altri sulla stessa materia (e la tradizione dell'insegnamento della geometria descrittiva in Austria ne ha di eccellenti).

Non è soltanto la ricchezza del materiale illustrativo, tratto da ogni ramo della tecnica, che imprime alla trattazione il suo carattere, ma il

fatto che i problemi tecnici precedono e suggeriscono i metodi per la loro risoluzione sicchè questi perdono il loro carattere di astrattezza dimostrandosi uno strumento necessario per la risoluzione di quelli.

A me sembra che la pubblicazione di questo libro porti un elemento concreto alla discussione che si va svolgendo ora in Italia sull'opportunità e sul modo dell'insegnamento della geometria descrittiva per gli allievi ingegneri.

Non sarà inopportuno ricordare che questo insegnamento si svolgeva, fino a non moltissimi anni or sono, su due corsi di cui uno, detto di geometria descrittiva, nel biennio della Facoltà di Scienze, l'altro, di applicazioni di descrittiva, nel triennio della facoltà di Ingegneria: il primo era quasi un corollario del corso di geometria analitica e proiettiva (ed era comune alla preparazione dei matematici) mentre il secondo comprendeva tutte le applicazioni dei metodi che potevano interessare gli ingegneri.

Un provvedimento ministeriale (mi pare del Ministro De Vecchi) nell'intento di alleggerire il triennio d'ingegneria sopprime il corso di applicazioni di descrittiva senza disporre in alcun modo dell'insegnamento di queste. Non si rese conto il legislatore che in questo modo si veniva a togliere il vero scopo per cui s'insegnava la geometria descrittiva (cioè i suoi metodi) agli allievi ingegneri.

Le conseguenze di quel provvedimento furono diverse nelle diverse sedi universitarie. In alcune gli insegnanti, consci del loro dovere di preparare anche i futuri ingegneri (che costituiscono almeno l'80 % degli allievi del biennio) compresero l'esposizione dei metodi portando nel corso, ridotto annuale, le applicazioni della descrittiva in relazione alle quali soltanto era giustificato insegnare quelli. Ma poichè il programma così ampliato sarebbe stato del tutto inopportuno per i matematici si riservò per questi la sola esposizione dei principali metodi (che alcuni di essi avrebbero poi dovuto insegnare in alcuni tipi di scuole e che in ogni modo giovano ad affinare l'intuizione dello spazio) e si approfittò del rimanente periodo scolastico per esporre altre nozioni più elevate tendenti a diminuire il distacco fra gli insegnamenti geometrici del primo e del secondo biennio.

Si attuò insomma, dopo i primissimi mesi del corso, uno spezzamento di esso in modo da servire i diversi gruppi di allievi obbligati a frequentarlo.

In altre sedi gli insegnanti, non richiesti dal provvedimento ministeriale, e più consci delle necessità della preparazione scientifica dei matematici che di quelle professionali dei futuri ingegneri hanno finito per orientare il corso in modo a questi inadatto.

Io credo che da questo stato di fatto nasca il disagio che oggi si lamenta e che occorre rimuovere avendo chiari i bisogni diversi dei diversi gruppi di allievi.

Sostenere — come avviene nel calore della polemica — che si possa fare a meno dell'insegnamento della descrittiva, o che si possa ridurre ad un semestre (trimestre effettivo), per gli allievi ingegneri mi pare una confessione d'ignoranza delle necessità della tecnica (si vedano nel volume dell'Hohenberg dichiarazioni di tecnici illustri). Al contrario esso deve integrarsi in modo da includersi come parte essenziale le applicazioni più moderne.

Ma proprio per questo sono pienamente d'avviso che questo insegnamento debba essere adeguato alle necessità degli ingegneri (cosa che di fatto spesso non è) rimanendo affidato a matematici che sono in grado, per la loro formazione, di approfondirne i principi (come avviene appunto nei maggiori politecnici stranieri). S'intende che questi matematici devono fare lo sforzo di adeguarsi a quelle necessità (anche se lontane

dalle loro preferenze scientifiche): e a questo riguardo il volume dell'Hohenberg può fornire un ottimo modello e una ricca raccolta di materiale. Di più le indicazioni bibliografiche, fino a tutto il 1955, provano che anche in questo campo sono possibili ricerche scientifiche che possono essere di allettamento al matematico.

