Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuliano Toraldo di Francia

Momento di quantità di moto ceduto da un'onda elettromagnetica a un picccolo ellissoide, avente conduttività unidirezionale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 332–343.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_332_0>

Momento di quantità di moto ceduto da un'onda elettromagnetica a un piccolo ellissoide, avente conduttività unidirezionale.

Nota di Giuliano Toraldo di Francia (a Firenze)

Sunto. - *(Vedi § 1).*

1. Introduzione.

È stato valutato recentemente il momento di quantità di moto che un' onda piana polarizzata circolarmente cede a un piccolo disco circolare, infinitamente sottile, capace di condurre la corrente in una sola direzione (¹). Si è trovato che, come è usuale nei problemi di diffrazione con schermi infinitamente sottili, alcune componenti del campo presentano delle singolarità all' orlo del disco. Questo fatto è stato brillantemente confermato dall' esperienza (²); infatti, quando si usi una sufficiente potenza, il disco si brucia in quei punti dell' orlo, nei quali, secondo la teoria, la forza elettrica normale alla direzione di conduzione tende più rapidamente all' infinito. Per questa e per altre ragioni, appare opportuno sostituire allo schermo infinitamente sottile un ostacolo tridimensionale privo di spigoli, anch' esso capace di condurre la corrente in una sola direzione.

In questo articolo verrà valutata la sezione efficace di assorbimento del momento di quantità di moto di un ellissoide, piccolo rispetto alla lunghezza d' onda, nel caso che la radiazione abbia polarizzazione ellittica.

All' uopo è necessario prima chiarire alcune questioni generali relative ai conduttori unidirezionali. Vengono definite le *sezioni complesse* di *scattering* e di assorbimento del momento di quantità di moto. Viene dimostrata una relazione generale che connette fra loro queste due sezioni. Viene poi premesso un lemma sull' elettrostatica dei conduttori unidirezionali.

Valutato il momento di quantità di moto assorbito dall' ellissoide, vengono trattati alcuni casi particolari, specialmente importanti per l' esperienza.

(¹) G. Toraldo di Francia, *Electromagnetic Cross Section of a Small Circular Disc with Unidirectional Conductivity*, « Nuovo Cimento », 3, 1276, (1956).

(²) L' esperienza è stata eseguita presso il Centro Microonde del Consiglio Nazionale delle Ricerche, a cura di G. Casini, e verrà descritta altrove.

2. Momento complesso della quantità di moto di un' onda con polarizzazione ellittica.

Stabiliti gli assi cartesiani ortogonali x, y, z, e i loro versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, considereremo un' onda elettromagnetica piana, rappresentata dai vettori del campo

$$\boldsymbol{E}^{\imath} = E_0(\boldsymbol{i} + ie\boldsymbol{j}) \exp(ikz), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{H}^{\imath} = \frac{1}{Z} E_0(-ie\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \exp(ikz). \tag{2}$$

Qui E_0 ed e sono costanti complesse, $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d' onde e Z l' impedenza intrinseca dello spazio. Si sottintende, come sempre nel seguito, il fattore temporale $\exp(-i\omega t)$.

L' onda si propaga nella direzione positiva dell' asse z ed ha polarizzazione ellittica. In particolare, la polarizzazione sarà lineare quando ([3]): $0 = \boldsymbol{E}^{\imath} \wedge \boldsymbol{E}^{\imath *} = -\imath(e^* + e)\boldsymbol{k}$, cioè quando $Re\, e = 0$, e sarà circolare quando: $0 = \boldsymbol{E}^{\imath} \cdot \boldsymbol{E}^{\imath} = 1 - e^2$, cioè quando $e = \pm 1$.

È noto che l' onda (1), (2) trasporta un momento intrinseco di quantità di moto (*spin*), il cui flusso può essere valutato, sia in base alla teoria generale dei campi, sia con un noto metodo formale, che si presta particolarmente al nostro scopo.

