BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Wolfgang Gröbner

Sopra lo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 319–327.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_319_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Sopra lo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche.

Nota di Wolfgang Gröbner (a Innsbruck) (*)

Sunto. - *Si espone un tipo generale di trasformazioni birazionali chi possono servire per sciogliere le singolarità delle varietà algebriche. Se dimostra che si può sempre scegliere la trasformazione in maniera che sparisca una determinata singolarità, e ciò senza introdurre altrove nuove singolarità. Però rimangono le singolarità « infinitamente vicine » alla singolarità sciolta. Valendosi ora dell' ipotesi, ben nota nel caso delle curve, che nei contorni successivi di una singolarità (non immersa in un' altra) non possono susseguirsi infinite nuove singolarità, si conclude, che qualunque varietà algebrica irriducibile può trasformarsi birazionalmente, mediante una successione finita di trasformazioni del tipo descritto, in una varietà priva di singolarità.*

1. Trasformazioni birazionali in generale.

Una varietà algebrica irriducibile V di dimensione d, immersa in uno spazio proiettivo S_m di coordinate omogenee $x_0, x_1, \dots, x_m$, può considerarsi definita (¹) mediante un ideale primo omogeneo (H-ideale):

$$\mathfrak{p}_x = (f_1, f_2, \dots, f_r) \tag{1}$$

dell' anello omogeneo $K[x_0, x_1, \dots, x_m]$ sopra il corpo K dei numeri complessi (²). L' ideale $\mathfrak{p}_x$ è l' insieme di tutte le forme $f(x_0, \dots, x_m)$ del detto anello che si annullano in tutti i punti di V.

Una trasformazione razionale della V è definita mediante una

(*) Conferenza tenuta presso l' Istituto di Geometria « Luigi Cremona » dell' Università di Bologna, il 4 maggio 1956.

(¹) In quanto alle nozioni della teoria degli ideali e della loro applicazione alla geometria algebrica vedi: W. Gröbner, *Moderne algebraische Geometrie*, Springer-Verlag, Wien, 1949.

(²) Una parte notevole dei seguenti risultati vale per un corpo K arbitrario, anche non chiuso algebricamente, e di caratteristica p.

sostituzione

$$(2) \qquad y_i = \varphi_i(x), \qquad \begin{array}{r} i = 0, 1, \dots, n \\ \varphi_i(x) \in K[x_0, \dots, x_m] \end{array}$$

con forme omogenee $\varphi_i(x)$, tutte dello stesso grado μ; se il punto $\{x_0, \dots, x_m\}$ descrive la varietà V, il punto corrispondente $\{y_0, \dots, y_n\}$ è univocamente determinato (in generale), e descrive una varietà algebrica V^*, immersa in uno spazio proiettivo S_n di coordinate omogenee $y_0, y_1, \dots, y_n$ definita mediante un ideale $\mathfrak{p}_y$ dell'anello omogeneo $K[y_0, y_1, \dots y_n]$; $\mathfrak{p}_y$ contiene tutte le forme $f(y_0, \dots y_n)$ che, fatta la sostituzione (2), risultano contenute in $\mathfrak{p}_x$ (3). $\mathfrak{p}_y$ si chiama il trasformato razionale, secondo la trasformazione (2), di $\mathfrak{p}_x$.

La trasformazione (2) è razionale, e quindi univoca nel senso $\mathfrak{p}_x \rightarrow \mathfrak{p}_y$, però, in generale, questo non vale nel senso inverso. Affinchè lo stesso sia vero anche nel senso inverso, occorre che esista una trasformazione inversa della (2):

$$(3) \qquad x_j = \psi_j(y), \qquad \begin{array}{r} j = 0, 1, \dots, m \\ \psi_j(y) \in K[y_0, \dots, y_n] \end{array}$$

che trasforma razionalmente l'ideale $\mathfrak{p}_y$ in $\mathfrak{p}_x$ nel senso sopraddetto. Allora devono valere le relazioni:

$$(4) \qquad \begin{array}{l} \psi_j(\varphi(x)) \equiv x_j M(x) \pmod{\mathfrak{p}_x} \text{ con } M(x) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_x},\ j = 0, 1, \dots, m; \\ \varphi_i(\psi(y)) \equiv y_i N(y) \pmod{\mathfrak{p}_y} \text{ con } N(y) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_y},\ i = 0, 1, \dots, n. \end{array}$$

Allora le due varietà V e V^*, associate rispettivamente agli H-ideali $\mathfrak{p}_x$ e $\mathfrak{p}_y$, sono birazionalmente equivalenti; si vede facilmente che i rispettivi corpi di funzioni algebriche sono isomorfi. Si dimostra inoltre che le trasformazioni (2) e (3) sono biregolari, cioè univoche ed analitiche in tutti e due i sensi, in ogni punto $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ di V con $M(\xi) \neq 0$, e in ogni punto $\{\eta_0, \dots, \eta_n\}$ di V^* con $N(\eta) \neq 0$.

