Bollettino
Unione Matematica Italiana

Marco Cugiani

Relazione su un gruppo di ricerche di aritmetica additiva dei numeri liberi da potenze.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 359–367.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_359_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Relazione su un gruppo di ricerche di aritmetica additiva dei numeri liberi da potenze.

Nota di MARCO CUGIANI (a Milano)

Sunto. - *Si espongono e si illustrano risultati conseguiti e metodi utilizzati in recenti ricerche sul problema di determinare il numero delle rappresentazioni di un intero abbastanza grande come somma di una potenza e di un numero libero da potenze e su altri problemi analoghi.*

1. Il problema della rappresentazione di un intero come somma di una potenza e di un numero libero da potenze.

Il problema che ci ripromettiamo di illustrare qui e che ha costituito oggetto di notevoli ricerche nel corso degli ultimi venticinque anni, può essere impostato nelle seguenti linee.

Si voglia indagare sulla possibilità di ottenere decomposizioni di un numero intero N, abbastanza grande, in somma di due addendi, del tipo:

$$N = x^g + l_t \tag{1}$$

dove $g \geq 1$ e $t \geq 2$ sono interi prefissati; $x \geq 0$, $l_t \geq 0$ dovranno essere pure interi. ed inoltre l_t libero da potenze t-esime (cioè non divisibile per la potenza t-esima di alcun numero primo).

Ci potremo chiedere, in primo luogo se sarà possibile assegnare almeno una coppia x, l_t che soddisfi la (1) e ci potremo anche proporre di dare qualche informazione circa il numero, che indicheremo con $E(g, t; N)$, di tali coppie x, l_t, cioè circa il numero delle rappresentazioni distinte di N nella forma (1).

Evidentemente il problema così posto avrà un certo interesse solo per $g > 1$; nel caso $g = 1$ esso si ridurrebbe infatti al classico problema di valutare il numero degli interi positivi, non maggiori di N e liberi da potenze t-esime; fra l'altro è ben noto che risulta allora:

$$E(1, t; N) \sim N/\zeta(t) \qquad \text{per} \qquad N \to +\infty.$$

Il primo caso che si presenta dunque spontaneo nella trattazione del nostro problema è quello in cui si ponga $g = t = 2$. Esso fu trattato da T. ESTERMANN fin dal 1931, in una nota che rimane in certo senso il capostipite di tutte quelle che trattano del problema in questione [1] (qui e nel seguito useremo i numeri in parentesi quadra come indicazione di rinvio all'elenco bibliografico, posto alla fine del presente lavoro).

In tale nota è dimostrato che $E(2, 2; N)$, cioè il numero delle rappresentazioni del tipo $N = x^2 + l_2$, soddisfa alla relazione:

$$(2) \qquad E(2, 2; N) = N^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{p^2 \mid N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{\nu(p^2)}{p^2}\right) + O\left(N^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

per ogni $\varepsilon > 0$; qui, come accadrà spesso anche nel seguito, p designa un generico numero primo, e $\nu(m)$ designa il numero delle soluzioni (mod m) della congruenza: $x^g \equiv N \pmod{m}$.

Se noi indichiamo con $\omega(N)$ il numero dei divisori primi distinti d N è ovvio che $\omega(N) < \log N$, per $N > 2$; il primo dei due prodotti che figurano nella (2) è quindi $> c/\log\log N$, per ogni N e per un c fisso indipendente da N, in base ad un noto teorema di F. MERTENS.

Il secondo prodotto è, per ogni N, un prodotto infinito convergente, maggiore di una opportuna costante positiva indipendente da N.

Se ne deduce che $E(2, 2; N) \to +\infty$ per $N \to +\infty$, e che più precisamente:

$$E(2, 2; N) \sim N^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{p^2 \mid N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{\nu(p^2)}{p^2}\right)$$

per $N \to +\infty$. Potremo perciò in particolare affermare che: *ogni intero abbastanza grande è rappresentabile come somma di un quadrato e di un numero libero da quadrati; si ha anzi che il numero di tali rappresentazioni tende all'* ∞ *insieme con* N.

