Roberto Conti

# Limitazioni “in ampiezza” delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e applicazioni.

*Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **11** (1956), n.3, p. 344–349.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_344_0>

# Limitazioni « in ampiezza » delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e applicazioni.

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze)

**Sunto.** - *Si dànno una limitazione inferiore ed una superiore per la ampiezza delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie e se ne fanno applicazioni, ritrovando, in particolare, noti teoremi relativi alla prolungabilità delle soluzioni stesse.*

**1.** Sia

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

un sistema di $n$ equazioni differenziali del 1° ordine, dove $t$ indica un numero reale, $a < t < b$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e dove $x_1, \dots, x_n$ indica una $n$-upla di numeri reali o complessi.

Le $f_i$ siano funzioni, reali o complesse, definite in

$$S: \quad a < t < b, \quad 0 \leq \left(\sum_1^n {}_i \, |x_i|^2\right)^{1/2} < +\infty,$$

ivi continue rispetto a $(t, x_1, \dots, x_n)$, cosicchè per ogni punto $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in S$ passa almeno una soluzione del sistema (1). Sia $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ una tale soluzione e sia $t_0^+$ l'estremo superiore dei valori di $t$ per cui essa è definita, cosicchè sarà $t_0^+ \leq b$.

Come è ben noto, spesso si presenta la questione di sapere se $t_0^+ = b$, oppure $t_0^+ < b$, vale a dire se la soluzione considerata sia « prolungabile in futuro » oppure no; più particolarmente ha interesse di stabilire se una tale soluzione sia « limitata in futuro » o no, vale a dire se esista o meno una costante $c > 0$ (dipendente o no da $t_0$ e dalla soluzione stessa) per cui si abbia

$$\left(\sum_1^n {}_i \, |x_i(t)|^2\right)^{1/2} \leq c, \qquad t_0 \leq t < t_0^+,$$

il che implica che $t_0^+ = b$.

Tali questioni rivestono speciale importanza poi, anche nelle matematiche applicate, quando sia $b = +\infty$.

La conoscenza di opportune limitazioni della « ampiezza »

$$\rho(t) = \left(\sum_1^n {}_i \, |x_i(t)|^2\right)^{1/2}$$

della soluzione, consente in molti casi di dare una risposta a tali quesiti ed è perciò che qui diamo una limitazione superiore (Teorema 1) ed una inferiore (Teorema 2) « in ampiezza », mostrando poi alcune applicazioni a titolo di esempio.

**2.** Introducendo per comodità le notazioni vettoriali, il sistema (1) si scrive

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

dove $x$ indica il vettore di componenti $x_i$, $\dot{x}$ il vettore di componenti $\dot{x}_i = dx_i/dt$, $f(t, x)$ il vettore di componenti $f_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$.

Indicheremo poi con $x'$ il vettore avente per componenti $\bar{x}_i$ i coniugati dei componenti $x_i$ di $x$ e analogo significato attribuiremo al simbolo $f'$. Con $x'f$, $f'x$ indicheremo prodotti scalari.

Infine, nel seguito, $\alpha(t, u)$, $\omega(t, u)$ rappresenteranno funzioni (numeriche) reali, definite e continue rispetto a $(t, u)$ nella semistriscia aperta

$$S_1: \quad a < t < b, \quad 0 < u < +\infty$$

del piano reale (euclideo) $t$, $u$.

Ciò premesso dimostriamo il

Teorema 1. - *Sia* $u_0(t)$ *l'integrale superiore dell'equazione*

$$\dot{u} = \omega(t, u) \tag{2}$$

*uscente dal punto* $Q_0 = (t_0, u_0)$ *di* $S_1$, *e sia* $T_0^+$ *l'estremo superiore dei valori di* $t$ *per cui* $u_0(t)$ *è definito.* [1]

*Se* $\omega(t, u)$ *ed* $f(t, x)$ *(quest'ultima continua in* $S$*) soddisfano per* $a < t < b$, $0 < \rho = \left(\sum_1^n |x_i|^2\right)^{1/2}$, *la disuguaglianza*

$$x'f(t, x) + f'(t, x)x \leq 2\rho\omega(t, \rho) \tag{3}$$

*allora per ogni soluzione* $x = x(t)$ *del sistema* (1) *uscente da un punto* $P_0 = (t_0, x^0)$ *di* $S$, *con* $\rho^0 = \left(\sum_1^n |x_i^0|^2\right)^{1/2} = u_0$, *si ha*

$$\rho(t) \leq u_0(t), \quad t_0 \leq t < T_0^+, \tag{4}$$

*essendo* $\rho(t) = \left(\sum_1^n |x_i(t)|^2\right)^{1/2}$.