Può darsi, e ne vedremo subito esempi, che esistano più trasformazioni inverse di una stessa (2); allora ne risultano più forme $M_1(x), M_2(x), \dots$, e allora la trasformazione (2) è biregolare in ogni punto $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ in cui una almeno delle forme $M_1(x)$, $M_2(x), \dots$, non è nulla.

(3) Le relative dimostrazioni si trovano nella mia Nota: *Die birationalen Transformationen der Polynomideale*, « Monatshefte f. Math », Wien, **58**, (1954), 266-286.

2. Studio di un tipo speciale di trasformazioni birazionali.

Sia data una varietà V dello S_m costituita di una o più varietà algebriche irriducibili di dimensione $\leq m-2$ e definita mediante un ideale omogeneo

$$\mathfrak{p}_x = (p_1, p_2, \dots, p_s), \qquad \begin{array}{r} p_j(x) \in K[x_0, \dots, x_m], \\ j = 1, \dots, s;\ s \geq 2. \end{array} \tag{5}$$

Si può supporre che tutte le forme $p_j(x)$ siano dello stesso grado μ, e che l'ideale $\mathfrak{d}_x$, generato dalle $p_j(x)$, contenga qualunque forma $p(x)$ di grado $\geqq \mu$ che si annulla sulla V.

Allora consideriamo la trasformazione birazionale

$$y_{ij} = x_i p_j(x), \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, s \end{array} \tag{6}$$

che trasforma birazionalmente lo zero-ideale di $K[x_0, \dots, x_m]$, cioè lo spazio S_m, in un ideale primo $\mathfrak{v}_y$ di dimensione m dell'anello $K[\dots, y_{ij}, \dots]$, che rappresenta una varietà algebrica irriducibile $V(\mathfrak{v}_y)$. immersa in uno spazio proiettivo S_N, con $N = s(m+1) - 1$, di coordinate omogenee y_{ij} [4]. L'ideale $\mathfrak{v}_y$ contiene, fra le altre, tutte le forme

$$y_{ij} y_{kl} - y_{il} y_{kj}, \quad y_{ij} p_\sigma(y_{kl}) - y_{i\sigma} p_j(y_{kl}) \qquad \begin{array}{l} i, k = 0, 1, \dots, m \\ j, \sigma, l = 1, 2, \dots, s. \end{array} \tag{7}$$

Il fatto che la trasformazione $S_m \longleftrightarrow V(\mathfrak{v}_y)$ sia birazionale, si vede subito scrivendo le trasformazioni inverse nel seguente schema:

$$\begin{array}{l|l|c|l}
x_0 = y_{01} & x_0 = y_{02} & \dots\dots & x_0 = y_{0s} \\
x_1 = y_{11} & x_1 = y_{12} & \dots\dots & x_1 = y_{1s} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\
x_m = y_{m1} & x_m = y_{m2} & \dots\dots & x_m = y_{ms} \\
\hline
M(x) = p_1(x) & M(x) = p_2(x) & \dots\dots & M(x) = p_s(x) \\
N(y) = p_1(y_{k1}) & N(y) = p_2(y_{k2}) & \dots\dots & N(y) = p_s(y_{ks}).
\end{array} \tag{8}$$

Una qualsiasi delle s colonne rappresenta la trasformazione inversa della (6). Con $M(x)$ e $N(y)$ si indicano le forme introdotte nelle (4). Da ciò si conclude inoltre che la trasformazione (6) che muta lo S_m nella varietà $V(\mathfrak{v}_y)$ è biregolare, quindi biunivoca e continua in tutti i due sensi, in qualunque punto $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ dello

[4] Un tipo simile di trasformazioni è stato considerato da O. Zariski: *Foundations of a general theory of birational correspondences*, « Trans Amer. Math. Soc. », **53**, (1943), 490-542; 11. *Monoidal transformations.*

S_m in cui non sono nulle simultaneamente tutte le forme $p_1(x)$, $p_2(x), \dots, p_s(x)$, e cioè biregolare in tutto lo spazio S_m, fatta eccezione dei soli punti della varietà « eccezionale » $V(\mathbf{d}_x)$, definita dalla (5).