Si faccia incidere l' onda (1), (2) normalmente su uno schermo piano indefinito, avente conduttività infinita nella direzione dell' asse x e nulla in quella dell' asse y. L' onda verrà scissa in due componenti, aventi il vettore elettrico parallelo rispettivamente a x e y. La prima verrà riflessa come se lo schermo fosse un conduttore ordinario, mentre l' altra passerà indisturbata. Come è noto, la corrente indotta nello schermo dalla prima componente avrà densità superficiale $2H_y^{\imath}\boldsymbol{i}$ ed equivarrà formalmente a una densità dipolare $\boldsymbol{P} = -2H_y^{\imath}\boldsymbol{i}/i\omega$. Il campo dell' onda incidente agirà poi sui dipoli, dando luogo a un momento rispetto all' asse z, la cui media temporale, per unità di superficie, indicheremo con $\overline{m}$. Definendo il *momento complesso* m con

$$m = \frac{1}{2} \boldsymbol{P}^* \wedge \boldsymbol{E}^{\imath} \cdot \boldsymbol{k}, \tag{3}$$

è chiaro che sarà $\overline{m} = Re\, m$. Eseguito il calcolo per mezzo delle

([3]) Cfr., p. es.: G. TORALDO DI FRANCIA, *Onde Elettromagnetiche*, (Bologna, 1953), p. 143 e sg. Un asterisco indica il complesso coniugato. Sarà bene notare che, poichè nell' op. cit. il fattore temporale è $\exp(i\omega t)$, nelle relative formule cambieremo sempre $\imath$ in $-i$.

(1), (2), si trova

$$m = \frac{E_0 E_0^*}{Z\omega} e, \tag{4}$$

per cui

$$\bar{m} = \frac{E_0 E_0^*}{Z\omega} Re\, e. \tag{5}$$

Si potrebbe provare facilmente che questo valore di $\bar{m}$ è invariante rispetto a qualsiasi rotazione dello schermo attorno all' asse z. Esso viene comunemente interpretato come il momento di quantità di moto trasportato dall' onda incidente attraverso all' unità di superficie del piano xy, nell' unità di tempo. Sarà bene osservare che, invece, la parte immaginaria di m non è invariante per rotazione dello schermo. Pertanto la sua definizione è collegata alla scelta della direzione di conduttività.

Il vettore di POYNTING complesso S^ι dell' onda (1), (2) è dato da

$$S^\iota = \frac{1}{2} E^\iota \wedge H_\circ^{\iota *} = \frac{E^0 E^{0*}}{Z} \frac{1 + ee^*}{2} k \tag{6}$$

e risulta puramente reale. Dalle (5) e (6) segue

$$\frac{\bar{m}}{S^\iota} = \frac{2 Re\, e}{\omega(1 + ee^*)}. \tag{7}$$

Se a e b indicano i due semiassi dell'ellisse descritta dal vettore elettrico, è facile provare [4] che il rapporto (7) è eguale a $2ab/(a^2 + b^2)\omega$, come doveva aversi, per un noto risultato [5], [6].

3. Sezione complessa di scattering.

Si faccia incidere l' onda (1), (2) su un corpo materiale C, che occupa il volume V, tutto a distanza finita, limitato dalla superficie Σ. La conduttività di C sia infinita nella direzione parallela al versore l e sia nulla nelle direzioni ad esso perpendicolari. Orienteremo l' asse x in modo che il piano xz risulti parallelo a l e scriveremo

$$l = i \cos\theta + k \sin\theta. \tag{8}$$

(4) Si usi la formula (VII, 14) dell' op. cit. al richiamo (3).

(5) A. SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien* (Braunschweig, 1922), p. 320.

(6) J. HUMBLET, *Sur le moment d' impulsion d' une onde électromagnétique*, « Physica », 10, 585, (1943).

L' onda incidente indurrà in C una distribuzione di cariche e di correnti, che a loro volta, diverranno sorgenti di un campo secondario $\boldsymbol{E}^s$, $\boldsymbol{H}^s$ *(scattered field)*.

La densità di corrente $\boldsymbol{J}$ sarà parallela ad $\boldsymbol{l}$, per cui, scrivendo $\boldsymbol{J} = J\boldsymbol{l}$, l' equazione di continuità diverrà per la (8)

$$\frac{\partial J}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial J}{\partial z}\sin\theta = i\omega\rho, \tag{9}$$

dove ρ rappresenta la densità di carica.

Scrivendo le equazioni di MAXWELL per il campo secondario e applicando un noto procedimento [7], si trova che, definita la potenza complessa irradiata con

$$\mathrm{W} = -\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{E}^s \cdot \boldsymbol{J}^* dV, \tag{10}$$

la potenza media convogliata dal campo secondario risulta eguale a $Re\, W$. Tenendo conto del fatto che, a causa della conduttività, deve valere all' interno di C la relazione $(\boldsymbol{E}^i + \boldsymbol{E}^s)\cdot \boldsymbol{l} = 0$ e ricordando la (1) e la (8), la (10) diventa facilmente.