ENRICO BOMPIANI

Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band I, Arithmetik. Pagg. XII + 403. Comitato di redazione: P. S. Alexandroff, A. I. Markuschewitsch, A. J. Chintschin. Traduzione dal russo di: H. Limberg, K. H. Rupp, G. Tesch. Stesura definitiva del testo tedesco e redazione scientifica di G. Asser. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954. Inserito nella collezione, «Hochschulbücher für Mathematik», di cui costituisce il volume 7°.

Si tratta del primo volume di un'opera, prevista complessivamente in sette volumi, destinata agli insegnanti di matematica delle scuole medie e agli studenti delle facoltà di fisica matematica, orientate alla formazione di insegnanti medi, della U.R.S.S.

Questo primo volume è diviso in quattro parti.

La prima parte, di I. G. Baschmakowa e A. P. Juschkewitsch, è dedicata allo studio delle origini e dello sviluppo storico dei sistemi di rappresentazione dei numeri. Dopo una breve introduzione, nella quale sono richiamati alcuni concetti e alcune distinzioni fondamentali (sistemi decimali e non decimali, posizionali e non posizionali, ecc.), si entra nel vivo dell'argomento con un primo paragrafo destinato a considerazioni di carattere filosofico, filologico e archeologico sull'origine e sullo sviluppo del concetto di numero presso gli uomini primitivi. Segue un paragrafo sui sistemi di numerazione non posizionali ed un altro più specificamente dedicato ai sistemi alfabetici. Il quarto paragrafo è destinato ai sistemi posizionali, il quinto più particolarmente alla diffusione dei sistemi di scrittura posizionali nell'Europa occidentale e in Russia. Infine un sesto paragrafo è dedicato alla rappresentazione, parlata e scritta, delle frazioni.

L'esposizione, di carattere storico-informativo e parzialmente critico è, nei limiti imposti dagli scopi e dall'estensione del lavoro, ricca di notizie, illustrate da numerose tavole di simboli numerici, in uso presso i più svariati popoli, e inquadrata in un armonico piano generale.

La seconda parte, che appare la più importante, sia per l'estensione, occupando da sola più di metà del volume, sia per la maggiore ampiezza e profondità conferita alla trattazione, ha per principale scopo di illustrare i fondamenti teorici dell'aritmetica, e vuole inoltre introdurre il lettore in certe idee e concetti fondamentali della matematica moderna.

Questa seconda parte è divisa in sette capitoli.

Nel primo sono esposte notizie generali sugli insiemi. I principali argomenti trattati sono successivamente: concetto di insieme, algebra degli insiemi, funzioni, corrispondenza di insiemi e potenza di un insieme; insiemi finiti e infiniti, insiemi ordinati, similitudine di insiemi ordinati.

Nel secondo capitolo si danno definizioni e si illustrano proprietà generali relative ai concetti di gruppo, anello (commutativo) e corpo (commutativo). Dopo una breve digressione filosofica sulla costruzione assiomatica della matematica si entra a parlare degli isomorfismi e infine di anelli e corpi ordinati.

Il terzo capitolo è dedicato alla costruzione assiomatica della teoria dei numeri naturali nella quale l'autore segue molto da vicino il metodo del Peano. Definisce per induzione la somma e il prodotto e ne stabilisce le proprietà formali, studia le proprietà di ordine dei numeri naturali e le proprietà delle operazioni inverse, sottrazione e divisione. Il capitolo si chiude con una serie di osservazioni sulla compatibilità, completezza e indipendenza di questo e dei sistemi assiomatici in generale.

Il capitolo quarto è dedicato allo studio dell'anello dei numeri interi, definito come un minimo anello che contiene l'insieme dei numeri naturali. La trattazione è minuziosamente condotta e giunge a stabilire tutte le principali proprietà di tale anello, ed in primo luogo la unicità (a meno naturalmente di isomorfismi). La presentazione dei numeri interi è fatta, dopo una breve introduzione storica, attraverso la teoria delle coppie di numeri naturali, secondo il ben noto schema, premesse le necessarie precisazioni sulle coppie equivalenti.

Nel capitolo quinto si tratta del corpo dei numeri razionali definito come un minimo corpo che contiene l'anello degli interi.