Per giungere a questi risultati l'autore si serve, oltre che di proposizioni ben note, deducibili elementarmente, dell'aritmetica asintotica (quale ad esempio la relazione: $\sum_{m=1}^{n} d(m) \sim n \log n$), anche di certe considerazioni dedotte dalla teoria degli ideali nei campi quadratici. Vero è che in appendice egli fornisce una trattazione supplementare in cui alle stesse considerazioni si perviene, con processo per altro assai laborioso, indipendentemente da tale teoria.

Tenuto conto di ciò possiamo affermare che egli perviene al risultato anzidetto per via del tutto elementare.

Questo risultato veniva poi generalizzato da M. CUGIANI in un lavoro del 1953 [13], nel quale, facendo ricorso al metodo di VIGGO

BRUN, viene dimostrata la seguente relazione, che si riferisce al caso di un qualunque $g = t \geq 2$:

$$(3)\quad E(g,\, g\colon N) = N^{\frac{1}{g}} \cdot \prod_{p^g \mid N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{\nu(p^g)}{p^g}\right) + O\left(N^{\frac{1}{g}} / \log N\right)$$

Di qui, con considerazioni analoghe a quelle svolte poc' anzi, si deduce ancora che:

$$E(g,\, g;\, N) \sim N^{\frac{1}{g}} \cdot \prod_{p^g \mid N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{\nu(p^g)}{p^g}\right)$$

con conseguenze del tutto simili a quelle esposte nel caso $g = 2$.

Osserviamo ancora che, com'è ovvio, ogni numero libero da potenze g-esime è, a maggior ragione, libero da potenze di ordine più elevato di g. Se ne deduce immediatamente che:
per ogni coppia g, t, *con* $t \geq g \geq 2$, *tutti gli interi* N, *abbastanza grandi, sono rappresentabili nella forma:* $N = x^g + l_t$; *si ha anzi che il numero di tali rappresentazioni tende all'* ∞ *insieme con* N.

2. Il problema speciale: $N = p^g + l_t$ (p primo).

Il nostro problema si può specializzare imponendo che x soddisfi a particolari condizioni. Ci possiamo per esempio chiedere se la (1) possa essere soddisfatta da coppie x, l_t, ove i valori assunti da x siano rappresentati esclusivamente da numeri primi.

Osserviamo che in questo caso il problema diventa significativo anche se si suppone $g = 1$ (e allora dovrà essere necessariamente $t > g$).

Il primo risultato in questo ordine di idee si riferisce esattamente al caso $g = 1$, $t = 2$, ed è dovuto ancora ad ESTERMANN. Egli, stabilì, in una nota [2] che risale anch'essa al 1931, la seguente relazione, la quale si riferisce dunque al numero, che indicheremo con $E_p(1, 2; N)$, delle rappresentazioni del tipo $N = p + l_2$:

$$(4)\qquad E_p(1,\, 2;\, N) \sim \frac{N}{\log N} \cdot \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right).$$

Qui il prodotto infinito è convergente per ogni N e si ha quindi in particolare: $E_p(1,\, 2;\, N) \to +\infty$ per $N \to +\infty$.

Nella dimostrazione di questo risultato il nostro autore deve ricorrere a relazioni che gli diano qualche informazione sul numero dei numeri primi, inferiori a un certo limite, contenuti in una progressione aritmetica. Se poniamo, per $(k, l) = 1$:

$$\pi(n;\ k,\ l) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \equiv l (\mathrm{mod}\ k)}} 1,$$

le relazioni invocate da ESTERMANN possono essere espresse dalle formule:

$$(5) \qquad \begin{cases} \pi(n;\ k,\ l) \backsim \dfrac{n}{\varphi(k) \cdot \log n} & \text{per } k \text{ fisso, } n \to +\infty \\[2ex] \pi(n;\ k,\ l) < \dfrac{An}{\varphi(k) \cdot \log n} & \text{per ogni } n \geq 2, \text{ ed ogni } k \leq \sqrt{n} \\ & (A \text{ costante opportuna}). \end{cases}$$

La prima delle (5), costituisce un classico risultato, ben noto e perfettamente analogo al teorema fondamentale dei numeri primi (enunciato nella sua forma più modesta). La seconda invece era stata dimostrata nell'anno precedente da E. C. TITCHMARSH, facendo uso del metodo di VIGGO BRUN.