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2} E_0 \cos\theta \int_V J^* \exp(ikz) dV. \tag{11}$$

Definiamo ora la *sezione complessa di scattering* $s = W/S^i$, essendo S^i dato dalla (6). Allora, riflettendo che, a causa della linearità delle equazioni di MAXWELL, J risulterà proporzionale a E_0, così che si potrà scrivere

$$J = E_0 j, \tag{12}$$

si otterrà dalla (11)

$$s = \frac{Z\cos\theta}{1 + ee^*}\int_V j^* \exp(ikz) dV. \tag{13}$$

Notiamo infine che, ovviamente, l' ordinaria sezione di scattering sarà data da $\bar{s} = Re\, s$.

4. Sezione complessa di assorbimento del momento di quantità di moto.

Il momento complesso M rispetto a z, esercitato dal campo incidente sulle correnti e sulle cariche indotte in C verrà definito

[7] Vedi, p. es.: A. STRATTON, « *Electromagnetic Theory* » (New York, 1941), p. 457.

in analogia con la (3), facendo entrare nel prodotto i valori complessi coniugati delle cariche e delle correnti. Verrà poi definita la *sezione complessa di assorbimento del momento di quantità di moto* s_m con

$$s_m = \frac{M}{m}, \tag{14}$$

essendo m dato dalla (4). Allora il momento medio $\overline{M}$ esercitato dal campo incidente risulterà dato da

$$\overline{M} = Re(ms_m) = \frac{E_0 E_0^*}{Z_\omega} Re(es_m). \tag{15}$$

e, per la (5), avremo una sezione reale $\bar{s}_m$ di assorbimento di momento di quantità di moto data da $\bar{s}_m = \overline{M}/\bar{m} = Re(es_m)/Re\, e$.

Si noterà che nella definizione della sezione di assorbimento del momento di quantità di moto si è tenuto conto soltanto del momento esercitato direttamente dal campo incidente, mentre, in generale, non è da escludere che anche il campo secondario eserciti un momento sulle cariche e correnti di C. Tuttavia, si può osservare che, quando questo avviene, il campo secondario si porterà via esso stesso un momento di quantità di moto eguale ed opposto, indipendentemente da qualsiasi interferenza con l'onda incidente. Infatti, si ammetta per un momento che non esista l'onda incidente e che le correnti di C siano impresse. È evidente che, in tal caso, il momento che si esercita su C è compensato dal momento di quantità di moto trasportato dal campo irradiato. Dunque, questo momento di quantità di moto non è sottratto all'onda incidente. E per questo non ne teniamo conto nella definizione di s_m.

Ad ogni modo, è utile osservare che, quando C ammette il piano lz come piano di simmetria, come praticamente avviene sempre nelle esperienze, il momento complesso totale esercitato dal campo secondario è nullo (vedi Appendice). Pertanto, in questo caso $\overline{M}$ dato dalla (15) rappresenta proprio il momento totale cui è soggetto C, cioè quello che si può misurare direttamente con l'esperienza.

5. Un teorema sulle sezioni complesse.

Si consideri all'interno di C un volume elementare dV, contenente il punto P. Il corrispondente momento complesso dM_1 sarà espresso da

$$dM_1 = \frac{1}{2}(P - O) \wedge (\rho^* \boldsymbol{E}^i + \mu_0 \boldsymbol{J}^* \wedge \boldsymbol{H}^i) \cdot \boldsymbol{k}\ dV, \tag{16}$$

dove O rappresenta l'origine e μ_0 la permeabilità magnetica dello spazio. Sostituendo con le (1), (2), (8) e svolgendo i prodotti, si arriva a scrivere

$$dM_1 = \frac{1}{2} E_0 (\rho^* - \frac{k}{\omega} J^* \sin\theta)\,(i\,e\,x - y)\,\exp(ikz) dV. \tag{17}$$

Sostituendo poi ρ con la (9), si trova

$$dM_1 = -\frac{1}{2\omega} E_0 \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial J^*}{\partial z}\sin\theta + ikJ^*\sin\theta\right)(ex+iy)\exp(ikz) dV = \tag{18}$$
$$= -\frac{1}{2\omega} E_0 \left\{\frac{\partial}{\partial l}[J^*(ex+iy)\exp(ikz)] - eJ^*\cos\theta\exp(ikz)\right\} dV.$$

E, integrando in tutto il volume V, si ha

$$M_1 = -\frac{1}{2\omega} E_0 \int_\Sigma \boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{n}(ex+iy)\exp(ikz) d\Sigma + \tag{19}$$
$$+ \frac{e}{2\omega} E_0 \cos\theta \int_V J^* \exp(ikz) dV,$$

dove $\boldsymbol{n}$ indica la normale esterna di Σ.