Anche i numeri razionali sono presentati attraverso la teoria delle coppie. La trattazione, anche qui molto diffusa, conduce l'autore a stabilire tutte le più importanti proprietà di questo anello, tra cui fondamentale anche qui l'unicità, la unica ordinabilità, e la sua caratterizzazione come minimo corpo di caratteristica O .

Il sesto capitolo, dopo una necessaria premessa sui corpi continui (completi e archimedei) introduce il corpo dei numeri reali definito come un corpo continuo che contiene il corpo dei numeri razionali. Dopo averne dimostrata l'unicità, l'autore presenta tale corpo, seguendo Cantor, come insieme di successioni fondamentali di numeri razionali e si diffonde a lungo a studiarne le proprietà; in particolare ne dà una caratterizzazione attraverso un gruppo di dodici postulati, di cui gli ultimi due (atti a garantire la continuità) possono essere sostituiti dal postulato di Dedekind o da quello della compattezza locale.

Il settimo capitolo è dedicato al corpo dei numeri complessi definito come un corpo minimo che contiene quello dei numeri reali e un elemento i tale che $i^2 = -1$. Anche questo corpo risulta univocamente definito e l'autore si diffonde a studiare le proprietà, chiudendo poi il capitolo con brevi notizie su numeri ipercomplessi e quaternioni.

L'elenco bibliografico posto alla fine elenca quarantatre opere di lingua russa o tedesca.

In complesso questa seconda parte si presenta come una compatta esposizione, condotta con notevole chiarezza su un felice disegno e generalmente completa anche nei dettagli dimostrativi.

La terza parte, dovuta ad A. J. Chintschin, tratta gli elementi della teoria dei numeri ed è divisa in sei capitoli.

Nel primo capitolo, dopo una breve introduzione che illustra l'argomento e non manca di ricordare le buone tradizioni russe e in particolare sovietiche in questi studi, si passa alla questione della decomponibilità unica trattata attraverso l'algoritmo euclideo e poi a notizie generali sull'insieme dei numeri primi. Vi sono enunciate e illustrate, naturalmente senza dimostrazione, proposizioni anche di natura piuttosto elevata, come il classico teorema dei numeri primi.

Nel secondo capitolo sono illustrati gli aspetti essenziali della teoria delle congruenze.

Nel terzo capitolo si parla dell'algoritmo euclideo in generale e della decomponibilità unica nel dominio dei polinomi a coefficienti razionali; segue una trattazione elementare intesa ad illustrare i più noti aspetti della teoria delle frazioni continue

Il quarto capitolo è dedicato alla rappresentazione dei numeri attraverso frazioni sistematiche (frazioni k -adiche), oppure attraverso frazioni continue.

Il capitolo quinto tratta nella prima parte della approssimabilità degli irrazionali mediante le ridotte delle frazioni continue, culminando colla dimostrazione del classico teorema di Borel-Hurwitz, per passare poi nella seconda parte a più generali questioni di approssimazione diofantea, tra cui trova posto il noto teorema di Kronecker.

L'ultimo capitolo tratta dei numeri algebrici e trascendenti. Dell'esistenza di questi ultimi sono riferite le due dimostrazioni di Liouville e di Cantor; infine sono date notizie, per lo più senza dimostrazione, sulla natura aritmetica delle costanti classiche e sul settimo problema di Hilbert.

L'elenco bibliografico annovera ventitre opere, in russo o in tedesco, in parte tradotte da altre lingue.

In complesso questa terza parte, accuratamente redatta nelle linee generali come nei particolari, appare soprattutto indovinata per la scelta e l'ordinamento degli argomenti, in vista degli scopi che l'opera si propone.

L'ultima parte, dovuta a W. M. Bradis, è dedicata ai calcoli numerici (mentali o scritti o effettuati coll'aiuto di tabelle o macchine).

Divisa in tre capitoli, essa contiene, in misura maggiore e in più grande rilievo che non le altre parti, considerazioni e accenni a problemi didattici. Di tal genere appunto sono i discorsi che aprono il primo capitolo, il quale presenta poi suggerimenti ed esempi pratici per abbreviare e controllare i calcoli mentali e quelli scritti. Continua con notizie sulle più semplici macchine calcolatrici; entra poi nell'argomento dei valori approssimati e svolge considerazioni generali sulla maggiorazione degli errori e sulla valutazione dei risultati di misure.

