Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Zappa

Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 315–318.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_315_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare.

Nota di GUIDO ZAPPA (a Firenze)

Sunto. - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè il reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito sia modulare.*

È noto che il reticolo dei sottogruppi di composizione (1) di un gruppo finito è sottomodulare, ma, in generale, non sopramodulare, e quindi non modulare (2). Recentemente [6] ho caratterizzato i gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo. In questa nota, mi occupo invece dei gruppi finiti (risolubili o no) per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare, dimostrando precisamente che, se G è un gruppo finito, condizione necessaria e sufficiente affinchè il reticolo dei sottogruppi di composizione di G sia modulare è che, in ogni catena normale di G, ogni fattoriale il cui ordine sia potenza di qualche numero primo risulti quasi-abeliano (3). Di qui deduco alcune interessanti conseguenze. Mostro che condizione sufficiente affinchè il reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito sia modulare è che i suoi sottogruppi di SYLOW siano quasi-abeliani (in particolare abeliani), e che tale condizione è anche necessaria per i gruppi che diremo «divisibili» cioè possedenti una catena principale i cui fattoriali siano isomorfi ai sottogruppi di SYLOW dei vari ordini; in particolare la suddetta condizione è necessaria (oltre che sufficiente) per i gruppi finiti supersolubili.

(1) Ricordiamo che dicesi sottogruppo di composizione di un gruppo finito G un sottogruppo di G che compaia in qualche sua serie di composizione.

(2) Per la nomenclatura usata circa i reticoli, cfr. [5].

(3) Ricordiamo che dicesi quasi-abeliano (o quasi-hamiltoniano) un gruppo nel quale due sottogruppi qualunque risultano necessariamente permutabili. Tali gruppi sono stati caratterizzati da K. IWASAWA [1].

Dato un gruppo G, indicheremo con $L(G)$ il reticolo formato da tutti i sottogruppi di G, e con $\varphi(G)$ il reticolo formato dai sottogruppi di composizione di G.

1. Dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè i sottogruppi di composizione di un gruppo G *finito formino un reticolo modulare è che in ogni catena normale di* G *tutti i fattoriali d'ordine potenza di qualche numero primo risultino quasi–abeliani.*

La condizione è necessaria. Siano M ed N due sottogruppi consecutivi in una catena normale di G. Poichè M è di composizione in G, si ha che ogni sottogruppo di composizione di M è anche di composizione per G, e viceversa, ogni sottogruppo di composizione di G contenuto in M è sottogruppo di composizione di M: quindi se $\varphi(G)$ è modulare, anche $\varphi(M)$ lo è. Di conseguenza anche i sottogruppi di composizione di M contenenti N formano un reticolo modulare; e poichè tale reticolo è isomorfo a $\varphi\left(\frac{M}{N}\right)$, si ha che $\varphi\left(\frac{M}{N}\right)$ deve essere modulare. Se $\frac{M}{N}$ è speciale. o in particolare un p–gruppo, ogni sottogruppo di $\frac{M}{N}$ è di composizione. onde $\varphi\left(\frac{M}{N}\right)$ coincide con $L\left(\frac{M}{N}\right)$. E poichè [1] i soli gruppi speciali per cui il reticolo dei sottogruppi è modulare sono i gruppi quasi–abeliani, resta provato che la condizione è necessaria.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. Poichè. qualunque sia G, $\varphi(G)$ è sempre sottomodulare, basterà mostrare che esso è sopramodulare. cioè che se A e B son due elementi di $\varphi(G)$ che coprano uno stesso elemento R, l'unione $A \cup B$ copre sia A che B. Orbene, si ha $R = A \cap B$ ed inoltre R, quale sottogruppo di composizione di G contenuto in A, appartiene anche a $\varphi(A)$. Poichè non esistono, per ipotesi, elementi di $\varphi(G)$ diversi da A ed R, che siano contenuti in A e contengano R, si ha che non esistono, all'infuori di A ed R, elementi di $\varphi(A)$ che contengono R, onde R risulta normale in A. Analogamente, R è normale in B, e quindi anche in $A \cup B = U$. Inoltre, $\frac{A}{R}$ e $\frac{B}{R}$ non contengono sottogruppi di composizione propri, e quindi neanche sottogruppi normali propri, onde sono semplici, vale a dire o d'ordine primo o semplici non abeliani.

Posto $\frac{A}{R} = \bar{A}$, $\frac{B}{R} = \bar{B}$, $\frac{U}{R} = \bar{U}$, basterà provare che, entro $\varphi(\bar{U})$, $\bar{U}$ copre sia $\bar{A}$ che $\bar{B}$, perchè ogni sottogruppo di composizione di G contenuto in U e contenente A (o B) è anche sottogruppo di composizione di U, e quindi dà luogo. nell' omomorfismo di U su $\bar{U}$. ad un sottogruppo di composizione di $\bar{U}$ contenente $\bar{A}$ (o $\bar{B}$). Sono ora da distinguersi tre casi:

a) Uno almeno dei sottogruppi $\bar{A}$ e $\bar{B}$ (p. es., $\bar{A}$) è semplice non abeliano.