Notiamo poi che su Σ apparirà una densità di carica σ data da

$$\sigma = -\frac{1}{i\omega} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{20}$$

Per conseguenza, ogni elemento di superficie $d\Sigma$ darà luogo a un momento complesso dM_2 espresso da

$$dM_2 = \frac{1}{2}(P - O) \wedge \sigma^* \boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{k} d\Sigma. \tag{21}$$

Sostituendo con le (1) e (20), sviluppando il prodotto e integrando, si giunge a

$$M_2 = \frac{1}{2\omega} E_0 \int_\Sigma \boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{n}(ex+iy)\exp(ikz) d\Sigma. \tag{22}$$

Il momento complesso totale si ottiene sommando le (19) e (22). Ricordando la (12), si ottiene così

$$M = \frac{E_0 E_0^*}{2\omega}\, e\cos\theta \int_V j^* \exp(ikz) dV. \tag{23}$$

Infine, per le (14) e (5) si giunge a

$$s_m = \frac{Z}{2}\cos\theta \int_V j^* \exp(ikz) dV. \tag{24}$$

Un confronto fra le (13) e (24) fornisce subito

$$s_m = \frac{1 + ee^*}{2} s. \tag{25}$$

notevole relazione che collega le due sezioni complesse. Grazie ad essa ci si può limitare a calcolare la sezione complessa di *scattering*; dalla (25) si ricava poi subito quella relativa al momento di quantità di moto.

La (25) mostra che s_m e s sono uguali quando $|e| = 1$, cioè quando gli assi dell' ellisse di polarizzazione sono a 45° con il piano lz, in particolare quando la polarizzazione è circolare.

Dalle (15) e (25) segue, ricordando la (6)

$$\bar{M} = \frac{S^i}{\omega} Re(es) = \frac{S^i}{\omega} (\bar{s} Re\, e - \mathrm{Im}\, s\, \mathrm{Im}\, e). \tag{26}$$

Una volta nota s, la (26) permette di calcolare il momento totale agente su C, con rigore quando C è simmetrico rispetto al piano lz e, probabilmente, con grande approssimazione in tutti i casi.

6. Lemma sull' elettrostatica dei conduttori unidirezionali.

Si considerino due corpi materiali, B e C, di identica forma e dimensione, dei quali B sia un conduttore ordinario e C un conduttore unidirezionale nella direzione l.

Il comportamento elettrostatico di B e C è in generale diverso, per il fatto che, mentre all' interno di B il campo elettrico è identicamente nullo, ciò che porta $\rho = \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$, all' interno di C le componenti del campo perpendicolari a l non sono necessariamente nulle, così che non si avrà necessariamente $\rho = 0$. Inoltre, supposto che B e C siano inizialmente neutri e che vengano immersi in un campo elettrico, si avrà per C la seguente condizione:

a) All' interno di qualsiasi cilindro indefinito con le generatrici parallele a l la carica totale deve essere nulla. In particolare, se le cariche sono tutte distribuite sulla superficie Σ di C, con densità superficiale σ, la quantità $\sigma/(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n})$, deve assumere valori eguali alle due estremità di qualsiasi corda di C, parallela a l.

Invece B obbedisce solo alla condizione che la carica totale distribuita sulla sua superficie deve essere nulla.

Ora, assegnato un campo elettrostatico [8] $\boldsymbol{E}$, supponiamo che

[8] S' intenderà che tutti i campi elettrici menzionati in questo paragrafo siano campi *preesistenti*, cioè non deformati dall' azione delle cariche indotte.

esista un altro campo $\boldsymbol{E}_1$ perpendicolare a $\boldsymbol{l}$, tale che, quando B è introdotto nel campo $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_1$ la distribuzione superficiale di carica soddisfi la condizione a). Vogliamo mostrare che C, immerso nel campo $\boldsymbol{E}$, si comporta esattamente come B, immerso nel campo $\boldsymbol{E}'$.