Il secondo capitolo è dedicato alla maggiorazione dell'errore nei risultati di operazioni su valori approssimati; la trattazione è piuttosto ampia e si diffonde anche su argomenti particolari, svolgendo ad esempio considerazioni sull'errore quadratico medio o sul numero delle cifre decimali da ritenere valide nel risultato di calcoli su valori approssimati e in particolare abbreviati.

Il terzo capitolo, intitolato «questioni diverse», accenna a calcoli abbreviati, uso di tavole, di processi grafici e del regolo calcolatore, e chiude ancora con ampie considerazioni di carattere didattico.

La bibliografia elenca quaranta opere tra russe e tedesche.

In quest'ultima parte la trattazione, piana e illustrata sempre da facili esempi, in taluni argomenti particolarmente minuziosa, e le costanti preoccupazioni didattiche, rivelano una particolare aderenza agli scopi a cui l'opera è destinata.

MARCO CUGIANI

H. S. M. COXETER, *The real projective plane*, II edizione, Cambridge University Press, 1955, pp. 226 + XI, 27 sterl, 6 doll.

Il volume consiste in un agile trattato di geometria proiettiva piana nel campo reale, secondo l'indirizzo di Staudt ed Enriques. Tale indirizzo, assai familiare a tutti i matematici italiani di una certa età, i quali abbiano fatto i loro studi universitari in epoca in cui si tenevano ancora corsi di Geometria proiettiva, è invece molto meno conosciuto nel mondo anglosassone.

Come è noto, il metodo seguito nell'indirizzo in questione è puramente sintetico ed assiomatico: non si presuppone nè la geometria analitica nè quella euclidea. Gli allacciamenti con la geometria elementare sono però esposti dal Coxeter nel primo capitolo, ove viene presentato l'ampliamento del piano euclideo con l'aggiunta della retta all'infinito, e viene dimostrato che in un piano così ampliato (considerato immerso in uno spazio

a tre dimensioni) sussiste il teorema di Desargues sui triangoli omologici. Nel capitolo 2 inizia il vero e proprio sviluppo assiomatico della geometria proiettiva piana: vengono posti i postulati di appartenenza (esistenza di un punto e di una retta non incidenti, esistenza di almeno tre punti su di una retta [o postulato di Fano], esistenza ed unicità della retta incidente a due punti, dati, esistenza di un punto incidente a due rette date), cui si aggrega anche la proposizione di Desargues sui triangoli omologici (la quale, come è noto, non può dedursi dai soli postulati di appartenenza della geometria proiettiva piana, pur essendo conseguenza logica dei postulati di appartenenza della geometria proiettiva tridimensionale). Indi, provato il principio di dualità piana, si introducono i concetti di quadrangolo piano completo, di gruppo armonico, di prospettività. Il 3° capitolo è dedicato all'introduzione dei concetti di ordine e di continuità. Viene assunto come primitivo il concetto di coppie di punti che si separano sopra una punteggiata, e vengono dati i postulati relativi (adattati, come nota l'autore, da quelli dati dal Vailati) compreso quello che assicura l'invarianza del concetto di coppie che si separano rispetto alle operazioni di proiezioni e sezione. Il postulato di continuità viene presentato sotto la forma seguente: Se una corrispondenza ordinata muta un intervallo AB in un altro $A'B'$ interno al primo, esiste un punto M unito per la corrispondenza, tale che in AM non cadano altri punti uniti. Questa proposizione figura in Enriques ove però essa appare come un teorema dedotto dal postulato della continuità secondo Dedekind.