La (4) veniva poi migliorata da A. PAGE in un lavoro [4] del 1935. In esso si dimostrava che più precisamente:

$$(4\ \text{bis}) \qquad E_p(1,\ 2;\ N) = \mathrm{Li}\, N \cdot \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) + \\ + O\left(\frac{N (\log\log N)^8 \log\log\log N}{(\log N)^5}\right)$$

ed anche questo risultato veniva, nel corso dello stesso anno, superato da un lavoro di A. WALFISZ [6], ove è provato che nella (4 bis) il termine correttivo può essere migliorato sostituendovi una espressione del tipo: $O(N/\log^H N)$, dove H è un numero positivo arbitrario.

Questi miglioramenti successivi erano legati essenzialmente alla possibilità di fornire valutazioni di $\pi(n;\ k,\ l)$ più precise di quella che risulta dalle (5) ed esprimibili attraverso una formula del tipo:

$$\pi(n;\ k,\ l) = \mathrm{Li}\ n/\varphi(k) + R$$

dove il termine correttivo R può essere variamente maggiorato a seconda delle ipotesi che si fanno sull'andamento di k. È ben noto ad esempio il classico risultato (1) secondo il quale, nella

(1) Si veda ad esempio: E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Hirzel, Leipzig (1927); Bd. 2, Satz 403. Oggi è possibile, sempre nella ipotesi di un k fisso, garantire anche: $R = O\left(n . \exp\left(-c (\log n)^{4/7} (\log\log n)^{-3/7}\right)\right)$; si veda: T. TATUZAWA, *On the Number of Primes in an Arithmetic Progression*, Japanese J. of Math. *21*, 94-111 (1951).

ipotesi particolarmente semplice che k si mantenga fisso, mentre n tende a $+\infty$, si può porre: $R = O(n \cdot \exp(-c\sqrt{\log n \cdot \log\log n}))$.

Qui però si trattava di maggiorare R nella ipotesi che k cresca insieme con n; in questo caso la maggiorazione di R si può effettuare con una funzione che dipende in modo essenziale dal massimo zero reale, diciamo s_1, delle funzioni di DIRICHLET $L(s, \chi)$ relative ai caratteri $\chi(n) \bmod k$.

In particolare, sfruttando una notevole relazione trovata da G. L. SIEGEL in certe sue ricerche, relative al numero delle classi di ideali equivalenti in un campo quadratico, il WALFISZ giungeva ad una acuta maggiorazione di s_1, da cui scaturisce in sostanza la possibilità di una limitazione del tipo: $R = O(n/\log^H n)$, valida per ogni H, uniformemente rispetto a k ([2]).

Da questa proposizione di SIEGEL–WALFISZ dipende, oltre il ricordato risultato di WALFISZ, anche qualcuna delle proposizioni che ci capiterà di citare nel seguito.

Nello stesso anno 1935 P. ERDÖS affronta per la prima volta [3] il caso $g = t = 2$ (sempre nell'ipotesi che x sia primo). Egli giunge alla conclusione che, per ogni $N \not\equiv 1 \pmod 4$ abbastanza grande, esiste almeno una rappresentazione del tipo: $N = p^2 + l_2$, mentre ([3]) per $N \equiv 1 \pmod 4$ egli può garantire l'esistenza di almeno una rappresentazione del tipo: $N = (2p)^2 + l_2$.

Alla fine di questo lavoro l'Autore accenna inoltre alla possibilità di dimostrare analoghe affermazioni nel caso più generale $g = t \geq 2$.

I mezzi di cui si serve differiscono poco da quelli impiegati nel lavoro [2] di ESTERMANN; ad esempio, invece della prima delle (5) egli richiede la più precisa valutazione:

$$\pi(n;\ k,\ l) = n/(\varphi(k) \cdot \log n) + O(n \cdot \log^{-2} n).$$

([2]) A questo proposito può essere utile consultare anche: J. G. VAN DER CORPUT, *Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres pairs*, Acta Arith *2*, 266-290 (1937); nota [4]), alle pagg. 279-280.