Osserviamo inoltre che i punti della varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_x)$, non possiedono punti corrispondenti nella trasformazione (6) perchè in essi tutte le coordinate (omogenee) y_{ij} risultano nulle; ciò significa che tali punti spariscono totalmente nella trasformazione (6). Però inversamente, per le (8), a qualunque punto della varietà $V(\mathbf{v}_y)$ dello S_N, senza alcuna eccezione, corrisponde un punto ben determinato dello S_m. Perchè. trattandosi di un punto della $V(\mathbf{v}_y)$, le sue coordinate annullano le espressioni (7), e quindi una qualunque colonna della (8), che non sia composta di soli zeri, determinata univocamente le coordinate $x_0, \dots, x_m$ del punto corrispondente nello S_m.

La trasformazione $V(\mathbf{v}_y) \rightarrow S_m$ è biunivoca su tutta la varietà $V(\mathbf{v}_y)$ dello S_N, eccetto i punti in cui si annullano simultaneamente tutte le forme $p_1(y_{i1}), p_2(y_{i2}), \dots, p_s(y_{is})$. Questi punti eccezionali sulla $V(\mathbf{v}_y)$ sono gli zeri dell' ideale

$$\mathbf{d}_y = (\mathbf{v}_y,\ p_1(y_{i1}),\ p_2(y_{i2}), \dots,\ p_s(y_{is})). \tag{9}$$

Tutti i punti $\{\dots, \eta_{ij}, \dots\}$ della $V(\mathbf{v}_y)$ a cui corrisponde mediante le (8) un punto dato $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ della varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_x)$ dello S_m, hanno le coordinate

$$\eta_{ij} = \xi_i \rho_j, \qquad \begin{matrix} i = 0,\ 1, \dots, m \\ j = 1,\ 2, \dots, s \end{matrix} \tag{10}$$

dove i ρ_i hanno valori non tutti nulli dei quali una parte può essere scelta ad arbitrio.

Vogliamo dimostrare il teorema:

I punti eccezionali sulla varietà $\mathrm{V}(\mathbf{v}_y)$, *cioè gli zeri dell' ideale* $\mathbf{d}_y$, *corrispondono biunivocamente agli spazi tangenti* $(\mathrm{T}_{\xi\eta})$ *alla* $\mathrm{V}(\mathbf{d}_x)$.

Consideriamo all' uopo un punto $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ della varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_x)$, che sia un punto non singolare di una componente irriducibile della varietà $V(\mathbf{d}_x)$ di dimensione $\delta = m - \sigma$ (essendo $2 \leq \sigma \leq m$, e $\sigma \leq s$). La matrice $(p'_{jk}(\xi))$, con $p'_{jk}(x) = \dfrac{\partial p_j(x)}{\partial x_k}$, ha la caratteristica σ, e perciò le equazioni lineari

$$\Sigma\, p'_{jk}(\xi) x_k = 0, \qquad \begin{matrix} j = 1, \dots, s \\ k = 0, \dots, m \end{matrix} \qquad (T_\xi) \tag{11}$$

σ delle quali sono indipendenti, determinano lo spazio tangente (T_ξ) di dimensione δ alla varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_x)$ nel punto $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$.

Scegliamo ora un altro spazio lineare (T_η) di dimensione $\sigma - 1$, contenuto in S_m e sghembo a (T_ξ), in modo cioè che (T_ξ) e (T_η) non abbiano alcun punto comune. Denotiamo con $(T_{\xi\eta})$ lo spazio lineare di dimensione $\delta + 1$, che contiene (T_ξ) e il punto $\{\eta_0, \dots, \eta_m\}$ di (T_η).