Nel capitolo 4 viene sviluppata la teoria delle proiettività tra forme di prima specie (nel piano). La proiettività vien definita, seguendo Staudt ed Enriques, come corrispondenza biunivoca che conserva i gruppi armonici. Il capitolo 5 è dedicato alle collineazioni e alle polarità nel piano. La collineazione è definita, anche qui, al modo di Staudt ed Enriques, come una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che conserva gli allineamenti, mentre in modo analogo è definita la polarità. I capitoli 6 e 7 sono dedicati alla teoria proiettiva delle coniche. Le coniche vengono introdotte come luogo dei punti autoconiugati in una polarità iperbolica. Invece, nei capitoli 8 e 9 si presentano la geometria affine e successivamente la geometria euclidea come subordinate dalla geometria proiettiva quando si fissino, nel primo caso una retta particolare del piano come retta impropria, e nel secondo una particolare involuzione ellittica sulla retta impropria come involuzione assoluta. Si noti che il concetto di area, appartenente alla geometria affine, è introdotto al suo giusto posto. Viene sviluppata, in questi capitoli, anche la teoria affine e metrica delle coniche. Il capitolo 10 è dedicato alla discussione del concetto di continuità; si mostra precisamente come, ammesso il postulato che ogni successione monotona di punti in una retta ammette un punto limite, se ne deduce il postulato della continuità sia nella forma di Dedekind che in quella usata nel cap. 3.

Il capitolo 11 è dedicato all'introduzione delle coordinate proiettive. Il metodo seguito è una modificazione di quello classico di Staudt, dovuta a O'Hara e Ward. Si introduce anzitutto un sistema di coordinate proiettive su di una conica γ , secondo un procedimento che consiste sostanzialmente nello stabilire su γ una scala armonica, giovandosi di involuzioni su γ . Si ottengono poi coordinate proiettive omogenee nel piano nel modo seguente: si fissa un triangolo fondamentale ABC , ed un punto unità P_0 , non appartenente ai lati del triangolo; dato poi un punto generico P nel piano, si considera la conica γ per A, B, C, P_0, P e si determinano le coordinate x_1, x_2, x_3 , di A, B, C nel sistema di coordinate proiettive su γ che ammetta P per punto infinito, P_0 per punto zero, e un arbitrario punto P_1 di γ per punto unità. I numeri x_1, x_2, x_3 si prendono come coordinate proiettive omogenee di P nel piano. Se si sceglie in altro modo P_1 su γ , le tre coordinate x_1, x_2, x_3 si alterano per un fattore di proporzio-

nalità. Si prova poi che ad ogni retta compete, rispetto a queste coordinate, un'equazione lineare, e si estende il sistema di coordinate anche a particolari punti del piano.

Finalmente, nell'ultimo capitolo (12) viene sviluppata la geometria analitica del piano proiettivo reale definendo punto e retta per via analitica (punto = terna di numeri reali non tutti nulli; data a meno di un fattore di proporzionalità, etc.) e ricavando come teoremi le proposizioni date come postulati nella precedente trattazione sintetica. In tal modo viene a dimostrarsi tra l'altro la compatibilità logica dei postulati della geometria proiettiva, sulla base di quella dei postulati dell'aritmetica.

La trattazione è piana, e ragionevole rigorosa. Numerosi esercizi corredano i vari capitoli, e contribuiscono a rendere il libro accessibile anche a studenti dei primi anni. Ma esso presenta interesse anche per lettori più smaliziati, soprattutto perchè dà una rapida visione della sistemazione assiomatica della geometria proiettiva piana, meno conosciuta di quella spaziale.

Vi sono ampie citazioni bibliografiche, anche se un po' troppo concentrate sugli autori aglossasoni. Tra gli italiani sono indicate solo opere di Enriques (largamente utilizzato) Cremona e Pieri. Forse però ciò dipende solo dalla scarsa diffusione della lingua italiana in Inghilterra. Infatti, sia per il volume di Cremona che per quello di Enriques, i riferimenti sono fatti ad edizioni non italiane. Dato però che abbiamo altri ottimi trattati classici di Geometria proiettiva non sarebbe stato fuor di luogo citarne qualcuno. Ci è pure sembrato strano veder affermato che il concetto di «cross», ovvero di angolo di due rette (intere) non orientate «was invented independently by R.A. Johnson in America and D. K. Picken in New Zealand». Infatti, tale concetto è usato sistematicamente nei corsi italiani di Geometria analitica (e forse anche in corsi di altre nazioni), fin da epoca anteriore a quella in cui apparvero le opere di Johnson (1929) e di Picken (1925). Tutto al più, può esser nuovo il suo uso nella geometria elementare sintetica.

GUIDO ZAPPA