Da questo passo scaturisce anche la interessante osservazione che se k soddisfa a una limitazione del tipo $k < (\log n)^h$ (con h arbitrario), è ancora possibile garantire per R una limitazione della forma: $R = O\,(n.\ \exp(-c\sqrt{\log n}))$, e qui si può consultare in aggiunta: T. ESTERMANN, *Introduction to modern prime number theory*, Cambr. Tracts in Math. & Phys. n. 41, Cambridge University Press (1951), al capitolo 2°.

([3]) Se fosse $N \equiv 1 \pmod 4$, dalla relazione $N = p^2 + l$, seguirebbe, che per p dispari, $p^2 \equiv 1 \pmod 4$, $l \equiv 0 \pmod 4$ non sarebbe libero da quadrati, colla sola eccezione del caso $p = 2$, se $N - 4$ è libero da quadrati.

Questi risultati venivano migliorati in parte in un lavoro [7] di S. PILLAI del 1939 nel quale è dimostrato che [4]:

$$E_p(2,\ 2;\ N) = 2\frac{N^{\frac{1}{2}}}{\log N}\cdot \prod_{p \nmid N}\left(1 - \frac{\nu(p^2)}{p(p-1)}\right) +$$

$$+\ O(N^{\frac{1}{2}}\cdot(\log N \cdot \log\log N)^{-1})$$

risultato più espressivo di quello di ERDÖS per $N \not\equiv 1 \pmod 4$ (condizione che esclude l'annullarsi del prodotto infinito), ma che non tocca il caso $N \equiv 1 \pmod 4$.

Risultati assai più ampi in questo ordine di idee furono indicati da K. SAMBASIVA RAO in un lavoro [8] dell'anno successivo e sono riassunti dalla seguente formula, valida per g e t qualunque ($g \geq 1,\ t \geq g,\ t \geq 2$) ed H arbitrario:

$$E_p(g,\ t;\ N) = \mathrm{Li}\left(N^{\frac{1}{g}}\right)\cdot \prod_{p \nmid N}\left(1 - \frac{\nu(p^t)}{p^t - p^{t-1}}\right) + O(N^{\frac{1}{g}}/\log^H N). \tag{6}$$

Si osservi che il prodotto infinito si annulla e la (6) perde significato per $g = 2,\ t = 2,\ 3$, e per $g = t = 4$, quando sia $N \equiv 1 \pmod{2^t}$.

Fra gli strumenti impiegati dall'Autore in questa sua ricerca figura in primo luogo il teorema di SIEGEL-WALFISZ, oltre ad altre proposizioni, di natura elementare, fra cui interessante una valutazione del numero delle soluzioni di una congruenza binomia.

Ricordiamo anche la dimostrazione, particolarmente agile ed elegante, data dal MIRSKY nel 1949 [10] di una formula che rientra come caso particolare nella (6) per $g = 1,\ t > g$.

3. Altri problemi speciali: $N = x^g + l_t$ (x variamente condizionato).

Altre varianti può offrire il nostro problema qualora si impongano alla x limitazioni diverse da quella sin qui considerata, che consisteva nel supporre x sempre uguale a un numero primo.

Nel 1947 K. F. ROTH affrontava la questione della valutazione del numero delle rappresentazioni, nel caso $g = t = 2$, sotto la ipotesi che x assuma soltanto valori rappresentati da interi liberi

[4] Di questo lavoro non abbiamo potuto avere conoscenza diretta. Le notizie che riferiamo qui ci sono note attraverso la recensione comparsa in: *Zentralblatt für Math.* 23, 9 (1940).

da quadrati [9]. Se indichiamo con $E_2(2, 2; N)$ il numero di tali rappresentazioni, che rispondono quindi allo schema:

$$N = x^2 + l_2, \quad \text{con} \quad \mu(x) \neq 0;$$

il risultato del ROTH si può scrivere:

$$(7)\quad E_2(2, 2; N) = \frac{6}{\pi^2} N^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{p^2 | N} \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) \cdot \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{\nu(p^2)}{p^2 - 1}\right) + O\left(N^{\frac{3}{8}+\varepsilon}\right)$$

per ogni $\varepsilon > 0$. La dimostrazione impiega soltanto strumenti di carattere elementare.