Allora i punti $\{\xi_0 + \varepsilon\eta_0, \ \xi_1 + \varepsilon\eta_1, \dots, \ \xi_m + \varepsilon\eta_m\}$ per $|\varepsilon|$ abbastanza piccolo e $\varepsilon \neq 0$ sono punti di $(T_{\xi\eta})$, non appartenenti alla varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_x)$; infatti per essere $p_j(\xi) = 0$ $(j = 1, \dots, s)$, si ha

$$p_j(\xi + \varepsilon\eta) \equiv \varepsilon \sum \eta_k p'_{jk}(\xi) \qquad (\mathrm{mod}\ \varepsilon^2),$$

e queste quantità non sono nulle perchè il punto $\{\eta_0, \dots, \eta_m\}$ non appartiene a (T_ξ).

Quindi la trasformazione (6) risulta biregolare nei punti $\{\xi_0 + \varepsilon\eta_0, \dots, \xi_m + \varepsilon\eta_m\}$; il punto corrispondente ha le coordinate:

$$\eta_{ij} = (\xi_i + \varepsilon\eta_i)p_j(\xi + \varepsilon\eta) \equiv \varepsilon\xi_i \sum \eta_k p'_{ik}(\xi) \qquad (\mathrm{mod}\ \varepsilon^2).$$

Essendo le η_{ij} coordinate omogenee si possono dividere per il fattore comune ε $(\neq 0)$, e dopo, passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ha

$$(12) \qquad \eta_{ij} = \xi_i\rho_j, \ \text{con} \ \rho_j = \sum \eta_k p'_{jk}(\xi), \qquad \begin{aligned} i, k &= 0, 1, \dots, m \\ j &= 1, 2, \dots, s; \end{aligned}$$

queste sono, evidentemente, le coordinate di un punto della varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_y)$: difatti tale punto appartiene alla $V(\mathbf{v}_y)$ perchè esso è limite di punti della stessa varietà, ed esso è eccezionale perchè è eccezionale il punto $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$.

Se al posto di $\{\eta\}$ prendiamo un punto qualsiasi dello spazio tangente $(T_{\xi\eta})$, non appartenente a (T_ξ), cioè un punto $\{\xi^* + \lambda\eta\}$, con $\lambda \neq 0$, $\{\xi^*\} \in (T_\xi)$, ricaviamo nella medesima maniera

$$(12') \qquad \eta_{ij}^* = \xi_i\rho_j^*, \ \text{con} \ \rho_j^* = \sum (\xi_k^* + \lambda\eta_k)p'_{jk}(\xi) = \lambda \sum \eta_k p'_{jk}(\xi) = \lambda\rho_j;$$

le coordinate η_{ij}^* differiscono dalle η_{ij} per un fattore comune $\lambda \neq 0$, e quindi rappresentano lo stesso punto.

Con ciò concludiamo: *ad ogni spazio tangente* $(\mathrm{T}_{\xi\eta})$ *corrisponde univocamente un punto eccezionale della* $\mathrm{V}(\mathbf{v}_y)$ *con le coordinate* (12).

Ma vale anche il reciproco. Per farlo vedere in modo più semplice poniamo, mediante una trasformazione lineare, il punto eccezionale $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ nell'origine, supponiamo cioè che si abbia $\{\xi_0, \ \xi_1, \dots, \ \xi_m\} = \{1, \ 0, \dots, \ 0\}$. Allora un punto eccezionale della $V(\mathbf{v}_y)$, legato ad esso, ha tutte le coordìnate η_{ij} nulle, eccetto $\eta_{0j} = \rho_j$. Vediamo a quali condizioni le ρ_j devono ancora soddisfare affinchè il punto $\{\dots, \eta_{ij}, \dots\}$ appartenga alla $V(\mathbf{v}_y)$.

Giacchè il punto $\{1, 0, \dots, 0\}$ è un punto non singolare di una componente irriducibile (non immersa) di dimensione $\delta = m - \sigma$ di $V(\mathbf{d}_x)$, possiamo supporre che le forme $p_j(x)$, generatrici dell'ideale $\mathbf{d}_x$, dopo aver posto $x_0 = 1$, siano del tipo:

$$(13)\qquad \begin{aligned} p_1(x)_{(x_0=1)} &= x_1 + \dots \\ p_2(x)_{(x_0=1)} &= x_2 + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_\sigma(x)_{(x_0=1)} &= x_\sigma + \dots \\ p_j(x)_{(x_0=1)} &= 0 \ + \dots \qquad\qquad j = \sigma + 1, \dots, s \end{aligned}$$

