BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

HEINRICH GUGGENHEIMER

Sur la définition des genres d'une variété complexe non kählérienne.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 328–331.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_328_0>

Sur la définition des genres d'une variété complexe non kählérienne.

Nota di HEINRICH GUGGENHEIMER (a Tel Aviv)

Sunto. - *On démontre l'invariance, dans toute modification, de certains caractères de variétés complexes, qui se réduisent aux genres géométriques pour les variétés algébriques.*

1. Des recherches récentes sur les généralisations possibles du théorème de RIEMANN-ROCH ont conduit à la définition de genres pour toute variété presque-complexe [1]. Ces définitions, exprimées en termes de classes caractéristiques de certaines fibrations complexes, apparaissent comme une généralisation des définitions algébrico-géométriques de CASTELNUOVO-ENRIQUES. Pour les variétés algébriques non-singulières, un théorème de KODAIRA établit la connection, conjecturée il y a 50 ans par SEVERI, entre ces invariants et les genres introduits dans la théorie transcendante des variétés algébriques, et dont l'invariance a été montrée par KÄHLER et VAN DER WAERDEN [2] pour les variétés algébriques (classiques et abstraites).

Dans une série de mémoires précédents [3] nous avons étudié les invariants de la théorie transcendante pour les variétés kählériennes. Dans cette note, nous procédons à étudier les généralisations des genres sur les variétés non kählériennes. On ne sera pas étonné que certains invariants qui coïncident dans les cas algébrique et kählérien offrent des propriétés distinctes dans ces généralisations.

2. Sur une variété analytique complexe, toute forme différentielle extérieure φ^r de degré r se décompose de façon naturelle dans une somme de formes homogènes et dans les différentielles des coordonnées complexes (degré h) et dans les conjuguées complexes de ces différentielles (degré $r-h$):

$$\varphi^r = \sum_{h=0}^{r} \varphi_{h,\,r-h}\,.$$

Une telle forme homogène sera dite de type $(h,\ r-h)$.

De même, l'opérateur de différentiation extérieure

$$d = \Sigma\, dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge$$

se décompose, pour les coordonnées complexes x_i, dans un opérateur

$$d' = \Sigma\, dz_i \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge$$

et dans

$$d'' = \Sigma\, d\bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \wedge .$$

Comme $d'd' = d''d'' = 0$, ces deux opérateurs donnent lieux à des groupes de cohomologie $H_{d'}^{h,k}$ et $H_{d''}^{h,k}$ où l'on a par exemple

$$H_{d''}^{h,k} = \{ d''\varphi^{h,k} = 0 \} / \{ \varphi_{h,k} = d''\varphi_{h,k-1} \}$$

et, sur une variété algébrique, le rang de $H_{d''}^{r,0}$ est égal au nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes de degré r, c'est à dire au genre géométrique de degré r.

3. Appelons *modification* d'une variété complexe paracompacte V dans une sous-variété complexe analytique W une variété complexe paracompacte V' douée d'une sous-variété W' telles que $V - W$ soit en correspondance bi-univoque et complexe analytique avec $V' - W'$. Une correspondance birationelle dont les éléments fondamentaux sont non-singulières est une modification.

L'immersion de W dans V donne naissance à une suite exacte

$$\to H_{d''}^{h,k}(V) \to H_{d''}^{h,k}(W) \xrightarrow{(d'')^*} H_{d''}^{h,k+1}(V,\ W) \to$$

sur les formes indéfiniment différentiables. Le groupe relatif $H_{d''}^{h,k}(V,\ W)$ est constitué des classes de formes sur V qui s'annullent sur W. On construit l'opérateur $(d'')^*$ de façon ordinaire, en étendant une forme de W sur V, puis en appliquant d'' sur cette extension.

Pour cela, on peut utiliser un procédé uniforme, p. ex. le suivant:

Comme la sous-variété W est analytique dans V, on peut trouver, dans un voisinage (dans V) d'un point de W des coordonnées complexes admissibles ($\dim V = 2v$, $\dim W = 2w$),

$$z_1,\ \ldots,\ z_v$$

où $z_1, \ldots, z_w$ $(w < v)$ est un système de coordonnées complexes admissibles de W. A tout voisinage suffisament petit V_λ associons la fonction indéfiniment différentiable

$$h_\lambda(z_1, \ldots, \bar{z}_v) > 0, \; h_\lambda(z_1, \ldots, \bar{z}_w, 0, \ldots, 0) > 0, \; h_\lambda(z_1, \ldots, \bar{z}_v) = $$
$$= 0 \begin{cases} \sum_{i=0}^{w} |z_i| > A_\lambda \\ \sum_{i=w+1}^{w} |z_i| > \varepsilon_\lambda \end{cases}$$