La dimostrazione, basata sull'identità

$$d\rho^2/dt = x'f + f'x \tag{5}$$

di immediata verifica, si può fare nel modo seguente. Si prenda $t_1$ ad arbitrio, tale che $t_0 < t_1 < T_0^+$; esiste [2] un $\varepsilon_1 < 0$, dipen-

[1] Essendo la $\omega(t, u)$ definita solo per $u > 0$ si intende che $u_0(t)$ deve essere $> 0$ per $t_0 \leq t < T_0^+$.

[2] Cfr. E. Kamke, *Differentialgleichungen reeler Funktionen* (Leipzig, 1930) p. 83.

dente da $t_1$, tale che l'integrale superiore $u_0(t, \varepsilon)$ di

$$\dot{u} = \omega(t, u) + \varepsilon \tag{6}$$

uscente da $(t_0, u_0)$ è definito per $t_0 \leq t \leq t_1$, per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. ed è inoltre

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} u_0(t, \varepsilon) = u_0(t)$$

uniformemente rispetto a $t \in [t_0, t_1]$.

Per provare la (4) basta far vedere che se $x(t)$ è una soluzione del sistema (1) uscente da $P_0 = (t_0, x^0) \in S$, con $\rho^0 = u_0$, è per $t_0 \leq t \leq t_1$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$\rho(t) \leq u_0(t, \varepsilon). \tag{7}$$

Da questa seguirà per $\varepsilon \to 0^+$, $\rho(t) \leq u_0(t)$ per $t_0 \leq t \leq t_1$, e quindi, data l'arbitrarietà di $t_1$, per $t_0 \leq t < T_0^+$, cioè la (4).

Procediamo per assurdo e perciò, avendo fissato $t_1$ ed $\varepsilon_1 > 0$, ammettiamo che esista un $\varepsilon_2$, $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, ed un qualche valore di $t \in [t_0, t_1)$ per cui la (7) non vale, ossia per cui $\rho(t) > u_0(t, \varepsilon_2)$. Detto $t_2$ l'estremo inferiore di tali valori di $t \in [t_0, t_1)$, avremo, per la continuità di $\rho(t)$

$$\rho(t_2) = u_0(t_2, \varepsilon_2)$$

ed esisteranno numeri $h > 0$, prossimi a zero quanto si vuole, tali che

$$\rho(t_2 + h) > u_0(t_2 + h, \varepsilon_2).$$

Avremo perciò

$$\rho^2(t_2) = u_0^2(t_2, \varepsilon_2), \quad \rho^2(t_2 + h) > u_0^2(t_2 + h. \varepsilon_2),$$

e quindi anche

$$\left.\frac{d\rho^2(t)}{dt}\right|_{t=t_2} \geq \left.\frac{du_0^2(t, \varepsilon_2)}{dt}\right|_{t=t_2} .$$

Di qui, in virtù dell'identità (5), segue

$$x'(t_2)f(t_2, x(t_2)) + f'(t_2, x(t_2))x(t_2) \geq 2u_0(t_2, \varepsilon_2) \left.\frac{du_0(t, \varepsilon_2)}{dt}\right|_{t=t_2} =$$
$$= 2u_0(t_2, \varepsilon_2) \mid \omega(t_2, u_0(t_2, \varepsilon_2)) + \varepsilon_2 \mid = 2\rho(t_2) \mid \omega(t_2, \rho(t_2)) + \varepsilon_2 \mid ,$$

ed essendo $\varepsilon_2 > 0$, e $\rho(t_2) = u_0(t_2, \varepsilon_2) > 0$ (cfr. Nota ([1])), l'ultima espressione scritta è $> 2\rho(t_2)\omega(t_2, \rho(t_2))$ e si è così caduti in contraddizione con la (3).