Allora $\bar{A}$ è perfetto (cioè coincide col proprio derivato) e $\bar{A} \cap \bar{B}$. coincidendo con l' unità, è risolubile; pertanto, pel teorema n. 24 del lavoro [3] di Wielandt, $\bar{A}$ è normale in $\bar{U} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Quindi $\frac{\bar{A}}{\bar{U}}$ è isomorfo a $\bar{B}$, vale a dire semplice, onde non esistono sottogruppi di composizione propri di $\bar{U}$ contenenti propriamente $\bar{A}$, vale a dire, in $\varphi(\bar{U})$, $\bar{U}$ copre $\bar{A}$. Deve inoltre $\bar{U}$ coprire $\bar{B}$ perchè, se esistesse un sottogruppo di composizione proprio $\bar{X}$ di $\bar{U}$, contenente propriamente $\bar{B}$, $\bar{X} \cap \bar{A}$ sarebbe di composizione per $\bar{A}$, non coinciderebbe con $\bar{A}$ (perchè $\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{U}$, e non $= \bar{X}$) e non si ridurrebbe all' unità, perchè, indicando con $o(H)$ l' ordine di un gruppo H, si ha $o(\bar{A} \cap \bar{X}) = [o(\bar{A}) \cdot o(\bar{X})] : o(\bar{U}) > [o(\bar{A}) \cdot o(\bar{B})] : o(\bar{U}) = o(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1$, contro l' ipotesi che $\bar{A}$ copra l' unità in $\varphi(\bar{U})$.

b) I sottogruppi $\bar{A}$ e $\bar{B}$ hanno ordini primi distinti p e q.

Allora per il teorema (19) di Wielandt [3] $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono permutabili elemento per elemento, e pertanto $\bar{A} \cup \bar{B}$ ha ordine pq, e copre (in $L(\bar{U})$, e quindi anche) in $\varphi(\bar{U})$, sia $\bar{A}$ che $\bar{B}$.

c) I sottogruppi $\bar{A}$ e $\bar{B}$ hanno lo stesso ordine, dato da un numero primo p.

Allora, pel teorema (10) di Wielandt [3], $\bar{U} = \bar{A} \cup \bar{B}$ è anch' esso un p-gruppo. E poichè U è di composizione per G, ed R è normale in U, esiste una catena normale di G per cui U ed R sono sottogruppi consecutivi. Ne segue che $\bar{U} = \frac{U}{R}$, essendo un p-gruppo, è per ipotesi quasi abeliano, onde $L(\bar{U})$ è modulare, e tale è quindi $\varphi(\bar{U})$, perchè, essendo $\bar{U}$ un p-gruppo, $L(\bar{U}) = \varphi(\bar{U})$. Di conseguenza, poiche $\bar{A}$ e $\bar{B}$ coprono la loro intersezione (cioè l' unità), $\bar{U} = \bar{A} \cup \bar{B}$ deve coprire $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Il teorema è quindi provato.

2. Notiamo ora che, se G è un gruppo a sottogruppi di Sylow quasi-abeliani, necessariamente $\varphi(G)$ è modulare. Infatti se M ed N sono elementi consecutivi di una catena normale tali che $\frac{M}{N}$ sia un p-gruppo, si ha che anche ogni sottogruppo di Sylow di M è quasi abeliano, e tale è anche ogni sottogruppo di Sylow di

$\frac{M}{N}$ (perchè, se un gruppo ha i sottogruppi di SYLOW quasi-abeliani, della stessa proprietà gode ogni suo sottogruppo e ogni suo fattoriale); e poichè $\frac{M}{N}$ è un p-gruppo, $\frac{M}{N}$ è esso stesso quasi-abeliano. Si ottiene pertanto, in base al teorema del n. 1, che:

Condizione sufficiente perchè un gruppo finito G *sia tale che* φ(G) *sia modulare è che ogni sottogruppo di Sylow di* G *sia quasi-abeliano.*

Diremo ora «divisibile» un gruppo finito G, d'ordine $p^\alpha q^\beta \ldots r^\gamma$ ($p, q, \ldots r$ numeri primi distinti). quando possiede una catena principale i cui fattoriali, presi in un ordine conveniente, abbiano rispettivamente ordini $p^\alpha, q^\beta, \ldots, r^\gamma$ (e siano pertanto isomorfi ai sottogruppi di SYLOW di G).

La condizione sufficiente data ultimamente è anche necessaria quando G è divisibile. Infatti, in tal caso, esiste, per definizione, una catena principale (quindi anche normale), i cui fattoriali siano isomorfi ai sottogruppi di SYLOW di G. Se G è quasi-abeliano, i suddetti fattoriali, essendo dei p-gruppi, devono (n. 1), essere quasi-abeliani, e tali sono allora anche i sottogruppi di SYLOW di G, perchè ad essi isomorfi. Pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito divisibile G *sia modulare è che ogni sottogruppo di Sylow di* G *sia quasi-abeliano.*

Infine, poichè ogni gruppo finito supersolubile è divisibile (ZAPPA [4], ORE [2]) si ha che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito supersolubile G *sia modulare è che ogni sottogruppo di Sylow di* G *sia quasi-abeliano.*

BIBLIOGRAFIA

[1] K. IWASAWA, *Ueber die Gruppen und die Verbaende ihrer Untergruppen*, «J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo», Sec. I, IV-3, (1941), pp. 171-199.

[2] O. ORE, *Contributions to the theory of groups of finite orders*, «Duke Math. J.», 5, (1939), pp. 431-460.

[3] H. WIELANDT, *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*, «Math. Zeit», 45, (1939), pp. 345-371.

[4] G. ZAPPA, *Sui gruppi supersolubili*, «Rend. Sem. Mat. Roma», 2, (1938), pp. 323-330.

[5] G. ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite*, (Lezioni raccolte da G. ZACHER), Ed. Liguori, Napoli, 1952, (litografie).

[6] G. ZAPPA, *Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo*, «Boll. U. M. I.» 11, (1956), pp. 150-157.