Infatti, si introduca B in $\boldsymbol{E}'$. È noto che le cariche assumeranno quella distribuzione superficiale che realizza l'equilibrio stabile. Si trasformi allora B in C, aggiungendo il vincolo della unidirettività. Come avviene in meccanica (cfr. il *principio di solidificazione*), l'aggiunta di un nuovo vincolo non disturba la condizione di equilibrio stabile. Nè tale condizione potrà essere disturbata, se il campo diviene $\boldsymbol{E}$, perchè il campo aggiuntivo $-\boldsymbol{E}_1$ è perpendicolare a $\boldsymbol{l}$ cioè agli spostamenti virtuali delle cariche. Così il lemma è dimostrato.

Si può anche dire che, se le cariche di B sono in equilibrio nel campo $\boldsymbol{E}'$ ed è soddisfatta la condizione a), la stessa distribuzione si realizzerà quando C viene introdotto in un qualsiasi campo che abbia la componente secondo $\boldsymbol{l}$ eguale a $\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{l}$.

7. Sezione complessa di un ellissoide, piccolo rispetto alla lunghezza d'onda.

Il corpo C abbia la forma di un ellissoide con il centro nell'origine. Si supporrà che tutti e tre i semiassi a, b, c, siano piccoli rispetto alla lunghezza d'onda. Indicheremo con α, β, γ, nell'ordine, le componenti di $\boldsymbol{l}$ rispetto ai tre semiassi.

Il fatto che C sia piccolo rispetto alla lunghezza d'onda consente una nota semplificazione (9). All'interno di C si può trascurare il ritardo della propagazione e limitarsi ai termini statici (10). Pertanto, nella (1), porremo $k = 0$.

Ricordiamo ora che, nel caso statico, una distribuzione costante di polarizzazione $\boldsymbol{P}$ all'interno dell'ellissoide dà luogo ad un campo interno costante $-\boldsymbol{E}'$. Se con gl'indici a, b, c, indichiamo le componenti di un vettore rispetto agli assi dell'ellissoide, il campo interno risulta dato da (11)

$$E'_a = \frac{abc}{2\varepsilon_0} A_a P_a, \quad E_b' = \frac{abc}{2\varepsilon_0} A_b P_b, \quad E_c' = \frac{abc}{2\varepsilon_0} A_c P_c, \tag{27}$$

(9) Cfr. p. es. articolo citato al richiamo (1).

(10) LORD RAYLEIGH, *On the Incidence of Aerial and Electric Waves upon Small Obstacles, etc.*, « Phil. Mag. », **44**, 28, (1897).

(11) Vedi, p. es. op. cit. al richiamo (7), p. 211.

essendo

$$A_p = \int_0^\infty \frac{dt}{(t+p^2)\sqrt{(t+a^2)(t+b^2)(t+c^2)}}, \tag{28}$$

dove si intende che p rappresenti uno qualsiasi dei simboli a, b, c. Nelle (27) ε_0 rappresenta la costante dielettrica dello spazio.

È ben noto che una polarizzazione costante $\boldsymbol{P}$ è equivalente a una pura distribuzione superficiale $\sigma = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}$. Pertanto, $\boldsymbol{P}$ rappresenta proprio la polarizzazione che si produrrebbe qualora C avesse conduttività ordinaria e fosse introdotto nel campo $\boldsymbol{E}'$ dato dalle (27). Se vogliamo che sia soddisfatta la condizione $a)$ del paragrafo precedente, dobbiamo porre $\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{l}$, ovvero $P_a = \alpha P$, $P_b = \beta P$, $P_c = \gamma P$. Infine, per il lemma del paragrafo precedente, le cariche rimarranno in equilibrio se la conduttività di C diventa unidirezionale e il campo $\boldsymbol{E}'$ è sostituito con il campo $\boldsymbol{E}^t$ che abbia la componente secondo $\boldsymbol{l}$ eguale a $\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{l}$. Ricordando la (1) e la (8), si ha allora

$$\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{l} = E_0 \cos\theta. \tag{29}$$

Tenendo conto di tutto questo si ottiene subito dalle (27)

$$P = \frac{2\varepsilon_0 E_0 \cos\theta}{abc(\alpha^2 A_a + \beta^2 A_b + \gamma^2 A_c)}. \tag{30}$$

Con un noto ragionamento si ha poi $J = -i\omega P$, così che, combinando le (12), (13) e (30) e trascurando k nella (13), si ottiene

$$s = i\frac{2}{1+ee^*}\,\frac{4\pi k \cos^2\theta}{3(\alpha^2 A_a + \beta^2 A_b + \gamma^2 A_c)}. \tag{31}$$

Si trova così che, in questa approssimazione, la sezione complessa di *scattering* è puramente immaginaria. Essa è proporzionale alla prima potenza di k.