**3.** In modo analogo si dimostra il

TEOREMA 2. - *Sia* $v_0(t)$ *l'integrale inferiore dell'equazione*

$$\dot{v} = \alpha(t, v) \tag{2'}$$

*uscente dal punto* $Q_0 = (t_0, u_0) \in S_1$ *e sia* $T_0^+$ *l'estremo superiore dei valori di* t *per cui* $v_0(t)$ *è definito.*

*Se* $\alpha(t, v)$ *ed* $f(t, x)$ ($\alpha(t, v)$ *continua in* $S_1$, $f(t, x)$ *continua in* S) *soddisfano per* $a < t < b$, $0 < \rho = \left(\sum_1^n |x_i|^2\right)^{1/2}$, *la disuguaglianza*

$$2\rho\alpha(t, \rho) \leq x'f(t, x) + f'(t, x)x \tag{3'}$$

*allora per ogni soluzione* $x = x(t)$ *del sistema* (1) *uscente da un punto* $P_0 = (t_0, x^0) \in S$ *con* $\rho^0 = u_0$ *si ha*

$$v_0(t) \leq \rho(t), \qquad t_0 \leq t < T_0^+, \tag{4'}$$

*con* $\rho(t) = \left(\sum_1^n |x_i(t)|^2\right)^{1/2}$.

**4.** Considerazioni analoghe a quelle fin qui svolte si possono ripetere relativamente a valori di $t < t_0$; occorre per questo prendere in considerazione l'integrale superiore (o inferiore) dell'equazione di confronto *giungente nel punto* $Q_0$ anzichè uscente di esso. Inoltre una disuguaglianza del tipo (3) serve ad ottenere una limitazione *inferiore* per la $\rho(t)$. anzichè superiore, e così da una disuguaglianza del tipo (3') si ricava per $\rho(t)$ una limitazione *superiore.*

**5.** Vogliamo applicare i teoremi 1 e 2 al caso lineare, cioè al caso di un sistema

$$\dot{x} = A(t)x \tag{8}$$

è ritrovare così le notevoli limitazioni di T. WAZEWSKI. [3]

Con $A(t)$ si indica una matrice $n \times n$ continua in $a < t < b$.

Avendosi $f = Ax$, $f' = x'A'$ (il prodotto è fatto righe per colonne e $A'$ indica la matrice trasposta e coniugata dalla $A$) segue che $x'f + f'x$ coincide con la forma quadratica hermitiana $x'(A + A')x$ la quale, come è noto, è sempre $\geq 2\lambda(t)x'x$, e sempre $\leq 2\Lambda(t)x'x$, avendo indicato, per ogni $t$, con $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$ rispettivamente la più piccola e la più grande fra le radici caratteristiche associate alla matrice $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A'$. Dunque è nel caso attuale ($x'x = \rho^2$)

$$2\rho\lambda(t)\rho \leq x'f + f'x \leq 2\rho\Lambda(t)\rho$$

e si può applicare il teorema 1 con $\omega(t, \rho) = \Lambda(t)\rho$, e il teorema 2 con $\alpha(t, \rho) = \lambda(t)\rho$. Ne seguono le limitazioni di T. WAZEWSKI ($t_0 < t$)

$$\rho(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(\tau)d\tau\right) \leq \rho(t) \leq \rho(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \Lambda(\tau)\,d\tau\right).$$

[3] Cfr. T. WAZEWSKI, *Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires,* « Studia Math., » 10 (1948), 48-58.

**6.** Dai teoremi 1 e 2 si ha immediatamente il

COROLLARIO 1. – *Se valgono le ipotesi del teorema* 1 [*del teorema* 2] *e se, con le notazioni ivi usate, è* $T_0^+ = b$ [$T_0^+ < b$], *allora ogni soluzione del sistema* (1) *uscente da* $P_0 = (t_0, x^0) \in S$, *con* $\rho^0 = u_0$, *è prolungabile* [*non è prolungabile*] *in futuro.*

Segue di qui che ogni condizione affinchè il $T_0^+$ del teorema 1 sia $= b$, si traduce in un criterio di prolungabilità delle soluzioni del sistema (1).