Quattro anni più tardi il CUGIANI prendeva in considerazione il caso di un qualunque $g = t \geq 2$, sempre nell'ipotesi: x libero da quadrati [11]. Per il numero di tali rappresentazioni egli fornisce i seguenti risultati:

$$(8a)\qquad E_2(g, g; N) > \gamma_1 N^{\frac{1}{g}} (\log\log N)^{-1}$$

per $\gamma_1 > 0$ *opportuno, ed ogni* N *abbastanza grande;*

$$(8b)\qquad E_2(g, g; N) < \gamma_2 N^{\frac{1}{g}} (\log\log N)^{-1}$$

per γ_2 *opportuno, ed infiniti* N:

$$(8c)\qquad E_2(g, g; N) > \gamma_3 N^{\frac{1}{2}}$$

per $\gamma_3 > 0$ *opportuno, ed infiniti* N.

Lo strumento essenziale di queste ricerche è fornito dal metodo di VIGGO BRUN.

Nel 1952 [12] e ancora nell'anno successivo [13] il CUGIANI prendeva anche in esame un'altra variante del problema, relativa al caso in cui si chieda che x risulti primo con N (e quindi anche con l_t). Nel secondo dei lavori ricordati è dimostrato che il numero $E'(g, g; N)$ delle rappresentazioni del tipo: $N = x^g + l_g$, con $(x, N) = 1$ soddisfa alla relazione, valida per ogni $g \geq 2$:

$$(9)\quad E'(g, g; N) = N^{\frac{1}{g}} \cdot \prod_{p | N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{\nu(p^g)}{p^g}\right) + O(N^{\frac{1}{g}} (\log N)^{-1}).$$

Lo strumento impiegato nella dimostrazione è anche qui costituito essenzialmente dal metodo di VIGGO BRUN.

4. Il problema generalizzato: $N = F(x) + l_t$ ($F(x)$ polinomio a valori interi).

Il problema sin qui trattato può essere generalizzato nel senso di sostituire, nel secondo membro della (1), un polinomio $F(x)$, di grado g, in luogo di x^g.

Supporremo che (5):

$$F(x) = a_0x^g + a_1x^{g-1} + \dots + a_{g-1}x \qquad (g \geq 1;\ a_0 > o)$$

sia un polinomio a coefficienti razionali e a valori interi, e che inoltre il divisore fisso di $F(x)$ sia libero da t-esime potenze (6).

Possiamo allora porci la solita questione circa il numero, che indicheremo con $E(F,\ t;\ N)$ delle rappresentazioni del tipo:

$$N = F(x) + l_t \qquad (x > 0;\ F(x) > 0;\ l_t \geq 0). \tag{10}$$

Questo problema fu affrontato per la prima volta da G. Ricci in un lavoro [5] del 1935, nel quale veniva dimostrato che per un qualunque $g \geq 1$ e qualunque $t > g$, vale la relazione:

$$E(F,\ t;\ N) > \gamma N^{\frac{1}{g}} (\log\log N)^{-g}$$

con $\gamma > 0$, *opportuno, ed* N *abbastanza grande* (7).

Nella dimostrazione l'autore utilizzava un semplice procedimento ispirato ai più elementari concetti che stanno alla base del metodo di Viggo Brun.

Nel 1952 il Cugiani, nello stesso ordine d'idee, migliorava il precedente risultato dimostrando [12] che, per ogni $t \geq g \geq 2$, vale la relazione:

$$E(F,\ t;\ N) > \gamma_1 N^{\frac{1}{g}} (\log\log N)^{1-g}$$

con $\gamma_1 > 0$, *opportuno, ed* N *abbastanza grande.*

Anche di questo problema generalizzato si possono considerare delle varianti, quale quella che si presenta ad esempio quando si esiga che l'argomento x del polinomio assuma soltanto valori primi.