Tuttavia, una trattazione speciale è necessaria per il caso molto importante, in cui $\mathrm{Im}\, e = 0$ e gli assi dell' ellisse di polarizzazione sono paralleli a x, y. In questo caso, che include anche quello della polarizzazione circolare, si vede dalla (26) che l' ordine di grandezza di $\overline{M}$ dipende unicamente da quello della parte reale $\bar{s}$ di s. Poichè questa parte reale manca nell' approssimazione (31), essa sarà infinitesima di ordine superiore a k.

Fortunatamente la sezione reale di *scattering* può essere valutata direttamente per mezzo della potenza irradiata da C. Infatti, moltiplicando la (30) per il volume dell' ellissoide, si ottiene il momento dipolare totale di C e da esso, con formule note, si può calcolare la potenza $\overline{W}$ irradiata

$$\overline{W} = \frac{16\pi k^4 E_0 E_0^* \cos^2\theta}{27 Z(\alpha^2 A_a + \beta^2 A_b + \gamma^2 A_c)^2}. \tag{32}$$

E dividendo per S^t, dato dalla (6), si ottiene la sezione reale

$$\bar{s} = \frac{2}{1 + ee^*} \frac{16\pi k^4 \cos^2\theta}{27(\alpha^2 A_a + \beta^2 A_b + \gamma^2 A_c)^2}. \tag{33}$$

La parte principale di s è dunque proporzionale alla quarta potenza di k (cfr. la *legge di Rayleigh).*

Si noti come dalle (31) e (33) segua che la sezione non varia, comunque si ruoti C attorno alla direzione l.

8. Casi particolari.

Si vede dalla (28) che i coefficienti A_p sono espressi da integrali ellittici. Tuttavia, nei casi particolari più importanti, essi si riducono a funzioni più elementari.

Per esempio nel caso dell' ellissoide di rotazione schiacciato $(a = b > c)$, i coefficienti divengono.

$$A_a = A_b = \frac{1}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\operatorname{arc\,tan} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} - \frac{c}{a^2} \sqrt{a^2 - c^2}\right), \tag{34}$$

$$A_c = \frac{2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} - \operatorname{arc\,tan} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right). \tag{35}$$

E nel caso dell' ellissoide di rotazione allungato $(a = b < c)$

$$A_a = A_b = \frac{1}{(c^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\log \frac{c - \sqrt{c^2 - a^2}}{a} + \frac{c\sqrt{c^2 - a^2}}{a^2}\right), \tag{36}$$

$$A_c = \frac{2}{(c^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\log \frac{c + \sqrt{c^2 - a^2}}{a} - \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}\right). \tag{37}$$

Se l' ellissoide schiacciato degenera in un disco $(c = 0)$, comunque orientato, ma contenente la direzione di conduttività, perpendicolare a z $(\theta = 0,\ \gamma = 0)$, si ottiene dalle (34), (31) la parte principale di $\operatorname{Im} s$

$$\operatorname{Im} s = \frac{2}{1 + ee^*} \frac{8}{3} k a^3 \tag{38}$$

e dalla (33) la parte principale di $\bar{s}$

$$\bar{s} = \frac{2}{1 + ee^*} \frac{64}{27\pi} k^4 a^6, \tag{39}$$

Dalla (39) consegue anche il risultato già trovato in un caso particolare [12].

Nel caso della sfera ($a = c$) si verifica facilmente che tutti i coefficienti (34), (35), (36), (37) tendono a un limite comune e si trova

$$\text{(40)} \qquad \operatorname{Im} s = \frac{2}{1 + ee^*} 2\pi k a^3 \cos^2 \theta ,$$

$$\text{(41)} \qquad \bar{s} = \frac{2}{1 + ee^*} \frac{4}{3} \pi k^4 a^6 \cos^2 \theta .$$

Paragonando le (39) e (41), si vede che, per $\theta = 0$, la sezione reale della sfera è circa cinque volte quella del disco di eguale diametro. Per questo (oltre che per l'assenza di singolarità del campo) la sfera si presta meglio del disco all'esperienza con polarizzazione circolare.