**7.** Ad esempio la disuguaglianza (3) valga per una funzione $\omega(t, u)$ della forma

$$\omega(t, u) = \mu(t)\, h(u) \tag{9}$$

con $\mu(t) > 0$, funzione continua per $t_0 \leq t < b$, e con $h(u) > 0$ funzione continua per $u > 0$ e tale che sia (⁴)

$$\int^{+\infty} \frac{du}{h(u)} = +\infty . \tag{10}$$

L'equazione (2), separando le variabili e integrando da $t_0$ a $t$, si scrive

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u}{h(u)} d\tau = \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau ,$$

e poichè, essendo $u(t)$ una funzione assolutamente continua (e non decrescente), si può operare un'integrazione per sostituzione, si ottiene

$$\int_{u_0}^{u_0(t)} \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau .$$

Allorchè $t$ tende a $T_0^+$ (estremo superiore dei valori per cui è definita la $u_0(t)$), se fosse $T_0^+ < b$ il 2° membro resterebbe finito, quindi il 1° membro non potrebbe tendere a $+\infty$. Per la (10) ciò significa che $u_0(t)$ dovrebbe restare limitata ed essendo non decrescente dovrebbe tendere ad un limite finito contro il fatto che $T_0^+ < b$ è l'estremo superiore dei valori per cui $u_0(t)$ è definita. Dunque dev'essere $T_0^+ = b$ e si ha il

COROLLARIO 2. – *Se* f(t, x) *è continua in* S *e si ha ivi*

$$x' f(t, x) + f'(t, x) x \leq 2\rho\mu(t) h(u) \tag{11}$$

(⁴) La scrittura (10) indica che esiste almeno un $u_0 > 0$ tale che

$$\lim_{u \to +\infty} \int_{u_0}^{u} \frac{dv}{h(v)} = +\infty$$

*con* $\mu(t)$ *funzione* $\geq 0$ *e continua per* $a < t < b$ *ed* $h(u)$ *funzione* $> 0$ *e continua per* $u > 0$ *e tale che valga la* (10), *allora ogni soluzione del sistema*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

*è prolungabile in futuro.*

In particolare, avendo presenti le relazioni

$$x'f + f'x \leq |x'f + f'x| = 2\,|R(x'f)| \leq 2\,|x'f| \leq 2\rho\,\|f\|,$$

dove si è posto

$$\|f\| = \left(\sum_1^n |f_i|^2\right)^{1/2},$$

segue che *la tesi del Corollario* 2 *sussiste, a fortiori, se nell'enunciato dello stesso Corollario si sostituisce la* (11) *con la disuguaglianza più stretta*

$$\|f(t, x)\| \leq \mu(t)h(\rho).$$

Se in questa si suppone $\mu(t) = \text{cost.}$ (ed $f$ reale) si ottiene un noto criterio di prolungabilità (in futuro) di A. Wintner. [5]

**6.** Il teorema 1 può servire, in particolare, per ottenere dei criteri di *limitatezza* (in futuro) ed anche di *definitiva limitatezza* (in futuro) delle soluzioni del sistema (1). [6]

Ad esempio, *se alle ipotesi del Corollario* 2 *si aggiunge la*

$$\int^b \mu(\tau)d\tau = \lim_{t \to b-} \int^t \mu(\tau)d\tau < +\infty$$

*allora* (tutte le soluzioni dell'equazione $\dot{u} = \mu(t)\,h(u)$ e quindi) *tutte le soluzioni del sistema* (1) *sono limitate in futuro.*

Nel caso lineare, supposto $b = +\infty$, i criteri di limitatezza e definitiva limitatezza si traducono rispettivamente in criteri di *stabilità* [7] e di *stabilità asintotica.* [8]

(5) A. Wintner, *The infinities of the non local existence problem of ordinary differential equations*, « Am. Jour. Math. », 68 (1946), 173-178.

Tale criterio, a differenza di quello dato sopra nel n. 7, non si applica ad esempio a sistemi lineari (della forma (8)) con $A(t)$ illimitata per $t \to b$.

(6) Per un'analisi approfondita di questi concetti si veda ad esempio: T. Yoshizawa. *Note on the boundedness and the ultimate boundedness of solutions of* $x' = F(t, x)$, « Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A., Math. », 29 (1955) 275-291.

(7) Cfr. ad es. T. Wazewski, loc. cit. in (3), p. 54 e segg.

(8) Cfr. ad. es. H. A. Antosiewicz, *A note on asymptotic stability*, « Quart. Jour Appl. Math. », 9 (1951), 317-319.