(5) Qui abbiamo supposto il termine noto $a_g = 0$. Ci si riduce facilmente da questo al caso generale; tutto si riduce a scrivere la (10) nella forma $N' = F(x) + l_t$, con $N' = N - a_g$.

(6) Questa condizione esclude l'eventualità che la (10) risulti insolubile per infiniti valori di N. Osserviamo che a tal fine è sufficiente, ma non necessario, che risultino primi fra loro i numeratori dei coefficienti a_0, $a_1, \dots, a_{g-1}$.

(7) Questo risultato è garantito sotto l'ipotesi che l_t soddisfi anche ad alcune condizioni supplementari; che esso per esempio risulti libero da quadrati di numeri primi $p < N^{\frac{1}{g+\varepsilon}}$, che non entrino nel divisore fisso di $F(x)$.

In tale ordine d'idee si pose il SAMBASIVA RAO; egli prese in considerazione anche questa questione nello stesso lavoro [8] già ricordato, in cui presenta, a tale riguardo, dei risultati che consistono, nel caso $t > g \geq 1$, in una valutazione asintotica del numero E di tali rappresentazioni, dello stesso tenore della (6), ed in una limitazione dal disotto $\left(\text{del tipo } E > c \operatorname{Li}\left(N^{\frac{1}{g}}\right)\right)$ nel caso $t = g \geq 2$.

La dimostrazione, che non viene riferita dall'Autore, utilizzerebbe, oltre al teorema di SIEGEL–WALFISZ. anche un risultato di HUA LOO KENG che affina il classico teorema di T. NAGELL sul numero delle soluzioni di una congruenza che ha per modulo la potenza di un primo.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. ESTERMANN, *Einige Sätze über quadratfreie Zahlen*, « Math. Ann. » *105*, 653-662 (1931).

[2] T. ESTERMANN, *On the representations of a number as the sum of a prime and a quadratfrei number*, « J. Lond. Math. Soc. » *6*, 219-221 (1931).

[3] P. ERDÖS, *The representation of an integer as the sum of the square of a prime ad of a square-free integer* », « J. Lond. Math Soc. » *10*, 243-245 (1935).

[4] A. PAGE, *On the number of primes in an arithmetic progression*, « Proc. Lond. Math. Soc. » (2), *39*, 116-141 (1935).

[5] G. RICCI, *Sull' aritmetica additiva degli interi liberi da potenze*, « Tôhoku Math. J. », *41*, Part I, 20-26 (1935).

[6] A. WALFISZ, *Zur additiven Zahlentheorie II*, « Math. Zeit. », *40*, 592-607 (1935).

[7] S. PILLAI, *On the number of representations of a number as the sum of the square of a prime and a square-free integer* « Proc. Indian Acad. Sci. », Sect. A, *10*, 390-391 (1939).

[8] K. SAMBASIVA RAO, *On the representation of a number as the sum of the* k — th *power of a prime and an* l — th *power-free integer*, « Proc. Indian Acad. Sci. », Sect. A, *11*, 429-436 (1940).

[9] K. F. ROTH, *A theorem involving square-free numbers* « J. Lond. Math. Soc. », *22*, 231-237 (1947).

[10] L. MIRSKY, *The number of representations of an integer as the sum of a prime and a* k*-free integer*, « Amer. Math. Monthly », *56*, 17-19 (1949).

[11] M. CUGIANI, *Sull'aritmetica additiva dei numeri liberi da potenze*, « Riv. Mat. Univ. Parma », *2*, 403-416 (1951).

[12] M. CUGIANI, *Sulla rappresentazione degli interi come somme di una potenza e di un numero libero da potenze*, « Ann. Mat. pura e appl. », (4), *33*, 135-143 (1952).

[13] M. CUGIANI, *Sui valori di un polinomio che risultano liberi da potenze* » Ann. Mat. pura e appl. », (4), 35, 291-298 (1953).