dove i punti significano termini di grado ≥ 2. Inoltre essendo $(p_1, \dots, p_\sigma) = [\mathbf{d}_x, \mathbf{q}]$, ove $\mathbf{q}$ è un ideale che non si annulla in $\{1, 0, \dots, 0\}$, si conclude che esistono le relazioni identiche:

$$(14)\qquad q_j p_j = q_{j1} p_1 + \dots + q_{j\sigma} p_\sigma, \qquad j = \sigma + 1, \dots, s$$

con forme q_j, q_{jk} di grado $\nu_j \geqq 1$, per cui vale

$$(15)\qquad \begin{aligned} q_j(1, 0, \dots, 0) &\neq 0, \qquad & j &= \sigma + 1, \dots, s. \\ q_{jk}(1, 0, \dots, 0) &= 0, & k &= 1, \dots, \sigma. \end{aligned}$$

Da ciò risulta che le forme q_j contengono il monomio $x_0^{\nu_j}$, mentre le q_{jk} non lo contengono. Moltiplichiamo ora l'identità (14) per $p_j^{\nu_j - 1}$, e tenendo conto della (6), trascriviamola in una forma $f_j(\dots, y_{ij}, \dots)$ appartenente all'ideale $\mathbf{v}_y$; tale forma contiene il monomio $y_{0j}^{\nu_j}$ mentre tutti gli altri monomi in essa contenuti sono prodotti di y_{ij} diverse, delle quali una almeno ha il primo indice $i \neq 0$. Ma le coordinate η_{ij} del punto sopra considerato devono soddisfare alle condizioni $f_j(\dots, \eta_{ij}, \dots) = 0$, ed essendo $\eta_{ij} = 0$ per $i \neq 0$, ne segue $\eta_{0j} = \rho_j = 0$ per $j = \sigma + 1, \dots, s$.

Però $\rho_1, \dots, \rho_\sigma$ sono arbitrari come segue dal fatto che le forme $p_1(x), \dots, p_\sigma(x)$ sono algebricamente (e anche analiticamente) indipendenti. Ma si verifica anche direttamente che il punto corrispondente a $\{1, \varepsilon\rho_1, \dots, \varepsilon\rho_\sigma, 0, \dots, 0\}$ di S_m per $\varepsilon \to 0$ è il punto che ha le coordinate $\eta_{0j} = \rho_j$ $(j = 1, \dots, \sigma)$ e tutte le altre $\eta_{ij} = 0$.

Dalle (13) segue ancora

$$(16)\qquad p'_{jk}(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ per } j = k = 1, \dots, \sigma \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Lo spazio tangente (T_ξ) secondo le (11) è:

$$(T_\xi):\qquad x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots,\ x_\sigma = 0,$$

e possiamo scegliere

$$(T_\eta): \qquad x_0 = 0,\ x_{\sigma+1} = 0, \dots,\ x_m = 0.$$

Al punto eccezionale della $V(\mathbf{v}_y)$ con le coordinate $\eta_{0j} = \rho_j$ ($j = 1, \dots, \sigma$) e tutte le altre $\eta_{ij} = 0$, corrisponde dunque univocamente lo spazio tangente $(T_{\xi\eta})$, determinato dal punto $\{\xi\} = \{1, 0, \dots, 0\}$ della varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_x)$ e dal punto $\{0, \rho_1, \dots, \rho_\sigma, 0, \dots, 0\}$ di (T_η). Con ciò il nostro teorema è completamente dimostrato.

Possiamo aggiungere che *un punto eccezionale della* $\mathrm{V}(\mathbf{v}_\mathrm{y})$ *al quale corrisponde un punto non singolare della varietà* $\mathrm{V}(\mathbf{d}_\mathrm{x})$ *è un punto non singolare della varietà* $\mathrm{V}(\mathbf{v}_\mathrm{y})$.

Difatti il punto sopra specificato $\{\dots, \eta_{ij}, \dots\}$ è non singolare per la varietà $V(\mathbf{v}_y)$ perchè il suo intorno è formato dai punti corrispondenti ai punti $\{\xi_0^* + \varepsilon\eta_0^*, \dots, \xi_m^* + \varepsilon\eta_m^*\}$ e i loro limiti per $\varepsilon \to 0$, dove $\{\xi_0^*, \dots, \xi_m^*\}$ significa un punto di $V(\mathbf{d}_x)$ vicino al punto $\{1, 0, \dots, 0\}$, e $\{\eta_0^*, \dots, \eta_m^*\}$ un punto di (T_η) vicino a $\{0, \rho_1, \dots, \rho_\sigma, 0, \dots, 0\}$ (e perciò necessariamente $\eta_0^* = \eta_{\sigma+1}^* = \dots = \eta_m^* = 0$).