Infine, quando $\theta = 0$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ e $a \to 0$ l'ellissoide allungato tende a divenire un sottile ago normalmente conduttore, perpendicolare a z. Se si indica con $q = c/a$ il rapporto fra la lunghezza e il diametro massimo, si trova dalle (31), (33), (37) che le sezioni dell'ago (che, a rigore, dovrebbe aver sempre forma di ellissoide) tendono a divenire

$$\text{(42)} \qquad \operatorname{Im} s = \frac{2}{1 + ee^*} \frac{2}{3} \pi \frac{kc^3}{\log 2q} ,$$

$$\text{(43)} \qquad \bar{s} = \frac{2}{1 + ee^*} \frac{4}{27} \pi \frac{k^4 c^6}{(\log 2q)^2} .$$

Queste espressioni tendono a zero quando q tende all'infinito e vi tende più rapidamente $\bar{s}$ che $\operatorname{Im} s$. Per questo l'ago mal si presta all'esperienza con polarizzazione circolare.

Questa ricerca è stata eseguita sotto gli auspici dell'European Office, Air Research and Development Command, United States Air Force (Contratto AF - 61 (514) - 433 con il Centro Microonde del Consiglio Nazionale delle Ricerche).

L'autore tiene a ringraziare il Prof. D. Graffi per alcune utili osservazioni in merito al presente lavoro.

APPENDICE

All'interno del corpo C si consideri un elemento di corrente (dipolo) posto in A e l'azione che esso esercita sulla carica Q e sulla corrente Il di un elemento di volume (o di superficie) posto in B. Detto Ll il momento dipolare di A, il campo prodotto in B

([12]) Cfr. articolo citato al richiamo (1).

avrà la forma [13]

$$E = LK \cdot l \quad , \quad B = \mu_0 H = Lh(r)s \wedge l, \tag{44}$$

dove K è un tensore del secondo ordine del tipo

$$K = f(r)U - g(r)ss. \tag{45}$$

In queste espressioni $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$ rappresentano funzioni della sola distanza r fra A e B, s è il versore di $B - A$ e U è il tensore fondamentale dello spazio euclideo. Il momento complesso M delle forze esercitate su B sarà dunque

$$M = \frac{1}{2}(B - O) \wedge (Q^*E + I^*l \wedge B) \cdot k = \tag{46}$$
$$= \frac{1}{2}(Q^*E + I^*l \wedge B) \cdot k \wedge (B - O).$$

Fatte le sostituzioni con le (44), (45), dette x, y, z le coordinate di B (O è l'origine), tenuto conto che per la (8) è $l \cdot j = 0$ e svolti i prodotti nella (46), si trova

$$M = \frac{1}{2} Lx(-Q^*gs \; l + I^*h) s \cdot j - \tag{47}$$
$$- \frac{1}{2} Ly[(Q^*f - I^*hs \cdot l) l \cdot i + (-Q^*g s \cdot l + I^*h) s \cdot i].$$

Consideriamo ora i punti A', B', simmetrici di A e B rispetto al piano xz, e calcoliamo il momento complesso M', dovuto all'azione di A' su B'. È evidente che si ottiene un'espressione analoga alla (47), dove r, $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$, $s \cdot l$, $s \cdot i$ e x rimangono invariati, mentre y e $s \cdot j$ cambiano segno. Quindi M e M' risultano eguali e di segno contrario, purché le correnti (e quindi anche L e Q) abbiano valori eguali in punti simmetrici.

Quest'ultima condizione potrebbe apparire evidente a priori. Tuttavia, non sarà male rendersene conto con la seguente considerazione, che, quantunque di carattere fisico, è perfettamente convincente. Si pensi all'inizio del fenomeno, anziché al regime stazionario. Il campo elettrico incidente ha valori eguali in punti simmetrici come A e A' e provocherà in essi correnti eguali. Allora A e A' produrranno rispettivamente in B e B' dei campi elettrici che, per le (44) e (45), hanno eguali le componenti secondo l. D'altra parte il campo magnetico non potrà modificare le correnti, dato che le traiettorie sono necessariamente rettilinee. Dunque le correnti in B e B' rimarranno eguali, anche tenuto conto dell'azione del campo secondario. Si conclude che non vi è alcuna causa fisica che possa modificare la simmetria.

(13) Vedi p. es. op. cit. al richiamo (3), p. 166.