et l'extension d'une forme définie sur W

$$\varphi_w(z_1, \ldots, z_w; dz_1, \ldots, dz_w, d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_u)$$

sera donnée par

$$e\varphi_w = \frac{\sum_\lambda h_\lambda(z_1, \ldots, z_v, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_v)}{\sum_\lambda h_\lambda(z_1, \ldots, z_w, 0, \ldots, 0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_w, 0, \ldots, 0)} \varphi_w$$

la somme étant prise sur l'extension à V d'un recouvrement localement fini et suffisamment fin de W. Sur une variéte W compacte, les formes d'' et φ seront déjà nulles dans un voisinage de W si l'on choisit les fonctions h_λ telles que

$$\frac{\sum h_\lambda(z_1, \ldots, \bar{z}_v)}{\sum h_\lambda(z_1, \ldots, z_w, 0, \ldots, 0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_w, 0, \ldots, 0)} = 1, \; \sum_{i=w+1}^{v} |z_i| < \varepsilon < \min \varepsilon_\lambda.$$

Il s'ensuit que le groupe $H_{d''}^{h,k}(V, W)$ est limite directe d'une suite de groupes $H_{d''}^{h,k}(V, \mathfrak{V}_\lambda)$ définie sur les formes de type (h, k) nulles dans un voisinage $\mathfrak{V}_\lambda$ de W, avec

$$W \subset \mathfrak{V}_{\lambda+\mu} \subset \mathfrak{V}_\lambda.$$

Par la définition d'une modification, on a

$$H_{d''}^{h,k}(V, \mathfrak{V}_\lambda) \cong H_{d''}^{h,k}(V', \mathfrak{V}_\lambda')$$

pour des définitions convenables de voisinages, et par conséquent, on a le

Lemme : *Dans la modification de variétés complexes paracompactes* V *et* V′ *dans des sous-variétés analytiques compactes* W *et* W′, *on a*

$$H_{d''}^{h,k}(V, W) \cong H_{d''}^{h,k}(V', W').$$

4. Comme $w < v$, $w' < v'$ $v = v'$, on a

$$H_{d''}^{v,k}(W) = H_{d''}^{v,k}(W') = 0$$

et, par la suite exacte

$$H_{d''}^{v,k}(V) \cong H_{d''}^{v,k}(V, W)$$

et

$$H_{d''}^{v,k}(V') \cong H_{d''}^{v,k}(V'.\ W')$$

donc, d'après le lemme:

THÉORÈME 1: $$H_{d''}^{v,k}(V) \cong H_{d''}^{v,k}(V') \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ v.$$

Dans le cas de variétés *compactes*, les groupes $H^{v,k}(V)$ sont à nombre fini de générateurs, soit $p_{v-k}(V)$ ce nombre. D'après un théorème de SERRE [4], on a dans ce cas un isomorphisme (non canonique)

$$H_{d''}^{v,k}(V) \cong H_{d''}^{0,v-k}(V)$$

et, par passage au complexe-conjugué

$$H_{d''}^{0,v-k}(V) \cong H_{d'}^{v-k,0}(V).$$

Il est clair que l'on pourrait obtenir les mêmes résultats à partir de la suite

$$\rightarrow H_{d'}^{k,v}(V) \rightarrow H_{d'}^{k,v}(W) \xrightarrow{(d')^*} H_{d'}^{k+1,v}(V,\ W) \rightarrow$$

Soit q_{v-k} le rang de $H_{d'}^{k,v}(V) \cong H_{d'}^{v-k,0}(V)$ pour V et V' compactes. Nous avons le

COROLLAIRE: Dans les modifications des variétés complexes *compactes*, les caractères p_k et q_k sont invariants.

5. Encore dans le cas des variétés compactes, considérons la suite exacte des groupes $H_{d'}^{h,k}$ pour la valeur $k = 0$.

Comme nous avons remarqué plus en haut, les rangs de tous ces groupes sont finis, et les $p_h(V) = \text{rang } H_{d'}^{h,0}(V)$ sont invariants dans une modification, et les rangs des groupes relatifs sont invariants d'après le lemme. Il s'ensuit

THÉORÈME 2: *Dans la modification de variétés compactes complexes en variétés compactes complexes on a*

$$\sum_{i=0}^{w}(-1)^i p_i(W) = \sum_{i=0}^{w}(-1)^i p_i(W).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Berlin 1956.

[2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Birational invariants of algebraic manifolds*, Salamanca 1943.

[3] H. GUGGENHEIMER, *Modifications of Kähler manifolds*, « Annali di Mat. », (4) 41, 1955, pp. 87-93.

[4] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité*, « Comm. math. helv », 29, 1955, pp. 9-26.