Allora dopo aver posto $\xi_0^* = 1$, le coordinate $\xi_1^*, \dots, \xi_\sigma^*$, per le ipotesi fatte, risultano funzioni algebriche univoche di $\xi_{\sigma+1}^*, \dots, \xi_m^*$, cioè di $m - \sigma$ variabili indipendenti; delle coordinate η_j^* le sole $\eta_1^*, \dots, \eta_\sigma^*$ sono variabili indipendentemente l'una dell'altra in vicinanza di $\rho_1, \dots, \rho_\sigma$; ma essendo le η_j^* coordinate omogenee, si contano solo $\sigma - 1$ variabili indipendenti. Finalmente si aggiunge la variabile ε, indipendente dalle altre. Risulta così che le coordinate η_{ij} dei punti dell'intorno considerato, quando si è fissato opportunamente il fattore di omogeneità, sono funzioni univoche e continue (anzi analitiche) di m variabili indipendenti.

Tali funzioni sono inoltre biunivoche, perchè date le coordinate η_{ij} si determinano univocamente in prima linea le quantità

$$1 : \xi_1 : \dots : \xi_m = \eta_{0j} : \eta_{1j} : \dots : \eta_{mj}, \qquad (j = 1, \dots, s).$$

Poi posto

$$\xi_{\sigma+1}^* = \xi_{\sigma+1}, \dots,\ \xi_m^* = \xi_m$$

(ricordato che vale $\eta_0^* = \eta_{\sigma+1}^* = \dots = \eta_m^* = 0$), ne derivano $\xi_1^*, \dots, \xi_\sigma^*$ come funzioni algebriche univoche delle prime; inoltre si ricava

$$\varepsilon\eta_1^* = \xi_1 - \xi_1^*, \dots,\ \varepsilon\eta_\sigma^* = \xi_\sigma - \xi_\sigma^*.$$

Se tali quantità non sono tutte nulle sono determinate $\eta_1^*, \dots, \eta_\sigma^*$ come coordinate omogenee del punto di (T_η) e ε come fattore comune di omogeneità. In tale caso il punto $\{\dots, \eta_{ij}, \dots\}$

non è eccezionale. Se però le quantità sopradette sono tutte nulle risulta $\xi_j = \xi_j^*$ $(j = 1, \ldots, m)$; allora poniamo $\varepsilon = 0$, e per soddisfare alle (12), ricaviamo $\eta_1^*, \ldots, \eta_\sigma^*$ dalle equazioni lineari

$$\Sigma\, \eta_k^* p'_{jk}(\xi^*) = \rho_j\,, \qquad j,\ k = 1, \ldots, \sigma;$$

qui significa $\rho_j = \eta_{ij} : \xi_i$ per qualsiasi $\xi_i \neq 0$; essendo il punto $|\xi^*|$ vicino al punto $|\xi|$, dalle (16) segue per il determinante

$$|p'_{jk}(\xi^*)| \neq 0.$$

Concludiamo che l'intorno di un punto eccezionale della $V(\mathbf{v}_y)$ al quale corrisponde un punto non singolare della varietà $V(\mathbf{d}_x)$, è omeomorfo all'intorno di un punto dello S_m, e quindi è costituito da una sola falda analitica, semplice, m-dimensionale. Lo stesso vale, evidentemente, per tutti i punti non eccezionali della $V(\mathbf{v}_y)$. *Questa varietà risulta priva di singolarità se tale è la varietà* $V(\mathbf{d}_x)$ *definita dall' ideale (5).*

Le circostanze nei punti eccezionali di $V(\mathbf{d}_x)$ alle quali, per le (8), corrispondono punti singolari di $V(\mathbf{d}_x)$, sono più complicate ed esigono ancora ulteriori indagini; in generale questi punti sono anche singolari per la $V(\mathbf{v}_y)$.

3. Un metodo generale per sciogliere le singolarità delle varietà algebriche.

Sia data una varietà algebrica $V(\mathbf{p}_x)$, irriducibile [5], di dimensione $d \geqq 1$, immersa nello spazio S_m, che passa più volte per la varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_x)$ considerata nel n.ro precedente, e che non abbia altre singolarità all'infuori di $V(\mathbf{d}_x)$. Allora per la trasformazione (6), (8) questa varietà sarà mutata birazionalmente in una varietà $V(\mathbf{p}_y)$ irriducibile e della stessa dimensione, contenuta nella $V(\mathbf{v}_y)$.

Tale varietà $V(\mathbf{p}_y)$ non possiede, in generale punti singolari perchè, essendo la trasformazione biregolare dappertutto eccetto sulla varietà eccezionale $V(\mathbf{d}_x)$, la $V(\mathbf{p}_y)$ non può avere acquistato punti singolari fuori di $V(\mathbf{d}_y)$, e i punti comuni a $V(\mathbf{p}_y)$ e $V(\mathbf{d}_y)$ non corrispondono a punti singolari della $V(\mathbf{p}_x)$, bensì agli spazi tangenti delle diverse falde di $V(\mathbf{p}_x)$ che passano per tali punti. I punti singolari stessi della $V(\mathbf{p}_x)$, come abbiamo visto, spariscono nella trasformazione (6).

Se la $V(\mathbf{p}_x)$ non ha singolarità complicate. cioè composte di singolarità infinitamente vicine, come sono state studiate ampiamente nel caso delle curve, la trasformata $V(\mathbf{p}_y)$ è priva di singolarità. Se però questo non si verifica allora bisogna ripetere il

[5] Si potrebbero anche includere le varietà riducibili pure.

procedimento descritto ancora una o più volte. Si è portati a credere che non sia possibile che infinite singolarità infinitamente vicine si succedano su di una stessa falda, — tale fatto è ben noto nel caso delle curve, e se non fosse vero anche per le varietà a d dimensioni, si potrebbe, probabilmente, mediante opportune intersezioni con $d-1$ forme determinare una curva con infinite singolarità successive sullo stesso ramo, il che contradirebbe al teorema noto —; allora, ammessa tale ipotesi, possiamo concludere che, dopo un numero finito di trasformazioni del tipo sopradescritto, qualsiasi varietà algebrica irriducibile sarà trasformata in una varietà priva di singolarità.

Osservazione: Speriamo di potere dare in seguito più rigorose dimostrazioni per queste considerazioni di carattere euristico. Però giova fare ancora una osservazione circa le singolarità delle singolarità. Se cioè V_d significa una varietà (irriducibile) di dimensione $d \geqq 1$, i suoi punti singolari riempiono una certa varietà subordinata V_{d_1} di dimensione $d_1 \leqq d-1$ la quale, in generale, sarà riducibile e composta di componenti di dimensioni diverse. Può anche succedere che ci siano delle singolarità immerse in altre, come per esempio un cono dello spazio ordinario con una generatrice doppia possiede questa generatrice come luogo di punti doppi, e inoltre su questa generatrice un punto, il vertice del cono, che rappresenta una singolarità speciale, immersa nell' altra.

Ebbene, la varietà V_{d_1} può avere a sua volta punti singolari, cioè punti singolari di una sua parte irriducibile, ossia punti intersezione di due o più parti irriducibili, ossia singolarità immerse del tipo sopramenzionato. Tutti questi punti singolari della V_{d_1} riempiranno una certa varietà V_{d_2} di dimensione $d_2 \leqq d_1 - 1$, della quale si potrà dire analogamente tutto quello che abbiamo detto di V_{d_1}.

In tale maniera si può determinare una successione

$$V_d,\ V_{d_1},\ V_{d_2}, \ldots,\ V_{d_s}$$

di varietà subordinate ($s \leqq d$), di dimensioni decrescenti, ognuna rappresentante le singolarità della precedente. L' ultima V_{d_s} è priva di singolarità.

Allora, quando si vuol sciogliere le singolarità della V_d conviene procedere in maniera di sciogliere prima la V_{d_s}, poi la $V_{d_{s-1}}$ ecc., in ultimo la V_{d_1}. Così le singolarità da sciogliere sono sempre a loro volta prive di singolarità immerse e non ci sarà mai difficoltà ad applicare le considerazioni fatte nel n.ro precedente, dove abbiamo dovuto supporre che il punto considerato della $V(\mathrm{d}_x)$ sia non singolare per tale varietà.